Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мироненко, Приближение классом функций с ограниченной второй производной, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 583–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:55:58

УДК 517.518

Приближение классом функций с ограниченной второй производной

А. В. Мироненко

Рассматривается задача равномерного приближения непрерывной функции на отрезке классом функций с ограниченной второй производной. Доказывается оценка величины наилучшего приближения функции этим классом через ее второй модуль непрерывности. Данная оценка является точной на классе непрерывных функций.

Библиография: 5 названий.

Пусть $C[a, b]$ – это пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, норму этого пространства мы будем обозначать $\| \cdot \| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Пусть множество точек $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ содержится в отрезке $[a, b]$, определим норму на классе функций, заданных на этом множестве

$$\|f\|_{C\{x_1, x_2, \dots, x_k\}} = \max_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}} |f(x)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f – произвольная непрерывная функция, *величиной наилучшего приближения* (ВНП) этой функции классом функций Q называется величина

$$E(f; Q) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|.$$

Любая функция $g_* \in Q$, удовлетворяющая условию $\|f - g_*\| = E(f; Q)$, называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для функции f в классе функций Q .

Пусть $AC^n[a, b]$ – это класс функций из $C[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка n . Через $\mathcal{Q}^n$ обозначим следующий класс функций:

$$\mathcal{Q}^n = \{g \in AC^{n-1}[a, b] : |g^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ всюду, где } g^{(n)} \text{ существует}\}.$$

В силу замкнутости и локальной компактности класса $\mathcal{Q}^n$ для любой непрерывной функции f хотя бы один ЭНП в этом классе всегда существует, но не всегда он единственен. Критерий ЭНП в классе $\mathcal{Q}^n$ можно найти в работе [1].

Кроме приближения на всем отрезке $[a, b]$ мы рассмотрим также приближение функции на конечных подмножествах этого отрезка. Обозначим ВНП функции f на множестве точек $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ из отрезка $[a, b]$ классом функций Q через

$$E(f; Q; x_1, x_2, \dots, x_k) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|_{\{x_1, x_2, \dots, x_k\}}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00325) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-1071.2008.1).

© А. В. Мироненко, 2008

Обозначим ВНП функции f классом функций Q по всем k -точечным подмножествам отрезка $[a, b]$ через

$$E_k(f; Q) = \sup_{a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b} E(f; Q; x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Рассмотрим также ВНП функции f классом функций Q по всем равномерным k -точечным сеткам на отрезке $[a, b]$:

$$U_k(f; Q) = \sup_{a \leq x < \dots < x+h(k-1) \leq b} E(f; Q; x, x+h, \dots, x+h(k-1)).$$

Через $\Delta_h^m(f, x)$ обозначим конечную разность функции f порядка m в точке x с шагом h :

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k f(x + (m-k)h).$$

Через $\omega_m(f, h)$ обозначим классический модуль непрерывности порядка m функции f :

$$\omega_m(f, h) = \sup_{\substack{\delta \in [0, h] \\ x \in [a, b-m\delta]}} |\Delta_\delta^m(f, x)|.$$

В работе [2] была установлена следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^2$. Тогда имеют место следующие неравенства:

- 1) $\frac{1}{2} E(f; \mathcal{D}^2) < E_3(f; \mathcal{D}^2) \leq E(f; \mathcal{D}^2);$
- 2) $\frac{1}{2} E_3(f; \mathcal{D}^2) \leq U_3(f; \mathcal{D}^2) \leq E_3(f; \mathcal{D}^2).$

В работе [3] показано, что в каждом из неравенств теоремы 1 константа $1/2$ не может быть увеличена, но для данной статьи это уточнение не существенно. Видно, что из теоремы 1 следует сквозное неравенство

$$\frac{1}{4} E(f; \mathcal{D}^2) < U_3(f; \mathcal{D}^2),$$

но точность константы $1/4$, вообще говоря, не следует. В данной работе эта точность будет показана, т.е. будет доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^2$. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{1}{4} E(f; \mathcal{D}^2) < U_3(f; \mathcal{D}^2) \leq E(f; \mathcal{D}^2),$$

и константа $1/4$ в этом неравенстве не может быть увеличена одновременно для всех функций f .

