Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, О применении интерполяционных методов к исследованию свойств функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 372–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:14:16

УДК 517.51

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е. Д. Нурсултанов

В работе с помощью интерполяционных теорем для пространств функций многих переменных получено обобщение и уточнение в многомерном случае теоремы Хермандера о мультипликаторах преобразования Фурье из L_p в L_q и неравенства Харди–Литтлвуда–Пэли для некоторого класса кратных рядов Фурье.

Библиография: 18 названий.

Идея “многомерной” интерполяции банаховых пространств имеет своим истоком работу А. Йошикава [1], Г. Спара [2] и получила дальнейшее развитие в статьях [3]–[10].

В данной работе мы хотим показать как применение интерполяционных теорем для пространств функций многих переменных [9], [10] позволяет получать обобщение и уточнение некоторых известных результатов.

1. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – векторы такие, что если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, n$. В дальнейшем будем считать, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют этим условиям.

Определим функционалы

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty |t_1^{p_1} \dots t_n^{p_n} \varphi(t_1, \dots, t_n)|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q_n},$$

$$F_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^\infty k_n^{\frac{q_n}{p_n}-1} \dots \left(\sum_{k_1=1}^\infty k_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} |a_{k_1 \dots k_n}|^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{1/q_n};$$

здесь выражения $(\int_0^\infty (G(t))^q \frac{dt}{t})^{1/q}$ и $(\sum_{k=1}^\infty |g_k|^q)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимаются как $\sup_{t>0} G(t)$ и $\sup_k |g_k|$ соответственно.

Пусть $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $f(x_1, \dots, x_n)$ – измеримая функция, заданная в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}} = \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n}$, $*$ – некоторая перестановка последовательности чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Через $f^*(t) = f^{*j_1, \dots, *j_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_{j_1} \in \mathbb{R}^{m_{j_1}}, \dots, x_{j_n} \in \mathbb{R}^{m_{j_n}}$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(t)$ будем называть *невозрастающей перестановкой* функции f в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, соответствующей вектору $*$ – $(j_1, \dots, j_n)$.

Пространство $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})} = \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(f^*(\cdot)) < \infty.$$

Если $*$ = $(1, 2, \dots, n)$, то пространство $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$ будем обозначать через $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$.

Пространство $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $\Omega_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$, определяется нормой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\Omega)} = \|f_\Omega\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})},$$

где f_Ω – нулевое продолжение функции f с области Ω на все $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Аналогично определяется пространство

$$l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* = \{ \{a_s\}_{s \in \mathbb{N}^n} : \|a\|_{l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*} = F_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\{a_k^*\}) < \infty \},$$

где $a_{\mathbf{k}}^* = a_{k_1, \dots, k_n}^{*j_1 \dots j_n}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_s\}_{s \in \mathbb{N}^n}$, которую применили последовательно по переменным $s_{j_1}, \dots, s_{j_n}$.

Пространства $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$, $l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*$ являются обобщением пространств Лоренца на анизотропный случай. В случае, когда $*$ = $(1, 2, \dots, n)$, $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$, данные пространства были рассмотрены А. П. Блозинским [7] и затем изучены некоторые их свойства. В общем случае эти свойства сохраняются (см. [9]).

а) При $\mathbf{q} \leq \mathbf{q}_1$ ($q_j \leq q_{j_1}$, $j = 1, \dots, n$) имеют место вложения

$$L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\Omega) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}^*(\Omega), \quad l_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* \hookrightarrow l_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}^*.$$

б) Если $p_{j_0} < \infty$ и область $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ такая, что $m\Omega_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$L_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}^*(\Omega) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\Omega), \quad l_{\mathbf{p}\mathbf{q}_1}^* \hookrightarrow l_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}}^*,$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1, \dots, p_{j_0-1}, p_{j_0} + \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n)$, $\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n)$.

в) (Неравенство Гёльдера). Пусть $1 < \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q} < \infty$, $1 \leq \mathbf{t}, \mathbf{s}, \nu \leq \infty$, $1/\mathbf{p} + 1/\mathbf{r} = 1/\mathbf{q}$, $1/\mathbf{s} + 1/\mathbf{t} \geq 1/\nu$ ($1/p_j + 1/r_j = 1/q_j$, $1/s_j + 1/t_j \geq 1/\nu_j$, $j = 1, \dots, n$); тогда верны неравенства

$$\|fg\|_{L_{\mathbf{q}\nu}^*(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{s}}^*(\Omega)} \|g\|_{L_{\mathbf{r}\mathbf{t}}^*(\Omega)}, \quad \|ab\|_{l_{\mathbf{q}\nu}^*} \leq c \|a\|_{l_{\mathbf{p}\mathbf{s}}^*} \|b\|_{l_{\mathbf{r}\mathbf{t}}^*}.$$

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $A = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 -значных измеримых функций таких, что $\|f(x)\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ определяется индуктивно. Назовем его *анизотропным пространством размерности n* .

