Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, Ю. А. Назырова, Слоино проективные решетки. II, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 163–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:02:12

УДК 512.5

СЛОЙНО ПРОЕКТИВНЫЕ РЕШЕТКИ. II

В. А. Антонов, Ю. А. Назырова

Основной результат данной работы: примарная аргова решетка над полем $GF(p)$, имеющая геометрическую размерность не меньше трех, изоморфна решетке всех подмодулей конечнопорожденного модуля над кольцом многочленов ограниченной степени над полем $GF(p)$.

Библиография: 8 названий.

Проблема представимости данной решетки решеткой подгрупп некоторой группы была поставлена Судзуки [1] более сорока лет назад. В общем виде эта проблема была решена Яковлевым [2]. Но вопрос о представимости конечной модулярной решетки решеткой подгрупп конечной абелевой группы все еще открыт. Единственный известный авторам результат здесь получен Анищенко [3] для решеток размерности 2.

В связи с решением проблемы представимости конечной модулярной решетки решеткой подгрупп конечной абелевой группы был выделен класс слойно проективных решеток. В результате этого вопрос о представимости конечной модулярной решетки решеткой подгрупп сводится к вопросу исследования условий изоморфности слойно проективных решеток одинакового типа.

В данной работе продолжается начатое в [4] исследование изоморфности слойно проективных решеток одинакового типа.

Напомним некоторые определения.

Примарной решеткой называется конечная модулярная решетка $\mathcal{L}$, в которой

- а) каждый элемент совпадает с суммой циклов, в нем содержащихся;
- б) каждый интервал из $\mathcal{L}$, не являющийся цепью, содержит не менее трех атомов.

Решетка $\mathcal{L}$ называется *арговой*, если для любых элементов $X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2$ из $\mathcal{L}$ выполняется неравенство

$$(X_0 + Y_0) \cdot (X_1 + Y_1) \cdot (X_2 + Y_2) \leq (Z + X_1) \cdot X_0 + (Z + Y_1) \cdot Y_0,$$

где

$$Z = ((X_0 + X_1) \cdot (Y_0 + Y_1)) \cdot ((X_0 + X_2) \cdot (Y_0 + Y_2) + (X_1 + X_2) \cdot (Y_1 + Y_2)).$$

Это неравенство является теоретико-решеточной формой теоремы Дезарга. Поэтому в случае арговой решетки каждый слой ее является дезарговой проективной геометрией.

Слойно проективной решеткой назовем конечную модулярную решетку $\mathcal{L}$, обладающую следующими свойствами:

- 1) любой неразложимый элемент из $\mathcal{L}$ является циклом;
- 2) $\mathcal{L}$ обладает инволютивным антиавтоморфизмом φ ;
- 3) любой слой решетки $\mathcal{L}$ является дезарговой проективной геометрией над полем $GF(p^k)$ (числа p и k фиксированы для данной решетки).

Нашей целью будет доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Арговы слойно проективные решетки одинакового типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющие геометрическую размерность не меньше 3, изоморфны.*

На самом деле мы докажем более общее утверждение.

Пусть $\mathcal{L}$ – аргова примарная решетка (см. [5]). Тогда представление ее единицы L в виде суммы независимых циклов имеет вид

$$L = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n,$$

и если $m_i = l(A_i)$ – высота элемента A_i , то можно считать, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Напомним, что *геометрической размерностью* решетки $\mathcal{L}$ называется число r со свойством

$$m_1 = m_2 = \dots = m_r > m_{r+1}.$$

Если $n > 2$, то из арговости $\mathcal{L}$ следует, что каждый ее слой, т.е. интервал вида $[A, B]$, где B – сумма элементов, покрывающих A , является дезарговой проективной геометрией над одним и тем же полем $GF(p^k)$. Как и в случае слойно проективных решеток, *типом* решетки $\mathcal{L}$ назовем набор