В работе [2] также было установлено равенство

$$U_3(f; \mathcal{D}^2) = \frac{1}{4} \sup_{h \in [0, (b-a)/2]} [\omega_2(f, h) - h^2].$$

Объединив это равенство и теорему 2, мы получим основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^2$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$E(f; \mathcal{D}^2) < 1 \cdot \sup_{h \in [0, (b-a)/2]} [\omega_2(f, h) - h^2].$$

Константа 1 в этом неравенстве не может быть уменьшена одновременно для всех функций f .

Отметим, что теорема 3 является в некотором смысле аналогом следующей теоремы Корнейчука для липшицевых функций.

ТЕОРЕМА 4 (Н. П. Корнейчук). Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^1$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$E(f; \mathcal{D}^1) = \frac{1}{2} \cdot \sup_{h \in [0, b-a]} [\omega_1(f, h) - h].$$

Эта теорема может быть найдена, например, в [4; с. 260]:

Можно показать, что не существует аналогичного теоремам 3 и 4 неравенства в случае класса $\mathcal{D}^3$ и третьего модуля непрерывности, но доказательство этого утверждения выходит за рамки данной статьи.

Перейдем к доказательству теоремы 2; для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Через $f[x_0, \dots, x_n]$ мы будем обозначать разделенную разность порядка n от функции f , построенную по точкам $x_0, \dots, x_n$:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \left[\prod_{k=0; k \neq i}^n (x_i - x_k) \right]^{-1}.$$

Известно, что

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция f задана на наборе точек $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, взятом на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что функция f не лежит в классе функций Q на этом наборе точек, если в классе Q нет функций, одновременно интерполирующих значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$. Это условие будет обозначаться следующим образом: $f \notin Q(x_0, x_1, \dots, x_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q через

$$A(f; Q) = \{g \in Q : \|f - g\| = E(f; Q)\}.$$

В случае, когда функция f задана на наборе точек $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q на данном наборе точек через

$$A(f; Q; x_0, \dots, x_k) = \{g \in Q : \|f - g\|_{\{x_0, \dots, x_k\}} = E(f; Q; x_0, \dots, x_k)\}.$$

Приведем без доказательства две леммы, обе они доказаны в работе [2].

ЛЕММА 1. Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, на котором задана функция f . Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если $|n!f[x_0, \dots, x_n]| \leq 1$, то $E(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_k) = 0$;
 б) если $|n!f[x_0, \dots, x_n]| > 1$, то $E(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_k) > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, на котором задана функция f . Пусть функция $f \notin \mathcal{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$, а число $\alpha = \text{sign } f[x_0, \dots, x_n]$. Тогда:

- 1) множество $A(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_n)$ содержит ровно один элемент g_* ;
 2) на отрезке $[x_0, x_n]$ выполняется тождество $g_*^{(n)} \equiv \alpha$;
 3) при $i \in \{0, \dots, n\}$ выполняются равенства

$$(f - g_*)(x_i) = \alpha(-1)^{n+i} E(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_n).$$

Через P^n обозначим класс полиномов степени не выше n .

ЛЕММА 3. Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, на котором задана функция f . Пусть $f \notin \mathcal{D}^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и $\text{sign } f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \alpha$. Тогда для полинома

$$p = \frac{\alpha}{n!} x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

имеет место равенство

$$E(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_n) = E((f - p); P^{n-1}; x_0, x_1, \dots, x_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что

$$E(f; \mathcal{D}^n; x_0, \dots, x_n) = \inf_{\{a_i\}_{i=0}^{n-1}} \|f - p\|, \quad \text{где } p = \frac{\alpha x^n}{n!} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что предыдущие три леммы являются аналогами соответствующих утверждений из теории чебышевских интерполяций Ремеза (см., например, [5; гл. 2]), но здесь рассматривается приближение полиномами с ограниченной старшей производной и на меньшем числе точек.