Пусть $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_n^0)$, $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j = 0, \text{ или } \varepsilon_j = 1, j = 1, \dots, n\}$ – вершины n -мерного единичного куба. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \|\dots\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \dots \|a\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_n^0)$, $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ назовем *совместимой*, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Пусть $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$; вектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ сопоставим $\varepsilon^* = (\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}) \in E$. Определим функционал K^* :

$$K^*(t, a; \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \inf \left\{ \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} : a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \quad a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon \right\},$$

где $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Через $\mathbf{A}_{\theta \mathbf{q}}^* = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)_{\theta \mathbf{q}}^*$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которых верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta \mathbf{q}}^*} = \Phi_{\mathbf{p} \mathbf{q}}(t^{-1} K^*(t, a)) < \infty,$$

где $\mathbf{p} = 1/(1 - \theta)$.

ЛЕММА 1. Пусть $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$ – совместимая пара анизотропных пространств, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j = 0 \text{ или } \varepsilon_j = 1, \quad i = 1, \dots, n\}$. Пусть $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$, $*_1 = (r_1, \dots, r_n)$ – некоторые перестановки последовательности $(1, \dots, n)$; выражение $* \circ *_1 = (r_{j_1}, \dots, r_{j_n})$ определяет перестановку последовательности $(r_1, \dots, r_n)$, соответствующую вектору $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$. Если T – линейный оператор такой, что $T : \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$, с нормой M_ε для любого $\varepsilon \in E$, то

$$T : \mathbf{A}_{\theta \mathbf{q}}^{* \circ *_1} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta \mathbf{q}}^{*_1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \mathbf{q} \leq \infty,$$

с нормой $\|T\| \leq \max_{\varepsilon \in E} M_\varepsilon$.

Следующее утверждение является следствием теорем 1, 2 из [9].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq \mathbf{p}_i = (p_1^i, \dots, p_n^i)$, $\sigma_i = (\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \leq \infty$, $i = 0, 1$, $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $0 < \theta = (\theta_0, \dots, \theta_n) < 1$, $1/\mathbf{p} = (1 - \theta)/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$, $*$ = $(j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^* = (L_{p_{j_1}^0 \sigma_{j_1}^0}, \dots, L_{p_{j_n}^0 \sigma_{j_n}^0})$, $\mathbf{A}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^* = (L_{p_{j_1}^1 \sigma_{j_1}^1}, \dots, L_{p_{j_n}^1 \sigma_{j_n}^1})$, $\mathbf{B}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^* = (l_{p_{j_1}^0 \sigma_{j_1}^0}, \dots, l_{p_{j_n}^0 \sigma_{j_n}^0})$, $\mathbf{B}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^* = (l_{p_{j_1}^1 \sigma_{j_1}^1}, \dots, l_{p_{j_n}^1 \sigma_{j_n}^1})$. Тогда¹

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^* &= (\mathbf{A}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^*, \mathbf{A}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^*)_{\theta \mathbf{q}}^*, & l_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^* &= (\mathbf{B}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^*, \mathbf{B}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^*)_{\theta \mathbf{q}}^*, \\ L_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^* &= (L_{\mathbf{p}_0 \infty}^*, L_{\mathbf{p}_1 \infty}^*)_{\theta \mathbf{q}}^*, & l_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^* &= (l_{\mathbf{p}_0 \infty}^*, l_{\mathbf{p}_1 \infty}^*)_{\theta \mathbf{q}}^*. \end{aligned}$$