$$(m_1, m_2, \dots, m_n, p^k).$$

Так как слойно проективные решетки примарны [4], то теорема А является простым следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА В. *Аргова примарная решетка типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющая геометрическую размерность не меньше 3, изоморфна решетке всех подмодулей n -мерного модуля $\mathcal{M}$ над кольцом $P[x]/(x^{m_1})$ многочленов степени меньшей m_1 над полем $P = GF(p)$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Примарная решетка типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющая геометрическую размерность не меньше 4, изоморфна решетке всех подмодулей n -мерного модуля $\mathcal{M}$ над кольцом $P[x]/(x^{m_1})$ многочленов степени меньшей m_1 над полем $P = GF(p)$.*

Это следует из арговости примарных решеток геометрической размерности не меньше 4 (см. [6, теорема 1.6]).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Слойно проективная решетка типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющая геометрическую размерность не меньше 4 (не меньше 3 в случае ее арговости), изоморфна решетке ψ -инвариантных подпространств $(\sum_{i=1}^n m_i)$ -мерного линейного векторного пространства над полем $GF(p)$.*

См. пример 2 из [4].

СЛЕДСТВИЕ 3. *Правильные C -решетки одинакового типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющие геометрическую размерность больше 2, изоморфны и, следовательно, представимы решеткой централизаторов некоторой группы (см. определение 2 из [4]).*

Это следует из четности геометрической размерности правильной C -решетки [7, теорема 4].

СЛЕДСТВИЕ 4. *Аргова примарная решетка типа $(m_1, m_2, \dots, m_n, p)$, имеющая геометрическую размерность больше 2, изоморфна решетке подгрупп конечной абелевой группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. В работе [5] доказано, что аргова примарная решетка $\mathcal{L}$, геометрической размерности не меньше 3, изоморфна решетке всех подмодулей конечнопорожденного модуля $\mathcal{M}$ над вполне примарным однорядовым кольцом $\mathcal{K}$. Предположим, что решетка $\mathcal{L}$ имеет тип $(m_1, m_2, \dots, m_n, p^k)$ и $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

Так как размерность модуля $\mathcal{M}$ равна числу n , то для доказательства теоремы В нам достаточно показать, что кольцо $\mathcal{K}$ изоморфно кольцу многочленов $P[x]/(x^m)$.

Кольцо $\mathcal{K}$ строится в [5] следующим образом.

Пусть $L = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ – представление единицы решетки $\mathcal{L}$ в виде суммы независимых циклов, $l(A_1) = l(A_2) = l(A_3) = m$. Положим $T = A_2 \vee \dots \vee A_n$, C_T – множество дополнений T , т.е.

$$C_T = \{X \in \mathcal{L} \mid X \vee T = L, X \wedge T = 0\}.$$

Трансляцией называется такой автоморфизм f решетки $\mathcal{L}$, что $f(X) = X$ для любого $X \leq T$ и $[f(X_1) \vee X_1] \wedge T = [f(X_2) \vee X_2] \wedge T$ для любых $X_1, X_2 \in C_T$. Множество всех трансляций решетки $\mathcal{L}$ образует абелеву группу G . Если $f \in G$ и $X \in C_T$, то элемент $[X \vee f(X)] \wedge T$ называется следом f и обозначается через $\text{tr}(f)$. Кольцо $\mathcal{K}$ совпадает с множеством всех сохраняющих след эндоморфизмов группы G , т.е. таких эндоморфизмов $\alpha \in \text{End}(G)$, что $\text{tr}(f^\alpha) \leq \text{tr}(f)$ для всех $f \in G$.

Нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [5].

(1) Для любых $A, B \in C_T$ существует и при том единственная трансляция $f \in G$ такая, что $f(A) = B$ [5, теорема 10.11].

(2) Для любого цикла $A \in T$ существует $f \in G$ со свойством $\text{tr}(f) = A$ [5, следствие 10.12].