В случае $n = 2$ и равномерного расположения точек величина $E(g; P^1; x_0, x_1, x_2)$ может быть выписана явно:

$$E(g; P^1; x - t, x, x + t) = \left| \frac{t^2}{2} g[x - t, x, x + t] \right| = \left| \frac{\delta_t^2(f, x)}{4} \right|. \quad (2)$$

Это равенство вместе с леммами 1 и 3 дает следующую формулу:

$$E(f; \mathcal{D}^2; x - t, x, x + t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |f[x - t, x, x + t]| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{t^2}{2} \left(|f[x - t, x, x + t]| - \frac{1}{2} \right) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

ЛЕММА 4. Пусть даны три точки $a < b < c$ и функция $f \in C[a, c]$. Пусть на отрезке $[a, b]$ функция f равна нулю, а на отрезке $[b, c]$ совпадает со строго монотонно убывающей функцией вида $Ax^2 + Bx + C$, причем $A > 0$. Тогда для любых точек x_1, x_2, x_3 таких, что $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq c$, выполняется неравенство

$$f[x_1, x_2, x_3] \leq A.$$

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пример функции f , удовлетворяющей условиям теоремы, показан на рис. 1. Возьмем произвольный набор точек x_1, x_2, x_3 . Обозначим $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$.

Если $x_1 \geq b$, то такой набор точек целиком лежит на отрезке $[b, c]$, и тогда $f[x_1, x_2, x_3] \equiv A$.

Покажем, что для всех других наборов точек x_1, x_2, x_3 справедливо неравенство $f[x_1, x_2, x_3] < A$. Поскольку в этих наборах $x_1 < b$, то $f_1 = 0$. Рассмотрим два случая: $x_2 > b$ и $x_2 \leq b$.

В случае $x_2 > b$ справедливо неравенство $f[x_1, x_2, x_3] < f[b, x_2, x_3] = A$. В самом деле,

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{(x_3 - x_2)} \left[\frac{-f_2}{(x_2 - x_1)} + \frac{f_3}{(x_3 - x_1)} \right] = \frac{x_1(f_2 - f_3) + x_2f_3 - x_3f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}.$$

В силу монотонности $f_2 - f_3 > 0$ тогда $x_1(f_2 - f_3) \leq b(f_2 - f_3)$, значит,

$$f[x_1, x_2, x_3] \leq \frac{b(f_2 - f_3) + x_2f_3 - x_3f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}.$$

Мы знаем, что

$$f[b, x_2, x_3] = \frac{b(f_2 - f_3) + x_2f_3 - x_3f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - b)(x_2 - b)} = A > 0,$$

откуда $b(f_2 - f_3) + f_3x_2 - f_2x_3 > 0$. Таким образом, мы имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3] &\leq \frac{b(f_2 - f_3) + x_2f_3 - x_3f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} \\ &< \frac{b(f_2 - f_3) + x_2f_3 - x_3f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - b)(x_2 - b)} = f[b, x_2, x_3] = A. \end{aligned}$$

В случае же $x_2 \leq b$ справедливо равенство $f_1 = f_2 = 0$ и поэтому

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \leq 0 < A.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольный набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ из отрезка $[a, b]$ назовем (чебышёвским) *альтернансом* функции $h \in C[a, b]$, если выполняется равенство

$$h(x_i) = \sigma(-1)^{i+1} \|h\|,$$

где $\sigma = \text{sign } h(x_1)$.

Рис. 2

Также нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^2$. Для того чтобы выполнялось включение $g_* \in A(f; \mathcal{D}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) на отрезке $[a, b]$ нашлись точки $t_0 < t_1 < \dots < t_s, s > 0$;
- 2) на отрезке $[t_0, t_s]$ нашелся альтернанс функции $f - g_*$ из $s+2$ точек $\{x_j\}_{j=1}^{s+2}$, причем $x_1 \in [t_0, t_1)$, $x_{s+2} \in (t_{s-1}, t_s]$, а также $x_i \in (t_{i-2}, t_{i-1})$ при $i \in \{2, \dots, s+1\}$;
- 3) при $i \in \{0, \dots, s-1\}$ выполнялись тождества

$$g_*''|_{(t_i, t_{i+1})} \equiv (-1)^i \text{sign}((f - g_*)(x_1)).$$

Эта теорема была доказана в работе [1]. Видно, что на отрезке $[t_0, t_s]$ функция g_* является идеальным сплайном второго порядка. Альтернанс, удовлетворяющий всем условиям теоремы 5, называют *жестким звеном*.