¹Здесь $L_{p_{j_s}^i \sigma_{j_s}^i}$, $l_{p_{j_s}^i \sigma_{j_s}^i}$ – обычные (со скалярными параметрами) пространства Лоренца.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из теоремы 1, порядок расстановки (интегрирование) пространств в $\mathbf{A}_{\mathbf{p}_i \sigma_i}^* = (L_{p_{j_1}^i \sigma_{j_1}^i}, \dots, L_{p_{j_n}^i \sigma_{j_n}^i})$, $i = 0, 1$, предопределяет порядок невозрастающей перестановки в $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* = (\mathbf{A}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^*, \mathbf{A}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^*)_{\theta \mathbf{q}}$. Например, интерполирование одним и тем же методом пары пространств $(L_{p_0}(\mathbb{R}_x), L_{p_0}(\mathbb{R}_y))$, $(L_{p_1}(\mathbb{R}_x), L_{p_1}(\mathbb{R}_y))$ и $(L_{p_0}(\mathbb{R}_y), L_{p_0}(\mathbb{R}_x))$, $(L_{p_1}(\mathbb{R}_y), L_{p_1}(\mathbb{R}_x))$ дает два разных результата, хотя как линейные нормированные пространства эти пары совпадают:

$$L_{p_i}(\mathbb{R}^2) = (L_{p_i}(\mathbb{R}_x), L_{p_i}(\mathbb{R}_y)) = (L_{p_i}(\mathbb{R}_y), L_{p_i}(\mathbb{R}_x)), \quad i = 0, 1.$$

Порядок же интегрирования в $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* = (\mathbf{A}_{\mathbf{p}_0 \sigma_0}^*, \mathbf{A}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^*)_{\theta \mathbf{q}}$ определяется самим интерполяционным методом.

2. Пусть F, F^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$. Функцию φ назовем *мультипликатором преобразования Фурье* из функционального пространства Лоренца $L_{\mathbf{p}\tau}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Лоренца $L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}(\mathbb{R}^n)$, если оператор $T_\varphi(f) = F^{-1}\varphi Ff$ является ограниченным из пространства $L_{\mathbf{p}\tau}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из $L_{\mathbf{p}\tau}$ в $L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}$ обозначим через $M(L_{\mathbf{p}\tau} \rightarrow L_{\mathbf{q}\mathbf{s}})$. Данное множество является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\varphi\|_{M(L_{\mathbf{p}\tau} \rightarrow L_{\mathbf{q}\mathbf{s}})} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T_\varphi(f)\|_{L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}}}{\|f\|_{L_{\mathbf{p}\tau}}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – преобразование Фурье, $2 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p} - 1)$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $* = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$, $*' = (j_n, \dots, j_1)$. Тогда

$$\|Ff\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'}^*(\mathbb{R}^n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в случае, когда $* = (1, 2, \dots, n)$. Пусть $\mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) = (2, \dots, 2)$, $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) = (\infty, \dots, \infty)$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n): \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$. Введем обозначение $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_{\varepsilon_1}, \dots, p_{\varepsilon_n}) = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$. Покажем, что для любого $\varepsilon \in E$ верно

$$\|Ff\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}} \leq \|\dots\| \|f\|_{L_{p'_{\varepsilon_n}}} \|L_{p'_{\varepsilon_{n-1}}} \dots \|L_{p'_{\varepsilon_1}}; \quad (1)$$

здесь $1/p'_{\varepsilon_j} + 1/p_{\varepsilon_j} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Для $n = 1$ доказательство следует из равенства Парсеваля и определения преобразования Фурье. Предположим, что неравенство (1) справедливо для n . Покажем, что оно верно для значения $n + 1$. Пусть $\varepsilon_{n+1} = 0$ т.е. $p_{\varepsilon_{n+1}} = 2$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_{\varepsilon_1}, \dots, p_{\varepsilon_n})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned} \|Ff\|_{L_{(\mathbf{p}_\varepsilon, p_{\varepsilon_{n+1}})}(\mathbb{R}^{n+1})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \|Ff\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^2 dy_{n+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x_{n+1}) e^{-iy_{n+1}x_{n+1}} dx_{n+1} \right) e^{-iyx} dx \right\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^2 dy_{n+1} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\dots\| \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(\cdot, x_{n+1}) e^{-iy_{n+1}x_{n+1}} dx_{n+1} \right\|_{L_{p'_{\varepsilon_n}}} \dots \|L_{p'_{\varepsilon_1}} \right)^{2/p'_{\varepsilon_1}} dy_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как $p'_{\varepsilon_j} \leq 2$, $j = 1, \dots, n$, из неравенства Минковского получим (1). Если $\varepsilon_{n+1} = 1$, т.е. $p_{\varepsilon_{n+1}} = \infty$, то, сначала применяя неравенство Минковского, а затем предположение индукции, получим неравенство (1).

