Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев, Локальные и глобальные оценки решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 395–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:59:50

Локальные и глобальные оценки решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина

В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев

В работе изучаются качественные свойства решений задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина. Получены точные локальные и глобальные по пространственным и временным переменным оценки решения. Установлено свойство финитности носителя решения.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В статье исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\lambda, \alpha}[u] = \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u), \quad (x, y, t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), & x &\in \mathbb{R}^N, & y &\in \mathbb{R}^M, \\ u_0(x, y) &\geq 0 \quad \text{п.в.} & x &\in \mathbb{R}^N, & y &\in \mathbb{R}^M. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda > 1$, а $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_M)$, $N \geq 1$, $M \geq 1$, – произвольные точки евклидовых пространств $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^M$ соответственно. Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} |D_L u| &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + |x|^{2\alpha} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right)^2}, \\ \operatorname{div}_L \vec{F}(x, y) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^M \frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Если $\alpha = 0$, то при условии $\lambda > 1$ [1] уравнение (1.1) описывает процесс с медленной диффузией. Операторы типа $L_{1, \alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$, где символ Δ означает оператор

Лапласа, впервые исследовались в работах [2] и [3]. В работах [4] и [5] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda,\alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) (см. также [6] и имеющуюся там литературу).

Целью данной работы является получение точных локальных и глобальных по пространственным и временным переменным оценок решений задачи (1.1), (1.2). Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем необходимые понятия. Для любой локально суммируемой функции $f(z)$ обозначим

$$\|f\|_r = \sup_{\rho \geq r} \left(\rho^{-K/(\lambda-1)} \int_{B_\rho} |f| dx dy \right).$$

Здесь и далее $K = Q(\lambda - 1) + \lambda + 1$, $Q = N + M(\alpha + 1)$,

$$B_\rho(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+M} : d(x, y, 0, 0) \leq \rho\},$$

где $d((x, y), (0, 0)) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha + 1)^2 |y|^2)^{1/(2(\alpha+1))}$. Параметр K можно сравнить с показателем Баренблатта и при $\alpha = 0$ он играет ключевую роль в описании качественных свойств решения вырождающихся уравнений (см. [1]); Q – однородная размерность в пространствах Карно–Каратеодори (см. [6]). Наконец, B_ρ является естественным расширением понятия открытого шара в пространствах Карно–Каратеодори.

Приступим к формулировке основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $u_0 \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+M})$ и для некоторого заданного $r > 0$

$$\|u_0\|_r < \infty. \quad (1.3)$$

Тогда существуют такие положительные постоянные C_0, C_1, C_2 , зависящие лишь от параметров λ, N, M, α , что решение (обобщенное) задачи (1.1), (1.2) существует в S_{T_r} , где $T_r = C_0 \|u_0\|_r^{-1/\lambda-1}$ и, кроме того, для всех $0 < t < T_r$ и $R > r$ справедливы оценки

$$\|u(\cdot, t)\|_r \leq C_1 \|u_0\|_r, \quad (1.4)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_\infty(B_R)} \leq C_2 t^{-Q/K} R^{(\lambda+1)/(\lambda-1)} \|u_0\|_r^{(\lambda+1)/K}. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^{N+M})$ и $\text{supp } u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Тогда для всех $t > 0$

$$Z(t) = \inf\{\rho : u(\cdot, t) = 0 \text{ для н.в. } x, y \in \mathbb{R}^{N+M} \setminus B_\rho\} \leq 4R_0 + C_4 t^{1/K} \|u_0\|_1^{(\lambda-1)/K}. \quad (1.6)$$

Более того, при достаточно больших $t > 0$

$$Z(t) \geq C_5 t^{1/K} \|u_0\|_1^{(\lambda-1)/K}, \quad (1.7)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_\infty(B_R)} \geq C_6 t^{-Q/K} \|u_0\|_1^{(\lambda+1)/K}. \quad (1.8)$$

Содержание теоремы 1.1 является естественным обобщением результатов работы [7], где изучался случай $\alpha = 0$. Теорема 1.2 устанавливает свойство конечной скорости распространения возмущений и дает точные по порядку оценки размера

носителя. Отметим, что при $\alpha = 0$ указанное свойство является естественным для уравнений с медленной диффузией (см. [1], [8], [9]). Доказательство теоремы 1.1 приводится подходом работы [10], где существенно используются также идеи работы [7]. Доказательство финитности носителя проводится методом работы [11] (см. также [12]). Структура работы такова: во втором пункте дается понятие решения задачи (1.1), (1.2) и приводятся некоторые вспомогательные утверждения. Третий и четвертый пункты посвящены доказательству теорем 1.1 и 1.2 соответственно. На протяжении всей работы символами c, c_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметров λ, N, M, α .

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ – произвольное ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{N+M}$ с достаточно гладкой границей. Определим пространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ для $1 \leq p < \infty$ как замыкание $C^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|D_L f|^p + |f|^p) dx dy \right)^{1/p},$$

которая эквивалентна норме

$$\left(\int_{\Omega} |D_L f|^p dx dy \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |f|^r dx dy \right)^{1/r}$$

для $0 < r \leq p$.