На рис. 2 изображен пример функции g_* , удовлетворяющей теореме 5 при $s = 3$, а также показаны значения приближаемой функции f в точках жесткого звена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку сами указанные в теореме 2 неравенства являются тривиальным следствием теоремы 1, нам осталось доказать лишь точность константы $1/4$. Для этого мы введем малый параметр ε и построим такое семейство непрерывных функций $\{f_\varepsilon\}$, что

$$\frac{U_3(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2)}{E(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем опускать обозначение приближающего класса $\mathcal{D}^2$, для этого обозначим $E(f_\varepsilon) = E(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2)$ и $U_3(f_\varepsilon) = U_3(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2)$.

Построим требуемое семейство функций $\{f_\varepsilon\}$. Возьмем в качестве отрезка $[a, b]$ отрезок $[-1, 1]$. Построим сначала функцию g в виде идеального сплайна второго

Рис. 3

порядка с единственным узлом в точке 0:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x(x+1) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \frac{1}{2}x(x-1) & \text{при } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Видно, что

$$g^{(2)}(x)|_{(-1,0)} \equiv -1, \quad g^{(2)}(x)|_{(0,1)} \equiv 1.$$

Пусть параметр $0 < \varepsilon < 1/100$. Введем также параметр

$$M = \frac{1 + 2\sqrt{\varepsilon}}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Видно, что при $\varepsilon \in (0, 1/100)$ параметр $M \in (1, 3/2)$ и $M \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определим непрерывную функцию h_ε так:

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}(x+1) - \varepsilon & \text{при } x \in [-1, -2\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{1}{4}Mx^2 + \frac{2\varepsilon}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}x & \text{при } x \in [-2\sqrt{\varepsilon}, 0), \\ -\frac{1}{4}Mx^2 + \frac{2\varepsilon}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}x & \text{при } x \in [0, 2\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{2\varepsilon}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}(x-1) + \varepsilon & \text{при } x \in [2\sqrt{\varepsilon}, 1]. \end{cases}$$

Графики функций g и h_ε схематично показаны на рис. 3. По построению функция h_ε касается в точке 0 прямой, параллельной ее левому и правому звену.

Определим приближаемую функцию f_ε следующим образом: $f_\varepsilon = g + h_\varepsilon$. По теореме 5 при любом рассматриваемом параметре ε класс $A(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2)$ будет состоять из одной функции g и выполнится равенство $E(f_\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, для доказательства утверждения (4) нам достаточно показать, что

$$\frac{U_3(f_\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Рис. 4

Определим две вспомогательные функции: φ и $\bar{\varphi}$. Функция φ получается из функции f_ε путем вычитания полиномов, совпадающих с функциями g и h_ε на отрезке $[-1, -2\sqrt{\varepsilon}]$:

$$\varphi = f_\varepsilon - \left[-\frac{1}{2}x(x+1) \right] - \left[\frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}(x+1) - \varepsilon \right].$$

В явном виде функция φ задается следующими формулами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-1, -2\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{1}{4}Mx^2 - \varepsilon M & \text{при } x \in [-2\sqrt{\varepsilon}, 0), \\ \left[1 - \frac{1}{4}M\right]x^2 - \varepsilon M & \text{при } x \in [0, 2\sqrt{\varepsilon}), \\ x^2 - 2\varepsilon M & \text{при } x \in [2\sqrt{\varepsilon}, 1]. \end{cases}$$

График функции φ изображен на рис. 4. Она непрерывна на всем отрезке $[-1, 1]$. Функцию $\bar{\varphi}$ определим следующим образом:

$$\bar{\varphi}(x) = -\varphi(-x). \quad (6)$$

В явном виде функция $\bar{\varphi}$ задается следующими формулами:

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} -x^2 + 2\varepsilon M & \text{при } x \in [-1, -2\sqrt{\varepsilon}), \\ -\left[1 - \frac{1}{4}M\right]x^2 + \varepsilon M & \text{при } x \in [-2\sqrt{\varepsilon}, 0), \\ -\frac{1}{4}Mx^2 + \varepsilon M & \text{при } x \in [0, 2\sqrt{\varepsilon}), \\ 0 & \text{при } x \in [2\sqrt{\varepsilon}, 1]. \end{cases}$$

Исследуем некоторые свойства этих двух функций. Установим, что на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$ функция $\bar{\varphi}$ строго выпукла вверх. Для этого достаточно показать, что на этом отрезке производная $\bar{\varphi}'$ строго убывает. Отдельно рассмотрим функцию $\bar{\varphi}'$ на промежутках $[-1, -2\sqrt{\varepsilon})$, $(-2\sqrt{\varepsilon}, 0)$ и $(0, 2\sqrt{\varepsilon})$ и в двух точках ($x = -2\sqrt{\varepsilon}$ и $x = 0$)

между ними:

$$\bar{\varphi}' = \begin{cases} -2x & \text{на } [-1, -2\sqrt{\varepsilon}), \\ -\left[2 - \frac{M}{2}\right]x & \text{на } (-2\sqrt{\varepsilon}, 0), \\ -\frac{M}{2}x & \text{на } (0, 2\sqrt{\varepsilon}]. \end{cases}$$

Таким образом, на всех трех промежутках производная $\bar{\varphi}'$ строго монотонно убывает.

В точке $x = -2\sqrt{\varepsilon}$ выполняется неравенство между односторонними производными

$$\bar{\varphi}'(-2\sqrt{\varepsilon} - 0) = 4\sqrt{\varepsilon} > [4 - M] \cdot \sqrt{\varepsilon} = \bar{\varphi}'(-2\sqrt{\varepsilon} + 0).$$

В точке $x = 0$ выполняется равенство $\bar{\varphi}'(0 - 0) = 0 = \bar{\varphi}'(0 + 0)$.

Мы показали, что на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$ функция $\bar{\varphi}'$ строго монотонно убывает, имея монотонный разрыв в точке $-2\sqrt{\varepsilon}$. Это означает, что на всем отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$ функция $\bar{\varphi}$ строго выпукла вверх. Из этого факта и равенства (6) следует, что функция φ строго выпукла на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon}, 1]$.

Докажем теперь условие (5). По определению

$$U_3(f_\varepsilon) = \sup_{-1 \leq x-t < x+t \leq 1} E(f_\varepsilon; \mathcal{D}^2; x-t, x, x+t).$$

Рассмотрим произвольный набор точек вида $x-t, x, x+t$ из отрезка $[-1, 1]$. Благодаря нечетности функции f_ε , мы без ограничения общности можем считать, что в этом наборе

$$x-t < x \leq 0. \quad (7)$$

Покажем, что неравенство (7) влечет неравенство

$$f_\varepsilon[x-t, x, x+t] \leq \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Для доказательства неравенства (8) нам понадобится рассмотреть два возможных случая: $x+t \leq 0$ и $x+t > 0$.

Случай $x+t \leq 0$. В этом случае мы воспользуемся функцией φ . Доказываемое неравенство (8) эквивалентно неравенству $\varphi[x-t, x, x+t] \leq 1$. Функция φ удовлетворяет условиям леммы 4 на отрезке $[-1, 0]$, откуда $\varphi[x-t, x, x+t] \leq M/4 < 1$. Таким образом, в случае $x+t \leq 0$ неравенство (8) выполняется.

Случай $x+t > 0$. Обозначим $x_1 = x-t$, $x_2 = x$ и $x_3 = x+t$. В этом случае мы используем функцию $\bar{\varphi}$. Неравенство (8) эквивалентно условию $\bar{\varphi}[x_1, x_2, x_3] \leq 0$. Функция $\bar{\varphi}$ строго выпукла вверх на участке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$, значит, на этом участке $\bar{\varphi}[x_1, x_2, x_3] < 0$.