Таким образом, используя интерполяционные свойства пространств $L_{\mathbf{p}}$ (теорема 1, лемма 1), получим требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\ast = (n, n-1, \dots, 1)$, $1 < \mathbf{p} < \mathbf{2} < \mathbf{q} < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{s}, \mathbf{t} \leq \infty$,

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}, \quad \frac{1}{\mathbf{h}} = \left(\frac{1}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{t}} \right)_+;$$

здесь $(x)_+ = \max(0, x)$. Тогда

$$L_{\mathbf{r}\mathbf{h}}^{\ast} \hookrightarrow M(L_{\mathbf{p}\mathbf{t}} \rightarrow L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 2, неравенством Гёльдера, а также свойствами пространств $L_{\mathbf{p}\mathbf{t}}^{\ast}$; получим

$$\|F^{-1}\varphi Ff\|_{L_{\mathbf{q}\mathbf{s}}} \leq c_1 \|\varphi Ff\|_{L_{\mathbf{q}'\mathbf{s}}^{\ast}} \leq c_1 \|\varphi\|_{L_{\mathbf{r}\mathbf{h}}^{\ast}} \|Ff\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{t}}^{\ast}} \leq c_2 \|\varphi\|_{L_{\mathbf{r}\mathbf{h}}^{\ast}} \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{t}}},$$

что и требовалось доказать.

В изотропном случае, при $\mathbf{p} = (p, \dots, p) = \mathbf{t}$, $\mathbf{q} = (q, \dots, q) = \mathbf{s}$, $1 < p < 2 < q \leq \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$ из теоремы 3 следует

$$\|\varphi\|_{M(L_p \rightarrow L_q)} \leq \sup_{t_j > 0} t_1^{1/r} \dots t_n^{1/r} \varphi^{\ast_1 \dots \ast_n}(t_1, \dots, t_n) = \|\varphi\|_{L_{(r, \dots, r)(\infty, \dots, \infty)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2)$$

Данное утверждение более точное, чем утверждение теоремы Хермандера [11]: при $1 < p < 2 \leq q \leq \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$

$$\|\varphi\|_{M(L_p \rightarrow L_q)} \leq c \|\varphi\|_{L_{r\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Действительно, для простоты рассуждений положим $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_{(r,r)(\infty,\infty)}} &= \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} (t_1 t_2)^{1/r} \varphi^{\ast_1 \ast_2}(t_1, t_2) \\ &\leq \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} \frac{1}{t_1^{1-1/r}} \frac{1}{t_2^{1-1/r}} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \varphi^{\ast_1 \ast_2}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ &\leq \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} \sup_{|e_2|=t_2} \frac{1}{|e_2|} \int_{e_2} \sup_{|e_1|=t_1} \frac{1}{|e_1|} \int_{e_1} |\varphi(x_1, x_2)| dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Из определения точной верхней грани следует, что для произвольных фиксированных $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ найдется семейства измеримых множеств $e_2(t_2)$, $\{e_1(t_1, x_2)\}_{x_2 \in e_2(t_2)}$, что $|e_2(t_2)| = t_2$, $|e_1(t_1, x_2)| = t_1$ и

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_{(r,r)(\infty,\infty)}} &\leq 4 \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} \frac{1}{|e_2(t_2)|^{1-1/r}} \int_{e_2(t_2)} \\ &\quad \times \frac{1}{|e_1(t_1, x_2)|^{1-1/r}} \int_{e_1(t_1, x_2)} |\varphi(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \\ &= 4 \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} \frac{1}{(t_1 t_2)^{1-1/r}} \int_{e_2(t_2)} \int_{e_1(t_1, x_2)} |\varphi(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \\ &\leq 4 \sup_{|e| > 0} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \int_e |\varphi(x)| dx \sim \|\varphi\|_{L_{r\infty}}. \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что пространства $L_{r\infty}(\mathbb{R}^2)$ и $L_{(r,r)(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ различны.

ПРИМЕР 1. Пусть $1 < r < \infty$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x_1, x_2) = (|x_1| |x_2|)^{-1/r}.$$

Очевидно, что $\sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} t_1^{1/r} t_2^{1/r} \varphi^{*1*2}(t_1, t_2) < \infty$. Покажем, что $\|\varphi\|_{L_{r\infty}} = \sup_{t > 0} t^{1/r} \varphi^*(t) = \infty$. Действительно, для $\varepsilon > 0$ определим множество $e_\varepsilon = \{(x_1, x_2): \varepsilon \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \varepsilon/x_1\}$. Тогда

$$\frac{1}{|e_\varepsilon|^{1-1/r}} \int_{e_\varepsilon} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \sim |\ln \varepsilon|^{1/r} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\|g\|_{L_{r\infty}} \sim \sup_{|e| > 0} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \left| \int_e \varphi(x) dx \right| = \infty.$$