Обозначим еще через $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ подпространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$, которое получается как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$. Пространства $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ и $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ включают в класс пространств Карно–Каратеодори, для которых достаточно полно изучены теоремы вложения типа С. Л. Соболева и мультипликативные неравенства типа Ниренберга–Гальярдо. Читателя, интересующегося теорией пространств Карно–Каратеодори, мы отсылаем к обзорной работе [6], где можно найти дальнейшую литературу. В частности, известно [6] следующее мультипликативное неравенство типа Ниренберга–Гальярдо. Для любой функции $f \in \mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |f|^q dx \leq C \left(\int_{\Omega} |D_L f|^p dx \right)^{aq/p} \left(\int_{\Omega} |f|^r dx \right)^{(1-a)q/r}. \quad (2.1)$$

Здесь $0 < r < q \leq q^* = pQ/(Q-p)$, $0 < a = Qp(q-r)/q(Q(p-r)+rp) < 1$, $C = C(q, p, r, Q)$.

В дальнейшем нам потребуется итеративная лемма.

ЛЕММА 2.1 (см. лемму 5.6 в [13] при $b > 1$). Пусть последовательность $y_h, h = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_{h+1} \leq cb^h y_h^{1+\varepsilon}, \quad h = 0, 1, 2, \dots,$$

с какими-либо положительными постоянными c, ε и $b > 1$. Тогда если

$$y_0 \leq \theta = c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2},$$

то $y_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$.

Введем теперь понятие обобщенного решения (или просто решения) задачи (1.1), (1.2). Неотрицательную измеримую функцию $u(x, y, t)$ будем называть решением задачи (1.1), (1.2) в $S_T = \mathbb{R}^{M+N} \times (0, T)$, если для любого $t > 0$, $R > 0$ оно является элементом пространства $L_{\lambda+1}(t, T, \mathfrak{L}_{1, \lambda+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^{M+N})) \cap C((t, T), L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^{M+N}))$,

$$\iint_{B_R \times (t, T)} -u\eta_\tau + (|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) D_L \eta \, dx \, dy \, d\tau = 0, \quad (2.2)$$

где $\eta(x, y, t)$ произвольная гладкая функция с носителем из $B_R \times (t, T)$. Более того, $\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L_{1, \text{loc}}(R^{N+M})} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

3. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M})$ и $u(x, y, t)$ – решение задачи (1.1), (1.2) в S_∞ .

ЛЕММА 3.1. Пусть $s > 1$. Определим U_1, U_2 следующим образом: $U_i = B_{r_i} \times (t_i, t)$, $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$. Тогда для любых $h_1 > h_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{r_1}} (u - h_1)_+^{s+1} \, dx \, dy + \iint_{U_1} |D_L(u - h_1)_+^{(s+\lambda)/(\lambda+1)}|^{\lambda+1} \, dx \, dy \, d\tau \\ & \leq \frac{c}{(t_1 - t_2)} \iint_{U_2} (u - h_2)_+^{s+1} \, dx \, dy \, d\tau + \frac{c}{(r_2 - r_1)^{\lambda+1}} \iint_{U_2} (u - h_2)_+^{s+\lambda} \, dx \, dy \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B_R – шар с центром в точке $x_0 = 0$ и радиусом R . Введем параметры $r_2 > r_1 > 0$, $t > t_1 > t_2 > 0$, $s > 1$, $h_1 > h_2 > 0$, $R = (r_1 + r_2)/2$, $\tilde{t} = (t_1 + t_2)/2$, $\tilde{h} = (h_1 + h_2)/2$, $U_1 = B_{r_1} \times (t_1, t)$, $U_2 = B_{r_2} \times (t_2, t)$.

Определим гладкую неотрицательную срезающую функцию $\xi = \xi(x, y, \tau)$ такую, что $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi = 1$ на B_{r_1} , $\xi = 0$ вне B_{r_2} , $\xi(x, y, t_1) = 0$, $|D_L \xi| \leq c/(r_2 - r_1)$, $0 \leq D_\tau \xi \leq c/(t_1 - t_2)$. Умножив обе части уравнения на функцию $(u - \tilde{h})_+^s \xi^{\lambda+1}$ и проинтегрировав по $B_R \times (\tilde{t}, t)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} \left(\frac{(u - \tilde{h})_+^{s+1}}{s+1} \right) \xi^{\lambda+1} \, dx \, dy \Big|_{\tilde{t}}^t + \iint_{B_R \times (\tilde{t}, t)} |D_L u|^\lambda \xi^{\lambda+1} D_L(u - \tilde{h})_+^s \, dx \, dy \, d\tau \\ & \leq (\lambda+1) \iint_{B_R \times (\tilde{t}, t)} |D_L u|^\lambda \xi^\lambda D_L \xi (u - \tilde{h})_+^s \, dx \, dy \, d\tau \\ & \quad + \iint_{B_R \times (\tilde{t}, t)} (\lambda+1) \frac{(u - \tilde{h})_+^{s+1}}{s+1} \xi^\lambda \xi_\tau \, dx \, dy \, d\tau. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя свойства функции $\xi(x, y, \tau)$ стандартным образом, получим оценку