Нам осталось рассмотреть те наборы точек, в которых $x_3 > 2\sqrt{\varepsilon}$. По условию (7) $x_2 \leq 0$. Пример такого расположения точек показан на рис. 5.

Поскольку точки x_1 и x_2 находятся на участке строгой выпуклости вверх функции $\bar{\varphi}$, то $\bar{\varphi}[x_1, x_2] > \bar{\varphi}'(x_2 + 0)$. В силу соотношения (1) для функции $\bar{\varphi}$ для доказательства неравенства (8) осталось показать справедливость неравенства

$$\bar{\varphi}[x_2, x_3] \leq \bar{\varphi}'(x_2 + 0) \quad (9)$$

Рис. 5

Рис. 6

для любых $x_2 \leq 0$ и $x_3 > 2\sqrt{\varepsilon}$.

Рассмотрим правую касательную в точке t к функции $\bar{\varphi}$ функцию

$$F_t(x) = \bar{\varphi}(t) + \bar{\varphi}'(t+0)(x-t). \quad (10)$$

По определению функции $F_t(x)$ справедлива формула

$$F_{x_2}(x_3) = \bar{\varphi}(x_2) + \bar{\varphi}'(x_2+0) \cdot (x_3 - x_2) = F_{x_2}(0) + \bar{\varphi}'(x_2+0) \cdot x_3. \quad (11)$$

Доказываемое неравенство (9) эквивалентно неравенству $F_{x_2}(x_3) \geq \bar{\varphi}(x_3)$. Мы знаем, что $F_0(x_3) \equiv \varepsilon M > 0 = \bar{\varphi}(x_3)$. Тогда для доказательства неравенства (9) осталось показать, что $F_{x_2}(x_3) \geq F_0(x_3)$. В самом деле, по (10) и (11)

$$F_{x_2}(x_3) - F_0(x_3) = [F_{x_2}(0) - \bar{\varphi}(0)] + x_3[\bar{\varphi}'(x_2+0) - \bar{\varphi}'(0)].$$

Функция $\bar{\varphi}$ строго выпукла вверх на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$, значит, она проходит ниже своей касательной, т.е. $F_t(x) - \bar{\varphi}(x) \geq 0$ для любых точек t и x из этого отрезка, отсюда

$$F_{x_2}(0) - \bar{\varphi}(0) \geq 0.$$

Функция $\bar{\varphi}'$ строго монотонно убывает на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$ и $x_2 \leq 0$, поэтому имеет место неравенство $\bar{\varphi}'(x_2+0) - \bar{\varphi}'(0) \geq 0$.

Сведя эти два утверждения воедино, получаем, что $F_{x_2}(x_3) - F_0(x_3) \geq 0$. Таким образом, неравенство (9), а с ним и неравенство (8), имеют место, т.е. в наших предположениях $f_\varepsilon[x-t, x, x+t] \leq 1/2$.

Рис. 7

Согласно формуле (3), если справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2} \leq f_\varepsilon[x-t, x, x+t] \leq \frac{1}{2},$$

то $E(f_\varepsilon; \mathscr{D}^2; x-t, x, x+t) = 0$. Следовательно,

$$U_3(f_\varepsilon) = \sup_{\substack{x-t < x \leq 0 \\ f_\varepsilon[x-t, x, x+t] < -1/2}} E(f_\varepsilon; \mathscr{D}^2; x-t, x, x+t).$$

Неравенство $f_\varepsilon[x-t, x, x+t] < -1/2$ эквивалентно неравенству

$$\varphi[x-t, x, x+t] < 0. \quad (12)$$

Наборы точек $x-t, x, x+t$, удовлетворяющие условиям (7) и (12), далее будем называть *допустимыми*.