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной (невозрастающей)* в $\mathbb{R}^n$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, имеет место

$$|f(x)| \leq \frac{B}{|x_1| \dots |x_n|} \left| \int_{[0, x]} f(y) dy \right|;$$

здесь $[0, x] = \{y \in \mathbb{R}^n: 0 \leq y_j \text{ sign } x_j \leq |x^j|, j = 1, \dots, n\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 \leq \tau \leq s \leq \infty$, φ — знакоопределенная, обобщенно-монотонная функция. Тогда для того, чтобы $\varphi \in M(L_{p\tau} \rightarrow L_{qs})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p' + 1/q}} \int_Q |\varphi(x)| dx < \infty,$$

где E_0 — множество всех параллелепипедов с гранями, параллельными декартовым плоскостям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное утверждение было сформулировано в заметке автора [12] (следствие 1). Приведенное там доказательство является верным лишь для одномерного случая ($n = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1/r = 1/p - 1/q$. Из теоремы 1 работы [12] следует, что для знакоопределенной функции φ из $M(L_{p\tau} \rightarrow L_{qs})$ верна оценка

$$\sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1-1/r}} \left| \int_Q \varphi(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_{M(L_{p\tau} \rightarrow L_{qs})}.$$

Зафиксируем параметр $r \in (1, \infty)$ и функцию $f \in L_{(r \dots r)(\infty \dots \infty)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для пар (p_0, q_0) , (p_1, q_1) таких, что $1/p_0 - 1/q_0 = 1/r$, из соотношения (2) имеем

$$\|T_\varphi f\|_{L_{q_i}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\varphi\|_{L_{(r \dots r)(\infty \dots \infty)}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p_i}(\mathbb{R}^n)}, \quad i = 0, 1.$$

Применяя вещественный метод интерполяции, получим: при $\tau \leq s$, $1/p - 1/q = 1/r$

$$\|T_\varphi f\|_{L_{qs}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\varphi\|_{L_{(r \dots r)(\infty \dots \infty)}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{M(L_{p\tau} \rightarrow L_{qs})} &\leq c \sup_{t_1 > 0, \dots, t_n > 0} t_1^{1/r} \dots t_n^{1/r} \varphi^{*1 \dots *n}(t_1 \dots t_n) \\ &\leq c \sup_{|e_n| > 0} \frac{1}{|e_n|^{1-1/r}} \left(\int_{e_n} \dots \sup_{|e_1| > 0} \left(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}} \int_{e_1} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_n \right). \end{aligned}$$

Из условия обобщено-монотонности функции φ следует

$$\begin{aligned} &\sup_{|e_n| > 0} \frac{1}{|e_n|^{1-1/r}} \left(\int_{e_n} \dots \sup_{|e_1| > 0} \left(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}} \int_{e_1} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_n \right) \\ &\leq B \sup_{|e_n| > 0} \frac{1}{|e_n|^{1-1/r}} \\ &\quad \times \left(\int_{e_n} \dots \sup_{|e_1| > 0} \left(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}} \int_{e_1} \frac{1}{|x_1| \dots |x_n|} \int_{[0, x]} \varphi(y) dy dx_1 \right) \dots dx_n \right) \\ &\leq B \sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p' + 1/q}} \int_Q \varphi(x) dx \\ &\quad \times \sup_{|e_n| > 0} \frac{1}{|e_n|^{1-1/r}} \left(\int_{e_n} \dots \sup_{|e_1| > 0} \left(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}} \int_{e_1} \frac{1}{(|x_1| \dots |x_n|)^{\frac{1}{r}}} dx_1 \right) \dots dx_n \right) \\ &= Bc \sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p' + 1/q}} \left| \int_Q \varphi(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

3. Неравенство Харди–Литтлвуда–Пэли для рядов $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по ортонормированной в $L_2[0, 1]^n$ системе $\Phi = \{\varphi_k\}$, $|\varphi_k(x)| \leq c$, имеет вид:

$$\|f\|_{L_p[0,1]^n}^p \leq c \sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2} (a_i^*)^p \quad \text{при } 2 < p < \infty, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2} (a_i^*)^p \leq c \|f\|_{L_p[0,1]^n}^p \quad \text{при } 1 < p < 2, \quad (4)$$

где $\{a_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ коэффициентов Фурье функции f по системе Φ .