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{r_1}} (u - \tilde{h})_+^{s+1} \xi^{\lambda+1} \, dx + s(s+1) \iint_{U_1} |D_L u|^{\lambda+1} \xi^{\lambda+1} (u - \tilde{h})_+^{s-1} \, dx \, dy \, d\tau \\ & \leq (\lambda+1)(s+1) \iint_{U_2} |D_L u|^\lambda \xi^\lambda (u - \tilde{h})_+^s |D_L \xi| \, dx \, dy \, d\tau \\ & \quad + (\lambda+1) \iint_{U_2} (u - \tilde{h})_+^{s+1} \xi^\lambda \xi_\tau \, dx \, dy \, d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\lambda + 1) \|\xi_\tau\|_{\infty, U_2} \iint_{U_2} (u - \tilde{h})_+^{s+1} \xi^\lambda dx dy d\tau \\
&\quad + \varepsilon \iint_{U_2} |D_L u|^{\lambda+1} \xi^{\lambda+1} (u - \tilde{h})_+^{s-1} dx dy d\tau \\
&\quad + c_\varepsilon [(\lambda + 1)(s + 1)]^{\lambda+1} \iint_{U_2} |D_L \xi|^{\lambda+1} (u - \tilde{h})_+^{s+\lambda} dx dy d\tau, \\
&\sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{r_1}} (u - h_1)_+^{s+1} dx dy + \iint_{U_1} |D_L (u - h_1)_+^{(s+\lambda)/(\lambda+1)}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \\
&\leq c \|\xi_\tau\|_{\infty, U_2} \iint_{U_2} (u - h_2)_+^{s+1} \xi^\lambda dx dy d\tau \\
&\quad + c \|D_L \xi\|_{\infty, U_2}^{\lambda+1} \iint_{U_2} (u - h_2)_+^{s+\lambda} dx dy d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда с очевидностью следует (3.1). Лемма доказана.

Определим

$$\Psi_r(t) = \sup_{0 < \tau < t} \left\{ \sup_{R \geq r} R^{-K/(\lambda-1)} \int_{B_R} u(x, y, t) dx dy \right\}.$$

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что для всех $t \in (0, T)$*

$$t^{1/(\lambda-1)} \Psi_r(t) \leq \varepsilon_1, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M, N, \lambda) > 0$ далее будет выбрано. Тогда для любых $t \in (0, T)$, $R \geq r$, $\sigma \in (0, 1/4)$, $a_1 > a_2$

$$\begin{aligned}
&\sup_{t/2 < \tau < t} \int_{B_R} (u - a_1)_+^{s+1} dx dy \\
&\leq c \sigma^{-Q/K} t^{-sQ/K} \left(\sup_{t/2(1-\sigma) < \tau < t} \int_{B_{(1+\sigma)R}} (u - a_2)_+ dx dy \right)^{1+s(\lambda+1)/K}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_n = R(1 + \sigma(1 - 2^{-n}))$, $r_\infty = R(1 + \sigma)$, $r_0 = R$, $t_n = (t/2)(1 - \sigma(1 - 2^{-n}))$, $t_\infty = (t/2)(1 - \sigma)$, $t_0 = t/2$, $k_n = a_2 + (a_1 - a_2)2^{-n}$, $n \geq 0$. Тогда из леммы 3.1 при $r_1 = r_n$, $r_2 = r_{n+1}$, $t_1 = t_n$, $t_2 = t_{n+1}$, $h_1 = k_n$, $h_2 = k_{n+1}$, $S_n = B_{r_n} \times (t_n, t)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{r_n}} (u - k_n)_+^{s+1} dx dy + \iint_{S_n} |D_L (u - k_n)_+^{(s+\lambda)/(\lambda+1)}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \\
&\leq \frac{c 2^{n(\lambda+1)}}{t\sigma} \iint_{S_{n+1}} (u - k_{n+1})_+^{s+1} dx dy d\tau \\
&\quad + \frac{c 2^{n(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1} \sigma^{\lambda+1}} \iint_{S_{n+1}} (u - k_{n+1})_+^{s+\lambda} dx dy d\tau. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Пусть $\eta_n(x, y, \tau)$ — гладкая срезающая функция, удовлетворяющая свойствам: $0 \leq \eta_n \leq 1$, $\eta_n \equiv 1$ в S_n , $\eta_n \equiv 0$ вне S_{n+1} , $z(x, y, t_n) = 0$, $|D_L \eta_n| \leq 2^n/R$, $0 \leq D_\tau \eta_n \leq 2^n/t$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_n} |D_L(u - k_n)_+^{(s+\lambda)/(\lambda+1)} \eta_n|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau \\
 & \leq 2^{\lambda+1} \iint_{S_n} |D_L(u - k_n)_+^{(s+\lambda)/(\lambda+1)}|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau \\
 & \quad + 2^{\lambda+1} \iint_{S_n} |D_L \eta_n|^{\lambda+1} (u - k_n)_+^{\lambda+s} dx dy d\tau \\
 & \leq \frac{b_1^n}{t} \iint_{S_{n+1}} (u - k_{n+1})_+^{s+1} dx dy d\tau \\
 & \quad + \frac{b_1^n}{R^{\lambda+1}} \iint_{S_{n+1}} (u - k_{n+1})_+^{s+\lambda} dx dy d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Определим $v_n = (u - k_n)^{(s+\lambda)/(\lambda+1)} \eta_n$. Тогда из (3.4), (3.5) следует