Исследуем некоторые свойства допустимых наборов точек. Поскольку $x \leq 0$, $\varphi(x-t) \geq \varphi(x)$ (см. рис. 7), откуда по соотношению (1) $\varphi[x-t, x] \leq 0$. Тогда из неравенства (12) мы получаем неравенство $\varphi[x, x+t] < 0$, которое означает, что $\varphi(x) > \varphi(x+t)$. Поскольку $\varphi(x) \leq 0$, во всех допустимых наборах $\varphi(x+t) < 0$. Это значит, что в любом допустимом наборе выполняется неравенство

$$-2\sqrt{\varepsilon} < x+t < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Кроме того, функция φ строго выпукла на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon}, 1]$, значит, на этом отрезке выполняется неравенство $\varphi[x-t, x, x+t] > 0$, что противоречит условию (12). Таким образом, на этом отрезке нет допустимых наборов, т.е. в любом допустимом наборе $x-t < -2\sqrt{\varepsilon}$ и

$$\varphi(x-t) = 0. \quad (13)$$

Обозначим $E(x, t) = E(f_\varepsilon; \mathscr{D}^2; x-t, x, x+t)$. В силу леммы 3, формулы (2) и неравенства (12) для всех допустимых наборов верно следующее утверждение:

$$E(x, t) = E(\varphi; P^1; x-t, x, x+t) = -\frac{\delta_t^2(f, x)}{4} = -\frac{1}{4}(\varphi(x-t) - 2\varphi(x) + \varphi(x+t)). \quad (14)$$

Мы показали, что

$$U_3(f_\varepsilon) = \sup_{\substack{x \leq 0 \\ \varphi[x-t, x, x+t] < 0}} E(x, t).$$

Покажем, что если $x > -2\sqrt{\varepsilon}$, то $E(x, t) < E(-2\sqrt{\varepsilon}, t)$, т.е. для нахождения супремума из предыдущей формулы достаточно рассматривать только наборы точек с $x \leq -2\sqrt{\varepsilon}$. Для этого достаточно установить, что на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon}, 0]$ имеет место неравенство $(d/dx)E(x, t) < 0$. По формулам (14) и (13) получаем равенство $E(x, t) = (1/4)[2\varphi(x) - \varphi(x+t)]$, откуда

$$\frac{d}{dx}E(x, t) = \frac{1}{4}[2\varphi'(x) - \varphi'(x+t)] = \frac{\varphi'(x)}{4} + \frac{1}{4}[\varphi'(x) - \varphi'(x+t)].$$

В силу строгой выпуклости функции φ при $x > -2\sqrt{\varepsilon}$ имеет место неравенство $\varphi'(x) < \varphi'(x+t)$, тогда

$$\frac{d}{dx}E(x, t) < \frac{\varphi'(x)}{4} < 0,$$

т.е. действительно $E(x, t) < E(-2\sqrt{\varepsilon}, t)$ при $x > -2\sqrt{\varepsilon}$. Поскольку $\varphi(x) = 0$ при $x \leq -2\sqrt{\varepsilon}$, получаем

$$\begin{aligned} U_3(f_\varepsilon) &= \sup_{\substack{x \leq 0 \\ \varphi[x-t, x+t] < 0}} E(x, t) = \sup_{\substack{x \leq -2\sqrt{\varepsilon} \\ -2\sqrt{\varepsilon} < x+t < 2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{4}\varphi(x+t) \\ &= \sup_{-2\sqrt{\varepsilon} < x+t < 2\sqrt{\varepsilon}} -\frac{1}{4}\varphi(x+t) = -\frac{1}{4}\varphi(0) = \frac{1}{4}\varepsilon M. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\frac{U_3(f_\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{4}M \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

что и составляет содержание утверждения (5). Теорема 2 доказана.

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. МIRONENKO, “Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной”, *Матем. заметки*, **74**:5 (2003), 696–712.
- [2] А. В. МIRONENKO, “Оценка величины наилучшего приближения классом функций с ограниченной второй производной”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:4 (2006), 842–858.
- [3] А. В. МIRONENKO, “О точности оценок приближения классом функций с ограниченной второй производной”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:6 (2007), 1285–1294.
- [4] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [5] В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов, *Введение в минимакс*, Наука, М., 1972.

А. В. МIRONENKO

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

E-mail: a_mironenko@mail.ru

Поступило

16.04.2007