В одномерном случае неравенства (3) и (4) самые точные среди различных вариантов подобных неравенств (Харди–Литтлвуда, Хаусдорфа–Юнга [13], Пита [14] и др. [15], [16]). Для кратных рядов Фурье ситуация иная; например, для тригонометрических систем имеются еще независимые неравенства [15], [16]:

$$\|f\|_{L_p[0,1]^n}^p \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\dots+k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} |a_{m_1 \dots m_n}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (5)$$

при $2 < p < \infty$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m \exp(2\pi i \sum_{r=1}^n m_r x_r)$,

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\dots+k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} |a_{m_1 \dots m_n}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq c \|f\|_{L_p[0,1]^n}^p, \quad (6)$$

при $1 < p < 2$. В этом пункте приводятся неравенства из которых следуют (3)–(6).

Пусть $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $\Phi_j = \{\varphi_k^j(x_j)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – ортонормированные системы функций (ОНСФ) в $L_2[0, 1]^{m_j}$ такие, что

$$\sup_{x_j \in [0,1]^{m_j}, k \in \mathbb{N}} |\varphi_k^j(x_j)| \leq c, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Система $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^n}$, $x \in [0, 1]^{\mathbf{m}} = [0, 1]^{m_1} \times \dots \times [0, 1]^{m_n}$,

$$\psi_k(x) = \varphi_k^1(x_1) \dots \varphi_k^n(x_n), \quad (7)$$

является ОНСФ в $L_2[0, 1]^{\mathbf{m}}$ и ограниченная в совокупности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Ψ – ОНСФ (7), $f \sim \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \psi_k(x)$, $* = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$, $*' = (j_n, j_{n-1}, \dots, j_1)$. Тогда

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*[0,1]^{\mathbf{m}}} \leq c \|a\|_{l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{*'}},$$

при $2 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p}-1)$,

$$\|a\|_{l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{*'}} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*[0,1]^{\mathbf{m}}},$$

при $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < 2$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p}-1)$.

Данные неравенства при $* = (1, 2, \dots, n)$ и $\mathbf{m} = (1, 1, \dots, 1)$ были доказаны в работе [10]. Доказательство теоремы 4 проводится с применением интерполяционной теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 (см. также теорему 7 из [10]).

Отметим, что порядок невозрастающих перестановок в теоремах 2 и 4 имеет существенное значение. Так, неравенство

$$\|a\|_{l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^*} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^*[0,1]^{\mathbf{m}}} \quad (8)$$

неверно (здесь в левой части неравенства вместо положенного $*'$ стоит $*$). Действительно, пусть $n = 2$, $* = (1, 2)$, $1 < p_1 < p_2 < 2$, $q_2 < \infty$, $\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/p_2}} \exp(2\pi i k x)$.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \varphi(x + y)$; ее коэффициенты Фурье

$$a_{k_1 k_2} = \begin{cases} k^{-1/p_2'}, & k_1 = k_2 = k > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Тогда общий член невозрастающей перестановки $\{a_{k_1 k_2}^{*1*2}\}$ имеет вид

$$a_{k_1 k_2}^{*1*2} = \begin{cases} k_2^{-1/p_2'}, & k_1 = 1, \\ 0, & k_1 > 1. \end{cases}$$

Поэтому $\|a\|_{l_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}}^* = \|\{1/k^{1/p'_2}\}\|_{l_{p'_2q_2}} = \infty$. С другой стороны, $f^{*1}(t, y) = \varphi^*(t)$ и $\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}^* = \|\varphi\|_{L_{p_1q_1}} \sim \|\{1/k^{1/p'_2}\}\|_{l_{p'_1q_1}} < \infty$; следовательно, неравенство (8) не имеет места.

Если $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{p} = (p, \dots, p) = \mathbf{q}$, то из теоремы 4 следуют неравенства:

$$\|f\|_{L_p[0,1]^n}^p \leq c \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1 k_2 \dots k_n}^{*j_1 *j_2 \dots *j_n})^p \quad \text{при } 2 < p < \infty, \quad (9)$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1 k_2 \dots k_n}^{*j_1 *j_2 \dots *j_n})^p \leq c \|f\|_{L_p[0,1]^n}^p \quad \text{при } 1 < p < 2. \quad (10)$$

Покажем, что данные неравенства в случае системы вида (7) более точные, чем (3) и (4). Пусть $A_r = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n: m_1 \cdot m_2 \dots m_n = r\}$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1 \dots k_n}^{*1 \dots *n})^p = \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^p. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} \beta_{\mathbf{m}}^{p-2} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^p;$$

здесь последовательность $\{\beta_{\mathbf{m}}^{p-2}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n}$ есть соответствующая перестановка последовательности $\{r^{p-2}\}_{r \in \mathbb{N}}$.