(3) Если $f, g \in G$, то $\text{tr}(fg) \leq \text{tr}(f) \vee \text{tr}(g)$ [5, теорема 10.14].

(4) Если $f, g \in G$, $A \wedge f(A) = 0$ для некоторого $A \in C_T$, то для любых $\alpha \in \mathcal{L}$ и $X \in C_T$ выполняется равенство [5, лемма 11.3] $g^\alpha(X) = [X \vee \text{tr}(g)] \wedge [f^\alpha(X) \vee \text{tr}(gf^{-1})]$.

Назовем трансляцию $f \in G$ несингулярной, если $X \wedge f(X) = 0$ для $X \in C_T$. Это равносильно тому, что $l(\text{tr}(f)) = m$.

(5) Если $f, g \in G$, $\text{tr}(f) \wedge \text{tr}(g) = 0$ и g несингулярна, то gf тоже несингулярна и $\text{tr}(f) \wedge \text{tr}(gf) = 0$ [5, лемма 10.15].

Обозначим через G_i множество тех трансляций f из G , для которых $\text{tr}(f) \leq A_i$.

ЛЕММА 1. *Имеет место представление $G = \prod_{i=2}^n G_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства (3) следует, что каждое из множеств G_i является подгруппой и $G_i \cap \langle G_j \mid j \neq i \rangle = 1$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что

$$|G| = \left| \prod_{i=2}^n G_i \right|.$$

Рассмотрим $A_1 \vee A_i$. Так как $A_1 \vee A_i$ содержит ровно p^{km_i} циклов B со свойством $A_1 \vee A_i = B \vee A_i$, то в силу свойства (1) трансляций $|G_i| = p^{km_i}$. Индукцией по числу $(m_2 + \dots + m_n)$ несложно показать, что $|C_T| = p^{k(m_2 + \dots + m_n)}$, и снова из свойства (1) получим $|G| = p^{k(m_2 + \dots + m_n)}$.

Лемма доказана.

Подстановку τ из симметрической группы S_n назовем *регулярной*, если $i^\tau \neq i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ЛЕММА 2. Если $n = p^s$ и τ – регулярный элемент порядка p из S_n , то τ лежит в центре некоторой силовой p -подгруппы группы S_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление τ в виде произведения независимых циклов содержит p^{s-1} множителей, длина каждого из которых равна p . Число подстановок такого циклического строения в группе S_n равно числу

$$q = \frac{(p^s)!}{(p^{s-1})! p^{p^{s-1}}},$$

взаимно простому с числом p .

Так как в группе S_n все подстановки одинакового циклического строения сопряжены, то индекс $|S_n : C(\tau)| = q$ взаимно прост с числом p , т.е. $C(\tau)$ содержит силовскую p -подгруппу из S_n , что и требовалось показать.

ЛЕММА 3. Множество G_2 содержит несингулярную трансляцию порядка p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через G_0 группу автоморфизмов интервала $[0, A_1 \vee A_2]$, оставляющих A_2 на месте. Положим

$$C_2 = \{X \in C_T \mid X \vee A_2 = A_1 \vee A_2\}.$$

Тогда $|C_2| = p^{km}$. Так как в интервале $[0, A_1 \vee A_2]$ любой цикл содержится в цикле высоты m (см. теорему 5.3 из [5]), то из тривиальности действия элемента $g \in G_0$ на множестве C_2 следует, что $g = 1$. Поэтому G_0 можно рассматривать как подгруппу группы подстановок на множестве C_2 . Заметим, что если S – стабилизатор A_1 в G_0 , то $G_0 = G_2 S$.

Так как слойно проективные решетки одинакового типа (m, m, p^k) изоморфны (см. [1, теорема 3]), то интервал $[0, A_1 \vee A_2]$ можно отождествить с решеткой ψ -инвариантных подпространств линейного пространства размерности $2m$ над полем $GF(p^k)$ с базисом

$$\{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

и оператором ψ со свойством $\psi(e_i) = e_{i+1}$ при $i < m$, $\psi(e_m) = 0$, $\psi(f_j) = f_{j+1}$ при $j < m$ и $\psi(f_m) = 0$ (см. [4, пример 2]).