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{r_n}} v_n^q dx dy + \iint_{S_n} |D_L v_n|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau \\
 & \leq \frac{b_1^n}{t} \iint_{S_{n+1}} v_{n+1}^q dx dy d\tau + \frac{b_1^n}{R^{\lambda+1}} \iint_{S_{n+1}} v_{n+1}^{1+\lambda} dx dy d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для оценки интегралов в правой части неравенства (3.6) нам потребуется мультипликативное неравенство (2.1). Применим его дважды к функции $v = v_{n+1}$ с параметром $q = (s+1)(\lambda+1)/(\lambda+s)$, $p = \lambda+1$, $r = \mu = (\lambda+1)/(\lambda+s)$ и при $p = q = \lambda+1$, $r = \mu$ соответственно. Далее, интегрируя по времени и применяя неравенство Гёльдера, в обоих случаях получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_{n+1}} v_{n+1}^q dx dy d\tau \\
 & \leq ct^{1-d_1} \left(\int_{S_{n+1}} |D_L v_{n+1}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \right)^{d_1} \left(\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{r_{n+1}}} v_{n+1}^\mu dx dy \right)^{(1-d_2)q/\mu},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_{n+1}} v_{n+1}^{\lambda+1} dx dy d\tau \\
 & \leq ct^{1-h} \left(\int_{S_{n+1}} |D_L v_{n+1}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \right)^h \left(\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{r_{n+1}}} v_{n+1}^\mu dx dy \right)^{(1-h)(\lambda+1)/\mu},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

где после подсчета $d_1 = (aq)/(\lambda+1) = Q(q-\mu)/(Q(\lambda+1-\mu) + \mu(\lambda+1))$, $d_2 = a = (Q/\mu - Q/q)/(Q/\mu - Q/(\lambda+1) + 1)$, $h = (Q/\mu - Q/(\lambda+1))/(Q/\mu - Q/(\lambda+1) + 1) < 1$. Применяя неравенство Юнга с показателями d_1^{-1} , $(1-d_1)^{-1}$, h^{-1} , $(1-h)^{-1}$ соответственно к правым частям (3.7) и (3.8), из (3.6) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{r_n}} v_n^q dx dy + \iint_{S_n} |D_L v_n|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau \\
 & \leq \delta \iint_{S_{n+1}} |D_L v_{n+1}|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{cc(\delta)b_2^n}{t^{sQ/K}} \left(\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{r_{n+1}}} v_{n+1}^\mu dx dy \right)^{1+(\lambda+1)s/K} \\
& + \frac{cc(\delta)b_2^n t}{R^{K+Qs}} \left(\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{r_{n+1}}} v_{n+1}^\mu dx dy \right)^{\lambda+s}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

где $\delta > 0$, $b_2 > 1$. Используя определение Ψ_r и учитывая условие $t^{1/(\lambda-1)}\Psi_r(t) \leq \varepsilon_1$, из (3.9) индукцией получаем

$$\begin{aligned}
& \sup_{t/2 < \tau < t} \int_{B_R} (u - a_1)_+^{s+1} dx dy \\
& \leq \delta^i \iint_{S_{i+1}} |D_L v_{i+1}|^{(\lambda+1)} dx dy d\tau \\
& + c \left(\sum_{n=0}^i \delta^n b_2^n \right) t^{sQ/K} \left(\sup_{t/2(1-\sigma) < \tau < t} \int_{B_{(1+\sigma)R}} (u - a_2)_+ dx dy \right)^{1+s(\lambda+1)/K}.
\end{aligned}$$

Выбирая δ так, что $\delta b_2 < 1$, и устремляя $i \rightarrow \infty$, получим требуемую оценку. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. В условиях леммы 3.2 для любых $t \in (0, T)$ и $R \geq r$

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_R \times (t/2, t)} \leq \frac{c}{t^{Q/K}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2R}} u dx \right)^{(\lambda+1)/K}, \tag{3.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_n = R(1 + 2^{-n})$, $t_n = t/2(1 - 2^{-n})$, $k_n = k(1 - 2^{-n-1})$, $\bar{k}_n = (k_n + k_{n+1})/2$, $n \geq 0$. Тогда применяя (3.3) с $\sigma = \delta 2^{-n}$, $0 < \delta < 1/4$, $R = R_n$ и $t/2 = t_{n+1}$, $(t/2)(1 - \sigma) = t_n$, $a_1 = \bar{k}_n$, $a_2 = k_n$, получим

$$\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{R_n}} (u - \bar{k}_n)_+^{s+1} dx dy \leq ct^{-sQ/K} \left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - k_n)_+ dx dy \right)^{1+s(\lambda+1)/K}.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - k_n)_+ dx dy \\
&\leq k^{-s} 2^{n+1} \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - \bar{k}_n)_+^{s+1} dx dy \leq cb^n k^{-s} t^{-sQ/K} M_n^{1+s(\lambda+1)/K},
\end{aligned}$$

из леммы 2.1 выводим, что $M_n \rightarrow 0$, $\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_\infty} \leq k$ при $n \rightarrow \infty$, если выполняется условие

$$k^{-1} M_0^{(\lambda+1)/K} t^{-Q/K} \leq c_0. \tag{3.11}$$

Выбирая в (3.11) $k = ct^{-Q/K} (\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2R}} u dx)^{(\lambda+1)/K}$, где $c = c(c_0)$ достаточно велико, приходим к требуемой оценке. Лемма 3.3 доказана.