Учитывая, что $a_{k_1 \dots k_n}^{*1 \dots *n} \geq a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n}$ для всех $1 \leq k_j \leq m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, можно утверждать, что найдутся, по крайней мере, $m_1 \cdot m_2 \dots m_n$ членов последовательности $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$, которые по модулю не меньше числа $a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n}$ и, следовательно, $\beta_{m_1, \dots, m_n} > m_1 \cdot m_2 \dots m_n$. Поэтому при $2 < p$ имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \geq \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^p,$$

а при $p < 2$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \leq \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^p.$$

Принимая во внимание (11), получим, что из неравенств (9), (10) следуют соответственно (3), (4).

Следующий пример показывает, что неравенства (9) и (3) не эквивалентны.

ПРИМЕР 2. Пусть $p > 3$, $0 < \varepsilon < p - 3$, $p' = p/(p - 1)$,

$$a_{k_1 k_2} = (k_1 k_2)^{-1/p'} (\ln(k_1 k_2 + 1))^{-(2+\varepsilon)/p}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} (a_{k_1 k_2}^{*1*2})^p < \infty.$$

Пусть $A_r = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2 : m_1 m_2 = r\}$, $r \in \mathbb{N}$. Как и ранее,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} \beta_{m_1 m_2}^{p-2} (a_{m_1, m_2}^{*1*2})^p.$$

Так как $(a_{k_1 k_2}^{*1*2}) > (a_{m_1 m_2}^{*1*2})$ при $k_1 \cdot k_2 < m_1 \cdot m_2$, то $\beta_{m_1 m_2} > \sum_{s=1}^{r-1} |A_s|$ при $m_1 \cdot m_2 > r$; следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \geq \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{r-1} |A_s| \right)^{p-2} |A_r| \frac{1}{r^{p-1} (\ln r + 1)^{2+\varepsilon}}.$$

Количество элементов $|A_r|$ во множестве A_r не меньше количества различных делителей числа r . Известно, что сумма всех различных делителей чисел от 1 до r асимптотически равна $r \ln r$. Поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \geq c \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|A_r|}{r (\ln r + 1)^{4-p+\varepsilon}} \geq c \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r (\ln r + 1)^{4-p+\varepsilon}} = \infty.$$

Покажем теперь, что из неравенства (9) следует (5).

Пусть $2 < p < \infty$. Заметим, что для любого $h: 1 \leq h \leq \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1 \dots k_n}^{*1 \dots *n})^p \\ & \sim \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{p'} - \frac{1}{h})p(k_1 + \dots + k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^h \right)^{p/h}. \end{aligned}$$

Взяв $h = 2$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1 \dots k_n}^{*1 \dots *n})^p \\ & \sim \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2})p(k_1 + \dots + k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^2 \right)^{p/2} \\ & \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})p(k_1 + \dots + k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{\infty} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{\infty} (a_{m_1 \dots m_n}^{*1 \dots *n})^2 \right)^{p/2} \\ & \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1 + \dots + k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{\infty} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{\infty} |a_{m_1 \dots m_n}|^2 \right)^{p/2} \\ & = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1 + \dots + k_n)} \left(\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_n=k_n}^{\infty} \sum_{m_1=2^{\nu_1}}^{2^{\nu_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{\nu_n}}^{2^{\nu_n+1}-1} |a_{m_1 \dots m_n}|^2 \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Далее, применяя одно из обобщений неравенства Харди (см. [17]), последнее выражение оцениваем через

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\dots+k_n)} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} |a_{m_1 \dots m_n}|^2 \right)^{p/2},$$

что и требовалось.

Я. С. Бугров в работе [18] для тригонометрических рядов получил неравенство: при $1 < p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_1 < 2$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m \exp(2\pi i \sum_{r=1}^n m_r x_r)$, $f \in L_{\mathbf{p}}[0, 1]^n$ верно

$$\left(\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} (|m_1| + 1)^{p_1-2} \left(\dots \left(\sum_{m_n \in \mathbb{N}} (|m_n| + 1)^{p_n-2} |a_{m_1 \dots m_n}|^{p_n} \right)^{p_{n-1}/p_n} \dots \right)^{p_1/p_2} \right)^{1/p_1} \\ \leq c \left(\int_0^1 \left(\dots \left(\int_0^1 |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}. \quad (12)$$