Обозначим через H_2 множество автоморфизмов интервала $[0, A_1 \vee A_2]$, индуцированных такими линейными операторами χ , что $\chi(f_j) = f_j$ для всех j ,

$$\begin{aligned}\chi(e_1) &= e_1 + \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_m f_m, \\ \chi(e_j) &= e_j + \beta_1 f_j + \cdots + \beta_{m-j+1} f_m, \quad j > 1.\end{aligned}$$

Тогда, как нетрудно видеть, $|H_2| = |G_2|$ и $\text{Exp}(H_2) = p$. Пусть h – такой элемент из H_2 , что $A_1 \wedge h(A_1) = 0$. Обозначим через S_p силовскую p -подгруппу группы G_0 , в центре которой лежит элемент h . Тогда $G_2^g \leq S_p$ для некоторого $g \in G_0$. Из абелевости группы G_2 и равенства $G_0 = G_2 S$ следует, что можно считать $g \in S$. Поскольку из $t_1(A_1) = t_2(A_1)$ следует, что $t_1 = t_2$ для $t_1, t_2 \in G_2$ и $\{t(A_1) \mid t \in G_2\} = C_2$, то найдется трансляция $t \in G_2$ со свойством $t^g(A_1) = h(A_1)$. Но тогда из равенства

$$A_1 = (t^g h^{-1})^p(A_1) = (t^g)^p(A_1) = (t^p)^g(A_1)$$

и свойства (1) трансляций следует, что $t^p = 1$. Остается заметить, что t несингулярна. В самом деле, если $t(A_1) \wedge A_1 \neq 0$, то $gt(A_1) \wedge g(A_1) = gt(A_1) \wedge A_1 \neq 0$ и, следовательно, $t^g(A_1) \wedge A_1 = h(A_1) \wedge A_1 \neq 0$, что противоречит выбору h . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Имеет место равенство $\text{Exp}(G) = p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 нам достаточно показать, что $\text{Exp}(G_i) = p$. Пусть f – несингулярная трансляция порядка p из G_2 , а g – произвольный элемент из G_i при $i > 2$. По свойству (5) $\text{tr}(g) \wedge \text{tr}(gf^{-1}) = 0$. Так как возведение в степень сохраняет след, то по свойству (4) будем иметь

$$\begin{aligned}g^p(A_1) &= (A_1 \vee \text{tr}(g)) \wedge (A_1 \vee \text{tr}(gf^{-1})) \\ &= A_1 \vee (\text{tr}(g) \wedge (A_1 \vee \text{tr}(gf^{-1}))) = A_1,\end{aligned}$$

т.е. $g^p = 1$. Это означает, что $\text{Exp}(G_i) = p$ при $i > 2$. Взяв теперь несингулярную трансляцию f из G_3 , аналогично покажем, что и $\text{Exp}(G_2) = p$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Характеристика кольца $\mathcal{K}$ равна p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – произвольная трансляция из G , $\alpha \in \mathcal{K}$. Тогда из $f^p \alpha = (f^\alpha)^p = 1$ следует, что $p\alpha = 0$. Следствие доказано.

В дальнейшем мы используем следующие свойства сохраняющих след эндоморфизмов.

(i) Если f – несингулярная трансляция, то для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ из $f^\alpha = f^\beta$ следует, что $\alpha = \beta$ [5, лемма 11.4].

(ii) Если $f_1, f_2 \in G$ и $\text{tr}(f_1) \leq \text{tr}(f_2)$, то найдется такой $\beta \in \mathcal{K}$, что $f_1 = f_2^\beta$ [5, теорема 11.6].