Определим

$$\Phi_r(t) = \sup_{0 < \tau < t} \left\{ \tau^{Q/K} \sup_{R \geq r} \frac{\|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_{2R}}}{R^{(\lambda+1)/(\lambda-1)}} \right\}.$$

Умножая обе части (3.10) на $\tau^{Q/K} R^{-(\lambda+1)/(\lambda-1)}$ и беря supremum при $R \geq r$, $0 < \tau < t$, $t < T$ получим

$$\Phi_r(t) \leq c_1 \Psi_r(t)^{(\lambda+1)/K}. \quad (3.12)$$

Обозначим $\mu_R(t) = \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_R} u(x, y, t) dx dy$. Докажем, что в условиях леммы 3.1 для всех $t \in (0, T)$ и $R \geq r$ справедливо неравенство

$$\mu_R(t) \leq \mu_{2R}(0) + cR^{-1}t^{1/K} \mu_{4R}^{1+(\lambda-1)/K}(t). \quad (3.13)$$

Действительно, умножая обе части (1.1) на гладкую срезающую функцию $\xi^{\lambda+1}(x, y)$ для шара B_{2R} такую, что $|D_L \xi| \leq c/R$, и интегрируя, получаем

$$\mu_R(t) \leq \mu_R(0) + \frac{c}{R} \iint_{B_{2R} \setminus B_R \times (0, t)} \xi^\lambda |Du|^\lambda dx d\tau = I_1 + \frac{c}{R} I_2. \quad (3.14)$$

В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left(\iint_{B_{2R} \times (0, t)} \xi^{\lambda+1} \tau^\beta u^{-1/\lambda} |Du|^{\lambda+1} dx dy d\tau \right)^{\lambda/(\lambda+1)} \\ &\quad \times \left(\iint_{B_{2R} \times (0, t)} \tau^{-\beta\lambda} u dx dy d\tau \right)^{1/(\lambda+1)} \\ &= I_3^{\lambda/(\lambda+1)} I_4^{1/(\lambda+1)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $0 < \beta < (1/\lambda)$. Для оценки I_3 умножим обе части (1.1) на $\tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^{1-1/\lambda}$ и проинтегрируем по S_T . Применив неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c \iint_{B_{2R} \times (0, t)} \tau^{\beta-1} u^{2-1/\lambda} \xi^{\lambda+1} dx dy d\tau + \frac{c}{R^{\lambda+1}} \iint_{B_{2R} \times (0, t)} u^{1+\lambda-1/\lambda} \tau^\beta dx dy d\tau \\ &= cI_5 + cI_6. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В силу (3.10) и условия (3.2)

$$I_6 \leq I_5, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} I_5 &\leq c \int_0^t \tau^{\beta-1} \|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_{2R}}^{1-1/\lambda} \left(\int_{B_{2R}} u dx dy \right) d\tau \\ &\leq ct^{\beta-Q(\lambda-1)/(\lambda K)} \mu_{4R}^{1+(\lambda-1)(\lambda+1)/(\lambda K)}(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким образом, объединяя (3.14)–(3.18), приходим к неравенству (3.13). Умножая обе части (3.13) на $R^{-K/(\lambda-1)}$, беря supremum по $R \geq r$ и учитывая (3.2), приходим к неравенству

$$\Psi_r(t) \leq c_1 \Psi_r(0) + c_2 \varepsilon_1^{(\lambda-1)/K} \Psi_r(t).$$

Выбирая $\varepsilon_1 = (2c_2)^{-(\lambda-1)/K}$, получим

$$\Psi_r(t) \leq 2c_1 \Psi_r(0). \quad (3.19)$$

Определим теперь $T_r = \varepsilon_1^{\lambda-1}/(2c_1 \Psi_r(0))^{\lambda-1}$. Тогда для всех $t \in (0, T_r)$ (3.2) имеет место. Действительно, предположим, что T_1 – supremum всех t таких, что (3.2) справедливо. В таком случае из (3.19)

$$\varepsilon_1 = T_1^{1/(\lambda-1)} \Psi_r(T_1) \leq 2c_1 T_1^{1/(\lambda-1)} \Psi_r(0).$$

Значит, $T_1 \geq T_r$. Таким образом, (3.2) верно для всех $t \in (0, T_r)$. Более того, (3.12) справедливо для всех $t \in (0, T_r)$. Последнее, очевидно, влечет за собой требуемую оценку (1.5). Продолжим доказательство теоремы 1.1. Докажем прежде всего существование решения задачи (1.1), (1.2) в S_∞ для $u_{0j} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M})$ при каждом фиксированном j . Выберем n достаточно большим так, что $\text{supp } u_{0j} \subset B_n(0)$, и рассмотрим последовательность $u_{nj}(x, y, t)$ – решений задач Коши–Дирихле в $S_{T,n} = B_n \times (0, T)$:

$$\frac{\partial u_{nj}}{\partial t} = \text{div}_L(|D_L u_{nj}|^{\lambda-1} D_L u_{nj}), \quad (x, y, t) \in S_{T,n}, \quad (3.20)$$