Покажем, что из теоремы 4 следует (12). Не уменьшая общности, можно считать, что $n = 2$. Принимая во внимание, что $p_j < 2$, а следовательно, последовательности $\{(|m_j| + 1)^{p_j-2}\}$, $j = 1, 2$, симметрично убывающие, получим

$$I = \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} (|m_1| + 1)^{p_1-2} \left(\left(\sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} (|m_2| + 1)^{p_2-2} |a_{m_1 m_2}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq 4 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\left[\left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} |a_{m_1 k_2}^{*2}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right]_{k_1}^{*1} \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq 4 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \sup_{\substack{|e|=k_1 \\ e \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{1}{|e|} \sum_{m_1 \in e} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} |a_{m_1 k_2}^{*2}|^{p_2} \right)^{\frac{2}{p_2}} \right)^{\frac{p_1}{2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq 4 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} \sup_{\substack{|e|=k_1 \\ e \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{1}{|e|} \sum_{m_1 \in e} |a_{m_1 k_2}^{*2}|^2 \right)^{\frac{p_2}{2}} \right)^{\frac{p_1}{2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ = 4 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} \left(\frac{1}{k_1} \sum_{r_1=1}^{k_1} (a_{r_1 k_2}^{*2})^2 \right)^{\frac{p_2}{2}} \right)^{\frac{p_1}{2}} \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Так как $(\frac{1}{k} \sum_{r=1}^k (b_r^*)^2)^{\frac{1}{2}} \leq c \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_{r=1}^k r^{-\frac{1}{2}} b_r^*$, где c не зависит от k и последовательности $\{b_r\}$, то

$$I \leq c_1 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} \left(\frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}} \sum_{r=1}^{k_1} r^{-\frac{1}{2}} a_{r k_2}^{*2} \right)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq c_1 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}} \sum_{r_1=1}^{k_1} r_1^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} (a_{r_1 k_2}^{*2})^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \leq c_2 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{p_1-2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p_2-2} (a_{k_1 k_2}^{*2})^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Теперь воспользуемся теоремой 4:

$$\begin{aligned} I &\leq c_3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (f^{*1,*2}(t_1, t_2))^{p_2} dt_2 \right)^{\frac{p_1}{p_2}} dt_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= c_3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (f^{*1}(t_1, x_2))^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{p_1}{p_2}} dt_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq c_3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yoshikawa F. Remarks on the theory of interpolation spaces // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1968. Sec. I. V. 15. P. 209–251.
- [2] Sparr G. Interpolation of several Banach spaces // Annali Mat. Pura Appl. 1974. V. 99. P. 247–316.
- [3] Fernandez D. L. Lorentz spaces, with mixed norms // J. Funct. Anal. 1977. V. 25. № 2. P. 128–146.
- [4] Fernandez D. L. Interpolation of 2^n Banach spaces // Studia Math. (PRL). 1979. V. 65. № 2. P. 175–201.
- [5] Cobus F., Peetre J. Interpolation compact operators: The multidimensional case // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. № 2. P. 371–400.
- [6] Крепкогорский В. Л. Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой // Деп. ВИНТИ № 2963-80. Казань, 1980.
- [7] Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263. № 1. P. 149–167.
- [8] Asekritova I., Krugljak N. On equivalence of K-end J-methods for $(n+1)$ -tuples of Banach spaces // Stud. Math. 1997. V. 122. № 2. P. 99–116.
- [9] Nursultanov E. D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. V. 4. № 2. P. 243–275.
- [10] Нурсултанов Е. Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств // Изв. РАН. 2000. Т. 64. № 1. С. 95–122.
- [11] Hörmander L. Estimates for translation-invariant operators in L_p spaces // Acta. Math. 1960. V. 104. P. 93–140.
- [12] Нурсултанов Е. Д. О нижней оценке мультипликаторов Фурье из M_p^q // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 945–950.
- [13] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [14] Pitt H. R. Theorems on Fourier series and Lower series // Duke Math. J. 1937. № 3. P. 747–755.
- [15] Темляков В. Н. Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
- [16] Смаилов Е. С. Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы. Дисс. ... д.ф.-м.н. Алматы, 1997.
- [17] Потапов М. К. Теоремы Харди–Литтлвуда, Марцинкевича, Литтлвуда–Пэли, приближение углом и вложение некоторых классов функций // Matematika. 1972. Т. 14. № 2. С. 339–362.
- [18] Бугров Я. С. Абсолютная сходимость преобразования Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 5. С. 1033–1035.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова,
г. Караганда
E-mail: nurs@kargu.krg.kz
er-nurs@yandex.ru

Поступило
18.11.1998
Исправленный вариант
02.04.2003