Для $\alpha \in \mathcal{K}$ положим $l(\alpha) = m - l(\text{tr}(f^\alpha))$, где f – несингулярная трансляция. Число $l(\alpha)$ не зависит от выбора f . Положим $K_i = \{\alpha \in \mathcal{K} \mid l(\alpha) \geq i\}$.

(iii) Если $\alpha \in K_i \setminus K_{i+1}$ и $\beta \in K_j \setminus K_{j+1}$, то $\alpha\beta \in K_{i+j} \setminus K_{i+j+1}$ при $i + j < m$ и $\alpha\beta = 0$ при $i + j \geq m$ [5, следствие 11.11].

Так как каждая подгруппа G_i $\mathcal{K}$ -инвариантна, то $\mathcal{K}$ индуцирует эндоморфизмы в G_i . Если $\mathcal{K}'$ – сужение $\mathcal{K}$ на G_2 и $\chi: \mathcal{K} \rightarrow \text{End}(G_2)$ такое, что $f^{\chi(\alpha)} = f^\alpha$ для любых $f \in G_2$ и $\alpha \in \mathcal{K}$, то из свойства (i) следует, что χ – мономорфизм, т.е. $\mathcal{K}' \cong \mathcal{K}$. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять $\mathcal{K}$ с $\mathcal{K}'$, ограничиваясь, как правило, действием $\mathcal{K}$ на G_2 .

ЛЕММА 5. Кольцо $\mathcal{K}$ содержит в качестве подкольца поле $P \cong GF(p^k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K^* группу единиц кольца $\mathcal{K}$. Тогда условие $\alpha \in K^*$ равносильно тому, что f^α несингулярна для любой несингулярной трансляции f . Поэтому с учетом (i) и (ii) имеем

$$|K^*| = p^{(m-1)k}(p^k - 1).$$

Так как $\mathcal{K}$ – примарное однорядовое кольцо и K_1 – радикал Джекобсона для $\mathcal{K}$, то $\mathcal{K}/K_1$ является телом, а в силу своей конечности и полем. Совокупность автоморфизмов вида $1 + \alpha$, где $\alpha \in K_1$, образует нормальную подгруппу S порядка $p^{(m-1)k}$ группы K^* , а K^*/S изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^k)$. Поэтому группа K^* разрешима.

Пусть P_0 – холлова p' -подгруппа группы K^* . Тогда P_0 – циклическая группа порядка $(p^k - 1)$. Покажем, что $P = P_0 \cup \{0\}$ является подполем кольца $\mathcal{K}$. Для этого достаточно показать, что $\alpha + \beta \in P$ для любых α и β из P_0 . Предположим противное. Так как элементы из P служат представителями смежных классов кольца $\mathcal{K}$ по идеалу K_1 , то любой элемент из $\mathcal{K}$ можно представить в виде $\gamma + \delta$, где $\gamma \in P$, $\delta \in K_1$. Пусть α и β – такие элементы из P_0 , что $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, где $\gamma \in P$, $\delta \in K_1 \setminus \{0\}$. Из абелевости P_0 получим

$$\varphi\delta = \varphi\alpha + \varphi\beta - \varphi\gamma = \alpha\varphi + \beta\varphi - \gamma\varphi = \delta\varphi$$

для любого $\varphi \in P_0$. Так как $(|P_0|, p) = 1$, то найдутся $\alpha_1, \beta_1 \in P_0$ со свойством $\alpha = \alpha_1^p$ и $\beta = \beta_1^p$. Но тогда из абелевости P и следствия из леммы 4 следует, что

$$\alpha + \beta = \alpha_1^p + \beta_1^p = (\alpha_1 + \beta_1)^p.$$

Пусть $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$, где $\gamma_1 \in P$, $\delta_1 \in K_1$. Как и выше, $\gamma_1\delta_1 = \delta_1\gamma_1$. Если $\delta_1 = 0$, то

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)^p = \gamma_1^p \in P,$$

что противоречит выбору α и β . Поэтому $\delta_1 \in K_1 \setminus \{0\}$ и мы имеем