$$u_{nj}(x, y, t)|_{\partial B_n \times (0, T)} = 0, \quad (3.21)$$

$$u_{nj}(x, y, 0) = u_{0j}(x, y), \quad (x, y) \in B_n. \quad (3.22)$$

Существование и единственность решения задачи (3.20)–(3.22) при каждом фиксированном j и n из класса $L_{\lambda+1}(0, T, \mathring{\mathfrak{L}}_{1, \lambda+1, \text{loc}}(B_n)) \cap C([0, T], L_{2, \text{loc}}(B_n))$ для любого $T > 0$ легко устанавливается методами монотонности и компактности книги [14; гл. 1, § 5 и гл. 2 § 1.4]. Более того, в силу принципа максимума

$$\|u_{nj}(\cdot, t)\|_{\infty, B_n} \leq \|u_{0j}\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}}. \quad (3.23)$$

Имеем также

$$\sup_{0 < \tau < T_r} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_{nj}^2 dx dy + \iint_{S_{T_r}} |D_L u_{nj}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_{0j}^2 dx dy. \quad (3.24)$$

Оценка (3.24) и лемма о компактности Лионса [14; гл. 1, § 5, гл. 2 § 1.4] при любых фиксированных j позволяют перейти в соответствующем интегральном тождестве для u_{nj} к пределу при $n \rightarrow \infty$ по подпоследовательности $u_{n_k j}$ и получить решения $u_j(x, y, t)$ задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= L_{\lambda, \alpha}[u_j] = \text{div}_L(|D_L u_j|^{\lambda-1} D_L u_j), & (x, y, t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T), \\ u_j(x, y, 0) &= u_{0j}(x, y), & x \in \mathbb{R}^N, \quad y \in \mathbb{R}^M, \\ u_{0j}(x, y) &\geq 0 \quad \text{п.в.} & x \in \mathbb{R}^N, \quad y \in \mathbb{R}^M, \end{aligned}$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\iint_{B_R \times (t, T)} u_j \eta_\tau dx dy d\tau + \iint_{B_R \times (t, T)} (|D_L u_j|^{\lambda-1} D_L u_j) D_L \eta dx dy d\tau = 0 \quad (3.25)$$

для любых $t > 0$, $R > 0$ и произвольной функции η из класса $L_{\lambda+1}((t, T), \mathring{\mathfrak{L}}_{1, \lambda+1}(B_R))$, удовлетворяющей условию $\eta(x, y, t) = \eta(x, y, T) = 0$, такой, что $\eta_t \in L_2((t, T), L_2(B_R))$. В этом рассуждении существенную роль играет компактность вложения $\mathfrak{L}_{1, \lambda+1}(B_n)$ в $L_2(B_n)$ (см. например, [6]). Заметим, что (3.23) и (3.24) сохраняются также для $u_j(x, y, t)$ и, следовательно, для последовательности $\{u_j(x, y, t)\}$ функция $\Psi_r(t)$ в лемме 3.1 определена корректно. Пусть теперь u_0 – произвольная, неотрицательная, локально суммируемая функция и выполнено (1.3). Рассмотрим последовательность

$u_{0j}(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M})$ (u_{0j} продолжена нулем вне $\text{supp } u_{0j}$), причем такую, что u_{0j} сходятся к u_0 в $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+M})$ и

$$\|u_{0j}\|_r \leq \|u_0\|_r. \quad (3.26)$$

Тогда сразу для всех u_j верны неравенства (1.4) и (1.5). Легко можно доказать, что для любого B_R

$$\begin{aligned} & \sup_{t < \tau < T_r} \int_{B_R} u_j(\cdot, T)^2 dx dy + \iint_{B_R \times (t, T_r)} |D_L u_j|^{\lambda+1} dx dy d\tau \\ & \leq \frac{c}{t} \int_{B_{2R}} u_j^2 dx dy + \frac{c}{R^{\lambda+1}} \int_{B_{2R}} u_j^{\lambda+1} dx dy \equiv J. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Воспользовавшись оценками (1.4) и (1.5), имеем

$$J \leq \frac{c}{t} T_r R^Q \|u_j\|_{\infty, B_{2R}}^2 + c T_r R^{Q-\lambda-1} \|u_j\|_{\infty, B_{2R}}^{\lambda+1} \leq c(t, T_r, R, \|u_0\|_r). \quad (3.28)$$

Из (3.27), (3.28) и леммы о компактности Лионса в интегральном тождестве (3.25) переходим к пределу при $j \rightarrow \infty$. Получим предельную функцию $u(x, y, t)$, являющуюся обобщенным решением уравнения (1.1). Устремляем j к бесконечности в неравенствах теоремы 1.1, откуда находим, что все указанные оценки справедливы для $u(x, y, t)$. Умножим (1.1) на $\zeta(x, y)$ – срезающую функцию для шара B_{2R} , $|D_L \zeta| \leq c/R$. Применим оценки (3.13), (3.14), (3.19). В результате получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_R} u(x, y, t) \zeta dx dy - \int_{B_R} u_0 \zeta dx dy \right| \\ & \leq \left| \iint_{B_{2R} \times (0, t)} (|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) D_L \zeta dx dy d\tau \right| \\ & \leq \frac{c}{R} \iint_{B_{2R} \times (0, t)} |D_L u|^\lambda dx dy d\tau \leq c t^{1/K} R^{K/(\lambda-1)} \|u_0\|_{4R}^{1+(\lambda-1)/K}. \end{aligned}$$

Поскольку R – фиксированное число, $|\int_{B_R} u(x, y, t) dx dy - \int_{B_R} u_0 dx dy| \leq c t^{1/K}$. Последнее означает, что u удовлетворяет (1.2). Теорема 1.1 доказана.