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)^p = (\gamma_1 + \delta_1)^p = \gamma_1^p + \delta_1^p.$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2^p$, $\beta_1 = \beta_2^p$ и $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2 + \delta_2$, где $\gamma_2 \in P$, $\delta_2 \in (K_1)$. Тогда аналогично получим, что $\delta_2 \in K_1 \setminus \{0\}$ и

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)^p = (\alpha_2^p + \beta_2^p)^p = (\alpha_2 + \beta_2)^{p^2} = (\gamma_2 + \delta_2)^{p^2} = \gamma_2^{p^2} + \delta_2^{p^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим, что для любого натурального t найдутся такие $\gamma_t \in P$ и $\delta_t \in (K_1) \setminus \{0\}$, что $\alpha + \beta = \gamma_t^{p^t} + \delta_t^{p^t}$. В силу свойства (iii) $K_1^{p^t} = 0$ для $p^t \geq m$. Но в этом случае $\alpha + \beta = \gamma_t^{p^t} \in P$, что противоречит выбору α и β . Лемма доказана.

Пусть λ – первообразный элемент поля P , т.е. $P_0 = \langle \lambda \rangle$. Предположим, что y – такой элемент из $K_1 \setminus K_2$, что $y\lambda = \lambda y$. Если α_j и β_j – элементы из P , то по свойству (iii)

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j y^j - \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j y^j \in K_t,$$

где $t = \min\{m, \min_{\alpha_j - \beta_j \neq 0} j\}$. Поэтому из равенства

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j y^j = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j y^j$$

следует, что $\alpha_j = \beta_j$ для всех j . Это означает, что

$$\left| \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j y^j \mid \alpha_j \in P \right\} \right| = |\mathcal{K}|,$$

т.е. $\mathcal{K} = P[y]$. Поэтому для завершения доказательства теоремы В нам достаточно доказать, что $y\lambda = \lambda y$ для некоторого $y \in K_1 \setminus K_2$.

Предположим теперь, что $k = 1$. Так как возведение в степень сохраняет след, то можно считать, что для любого $a \in G$ выполняется равенство $a^\lambda = a^s$, где s – первообразный корень по модулю p . Но тогда $a^{\lambda x} = (a^s)^x = (a^x)^s = a^{x\lambda}$, т.е. $\lambda x = x\lambda$, что завершает доказательство теоремы В.

В случае $k > 1$ ситуация более сложная. Рассмотрим следующий пример.

Пусть V – 6-мерное векторное пространство над полем $GF(p^k)$ с базисом $e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$. Так как $k > 1$, то $GF(p^k)$ обладает нетривиальным автоморфизмом τ . Введем отображение ψ пространства V в себя следующим образом: если $u \in V$ и $u = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, то $\psi(u) = (0, \alpha_1^\tau, 0, \beta_1^\tau, 0, \gamma_1^\tau)$. Заметим, что $\psi^2(u) = 0$ для любого вектора $u \in \mathcal{L}$.

Через $\mathcal{L}$ обозначим решетку ψ -инвариантных подпространств пространства V . Если $u \in V$, то ψ -замыкание $\langle u \rangle^\psi$ вектора u – это подпространство, порожденное векторами u и $\psi(u)$. Если $v = \alpha u + \beta \psi(u)$, то $\psi(v) = \alpha^\tau \psi(u) \in \langle u \rangle^\psi$. Это означает, что $\langle u \rangle^\psi$ является циклом высоты не более 2 и, следовательно, каждый неразложимый элемент из $\mathcal{L}$ является циклом. Так как $\mathcal{L}$ является подрешеткой решетки подпространств векторного пространства, то она аргова (см. [8, теорема 2.14]). Таким образом, $\mathcal{L}$ – аргова примарная решетка типа $(2, 2, 2, p^k)$.

Положим $A_1 = \langle e_1 \rangle^\psi$, $A_2 = \langle f_1 \rangle^\psi$, $A_3 = \langle g_1 \rangle^\psi$, $T = A_2 + A_3$. Зафиксируем какой-либо вектор $t \in T$, $t \neq 0$, и рассмотрим отображения пространства V в себя, заданное следующим образом: если $u = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, то $a(u) = u + \alpha \alpha_1 t + (\alpha^\tau \alpha_2 + \beta \alpha_1) \psi(t)$, где α и β – фиксированные элементы из $GF(p^k)$. Тогда, как несложно видеть, $a(\gamma u) = \gamma a(u)$, $a(u + v) = a(u) + a(v)$, $a(\psi(u)) = \psi(a(u))$, и если $a(u) = a(v)$, то $u = v$. Это означает, что отображение a индуцирует автоморфизм решетки $\mathcal{L}$, который будем обозначать тоже через a . Более того, a является трансляцией, так как $a(A) = A$ для любого $A \leq T$, и если $A \in C(T)$, что равносильно тому, что $\alpha_1 \neq 0$, то $(A + a(A))T = \langle \alpha t, \beta \psi(t) \rangle^\psi$. Из соображений порядка следует, что любая трансляция

из группы G индуцируется таким отображением $a: V \rightarrow V$ и полностью определяется выбором образующего элемента t для $\text{tr}(a)$ и заданием элементов $\alpha, \beta \in GF(p^k)$.

Рассмотрим отображения x и λ группы G в себя, заданные следующим образом: если $a\langle u \rangle^\psi = \langle u + \alpha t + \beta \psi(t) \rangle^\psi$, где $\langle t \rangle^\psi$ – след трансляции a , то

$$a^x(\langle u \rangle^\psi) = \langle u + \psi(\alpha t + \beta \psi(t)) \rangle^\psi, \quad a^\lambda(\langle u \rangle^\psi) = \langle u + s(\alpha t + \beta \psi(t)) \rangle^\psi,$$

где s – образующий элемент мультипликативной группы поля $GF(p^k)$. Несложно проверить, что x и λ являются эндоморфизмами, сохраняющими след.

Пусть a – такая трансляция из G , что $a(A_1) = \langle e_1 + f_1 \rangle^\psi$.

Тогда $a^x(A_1) = \langle e_1 + f_2 \rangle^\psi$ и $a^\lambda(A_1) = \langle e + s f_1 \rangle^\psi$. Поэтому $a^{x\lambda}(A_1) = \langle e_1 + s f_2 \rangle^\psi$ и $a^{\lambda x} = \langle e_1 + s^\tau f_2 \rangle^\psi$, т.е. $x\lambda \neq \lambda x$. Поэтому кольцо $\mathcal{K}$ некоммутативно и, следовательно, не изоморфно кольцу многочленов.

Если же в качестве τ взять тождественный автоморфизм поля $GF(p^k)$, то $\mathcal{K}$ будет изоморфно кольцу многочленов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960.
- [2] Яковлев Б. В. Об условиях, при которых решетка изоморфна решетке подгрупп группы // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 6. С. 694–712.
- [3] Анищенко С. А. О представлении некоторых модулярных структур структурами подгрупп // Матем. записки Красноярского госпединститута. 1965. Вып. 1. С. 1–21.
- [4] Антонов В. А., Назырова Ю. А. Слоино проективные решетки. 1 // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 170–182.
- [5] Jonsson B., Monk G. Representations of primary arguesian lattices // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 1. P. 95–139.
- [6] Monk G. S. Desargues law and the representation of primary lattices // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 1. P. 175–186.
- [7] Антонов В. А. Об одном классе модулярных решеток конечной длины // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 1. С. 3–14.
- [8] Jonsson B. Modular lattices and Desargues theorem // Math. Scand. 1953. V. 2. P. 205–314.

Южно-Уральский государственный университет
E-mail: antv@ps.tu-chel.ac.ru

Поступило
05.02.1999
Исправленный вариант
20.10.2000