4. Финитность носителя. Доказательство. Рассмотрим последовательности $R_n = R + \delta 2^{-n} R$, $\bar{R}_n = 1/2(R - \delta 2^{-n} R)$, $R > 4R_0$, $0 < \delta < 1/2$, $n = 0, 1, \dots$. Пусть $\xi_n(x, y)$ – последовательность гладких срезающих функций таких, что $\xi_n = 1$ при $(x, y) \in B_{R_n} \setminus \bar{B}_{R_n}$, $\xi_n = 0$ вне $B_{R_n} \setminus \bar{B}_{R_n}$, $|D_L \xi| \leq c 2^n / \delta R$. Отметим, что $R_{n-1} \geq R_n \geq R$, $\bar{R}_{n-1} \leq \bar{R}_n \leq R/2$. Кроме того, $\text{supp } \xi_n \cap \text{supp } u_0 = \emptyset$. Пусть $0 < \theta < 1$ произвольное малое число, которое ниже будет выбрано подходящим образом. Умножим обе части уравнения (1.1) на $\xi_n^{\lambda+1}(x) u^\theta$ и результат проинтегрируем по S_t . Это даст

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\theta} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{1+\theta} \xi_n^{\lambda+1} dx dy + \theta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} \xi_n^{\lambda+1} dx dy d\tau \\ & = -(\lambda+1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N+M}} \xi_n^\lambda u^\theta |D_L u|^{\lambda-1} D_L u D_L \xi_n dx dy d\tau. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Далее при интегрировании по всему $\mathbb{R}^{N+M}$ будем опускать символ $\mathbb{R}^{N+M}$. Правая часть благодаря неравенству Юнга оценится через

$$\lambda h^{\lambda+1} \int_0^t \int \xi_n^{\lambda+1} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dx dy d\tau + h^{-(\lambda+1)/\lambda} \int_0^t \int |D_L \xi_n|^{\lambda+1} u^{\theta+\lambda} dx dy d\tau,$$

где $h > 0$ – произвольное число. Выбирая $h = (\theta/2\lambda)^{1/(\lambda+1)}$, из (4.1) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \tau < 1} \int u^{\theta+1}(\cdot, t) \xi_n^{\lambda+1} dx dy + \int_0^t \int u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} \xi_n^{\lambda+1} dx dy d\tau \\ & \leq c \int_0^t \int u^{\theta+\lambda} |D_L \xi_n|^{\lambda+1} dx dy d\tau. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем финитную в $\mathbb{R}^{N+M}$ функцию $v_n = u^{(\lambda+\theta)/(\lambda+1)} \xi_n^s$, $s > (\lambda + \theta)/(1 + \theta)$. Учитывая поведение носителей ξ_n , $n = 0, 1, \dots$, из (4.2) легко выводим

$$I_n \equiv \sup_{0 < \tau < t} \int v_n^\beta dx dy + \int_0^t \int |D_L v_n|^{\lambda+1} dx dy d\tau \leq c \frac{2^{n(\lambda+1)}}{(\delta R)^{\lambda+1}} \int_0^t \int v_{n-1}^{\lambda+1} dx dy d\tau, \quad (4.3)$$

где $\beta = (1 + \theta)(\lambda + 1)/(\lambda + \theta)$. Воспользуемся теперь леммой 2.1 при $q = \lambda + 1$ и $r = \beta$. Это дает

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int v_{n-1}^{\lambda+1} dx dy d\tau \\ & \leq c \left(\int_0^t \int |D_L v_{n-1}|^{\lambda+1} dx dy d\tau \right)^a t^{1-a} \left(\sup_{0 < \tau < 1} \int v_{n-1}^\beta dx dy \right)^{(1-a)(\lambda+1)/\beta}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $a = Q(\lambda + 1 - \beta)/(Q(\lambda + 1 - \beta) + (\lambda + 1)\beta) = Q(\lambda - 1)/(Q(\lambda - 1) + (1 + \theta)(\lambda + 1))$. Таким образом, из (4.3) и (4.4) выводим

$$I_n \leq c \frac{2^{n(\lambda+1)}}{(\delta R)^{\lambda+1}} t^{1-a} I_{n-1}^{1+(1-a)((\lambda+1)/\beta-1)}. \quad (4.5)$$

Отсюда в силу леммы 2.1 заключаем, что $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если

$$\frac{t^{1-a} I_0^{(1-a)((\lambda+1)/\beta-1)}}{(\delta R)^{\lambda+1}} \leq c_0, \quad (4.6)$$

где c_0 – достаточно малая положительная постоянная, зависящая лишь от параметров задачи M, N, n, λ . Неравенство (4.6) удовлетворяется благодаря специальному выбору R следующим образом. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} I_0 & \equiv \sup_{0 < \tau < 1} \int_{R/2 < d(x,y) < 4R} u^{1+\theta} dx dy + \int_0^t \int_{R/2 < d(x,y) < 4R} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1} dx dy d\tau \\ & \leq \frac{c}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{R/2 < d(x,y) < 4R} u^{\theta+\lambda} dx dy d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим теперь правую часть и, тем самым, I_0 , воспользовавшись оценкой (1.5) теоремы 1.1. Имеем

$$\begin{aligned} I_0 &\leq \frac{c}{R^{\lambda+1}} \int_0^t (\|u_0\|_1^{(\lambda+1)/K} t^{-Q/K})^{\lambda+\theta} d\tau \|u_0\|_1 \\ &= \frac{c}{R^{\lambda+1}} \|u_0\|_1^{(\lambda+1)(\lambda+\theta-1)/K+1} t^{1-Q(\lambda+\theta-1)/K}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь отметим, что $1 - Q(\lambda + \theta - 1)/K = (\lambda + 1 - Q\theta)/K > 0$, если $\theta < (\lambda + 1)/Q$. Если подставить теперь (4.8) в (4.7) и усилить, тем самым, (4.6), то после несложных выкладок получим, что (4.6) выполнено, если

$$\frac{t}{R^K} \|u_0\|_1^{\lambda-1} \leq c^*(M, N, \lambda, m).$$

Это значит, что $u = 0$ п.в. вне шара радиуса $R = 4R_0 + ct^{1/K} \|u_0\|_1^{(\lambda-1)/K}$. Итак, первое утверждение теоремы 1.2 доказано. Докажем оценку снизу. Для этого заметим, что если $u(x, y, t)$ обладает свойством компактности носителя, то имеет место закон сохранения массы. То есть для п.в. $t > 0$

$$\int u_0 dx dy = \int u(\cdot, t) dx dy. \quad (4.9)$$

Действительно, зафиксируем $t > 0$; тогда $\text{supp } u(\cdot, t) \subset B_{\bar{R}(t)}$, $\bar{R}(t) = 2R_0 + ct^{1/K} \times \|u_0\|_1^{(\lambda-1)/K}$. Выберем срезающую функцию $\eta_R(x, y)$, равную 1 при $d(x, y) < R$ и $\eta_R(x, y) = 0$ при $d(x, y) > 2R$. Пусть $R > \bar{R}(t)$; тогда умножая обе части (1.1) на η_R и интегрируя по частям, получим

$$\int u_0 \eta_R dx dy = \int u(\cdot, t) \eta_R dx dy = - \int_0^t \int D_L \eta_R D_L u |D_L u|^{\lambda-1} dx d\tau.$$

Поскольку правая часть этого равенства равна нулю, мы приходим к (4.9). Далее, пользуясь оценкой (1.5) теоремы 1.1, из (4.9) имеем

$$\int u_0 dx dy \leq c \|u(\cdot, t)\|_\infty Z(t)^Q \leq c \|u_0\|_1^{(\lambda+1)/K} t^{-Q/K} Z(t)^Q$$

и, следовательно, при достаточно больших t оценка снизу $Z(t)$ (1.7) установлена. Кроме того, при достаточно больших t

$$\begin{aligned} \|u_0\|_1 &= \int u_0 dx dy = \int_{B_{Z(t)}} u(x, y, t) dx dy \\ &\leq c \|u(x, y, t)\|_\infty Z(t)^Q \leq c \|u(x, y, t)\|_\infty t^{Q/K} \|u_0\|_1^{(\lambda-1)Q/K}, \end{aligned}$$

откуда окончательно имеем

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^{N+M}} \geq ct^{-Q/K} \|u_0\|_1^{(\lambda+1)/K}. \quad (4.10)$$

Теорема 1.2 доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42**:2 (1987), 135–176.
- [2] В. В. Грушин, “Об одном классе гипоеллиптических операторов”, *Матем. сб.*, **83**:3 (1970), 456–473.
- [3] M. S. Baouendi, “Sur une classe d’opérateurs elliptiques dégénérés”, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 45–87.
- [4] B. Franchi, E. Lanconelli, “Une métrique associée à une classe d’opérateurs elliptiques dégénérés”, *Conference on Linear Partial and Pseudodifferential Operators* (Torino, 1982), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **1983**, Special Issue, Univ. Politec. Torino, Torino, 1984, 105–114.
- [5] B. Franchi, E. Lanconelli, “Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **10**:4 (1983), 523–541.
- [6] N. Garofalo, D.-M. Nhieu, “Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:10 (1996), 1081–1144.
- [7] E. Di Benedetto, M. A. Herrero, “On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**:1 (1989), 187–224.
- [8] С. Н. Антонцев, “О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **260**:6 (1981), 1289–1293.
- [9] J. I. Díaz, L. Véron, “Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **290**:2 (1985), 787–814.
- [10] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations”, *Adv. Differential Equations*, **10**:1 (2005), 89–120.
- [11] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity”, *Adv. Differential Equations*, **5**:7–9 (2000), 833–860.
- [12] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Finite speed of propagation for thin-film equations and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity”, *Interfaces Free Bound.*, **3**:3 (2001), 233–264.
- [13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Физматлит, М., 1967.
- [14] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

В. А. Маркашева

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины

Поступило

16.03.2007

А. Ф. Тедеев

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины

E-mail: tedeev@iamm.ac.donetsk.ua