Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Шкиль, Г. В. Завизион, Система линейных дифференциальных уравнений с вырожденностью в точке, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:09:04

Система линейных дифференциальных уравнений с вырожденностью в точке

Н. И. Шкиль, Г. В. Завизион

В [1] строились асимптотические решения линейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем уравнений с вырожденной на всем отрезке интегрирования матрицей при производной. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка с особенностями в отдельных точках промежутка интегрирования изучались в [2]. В данной статье предлагаются методы асимптотического интегрирования сингулярно возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (1)$$

где ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, – малый параметр, $t \in [0; L]$, $h \in \mathbb{N}$, $x(t, \varepsilon)$ – n -измеримый вектор, $A(t, \varepsilon)$, $B(t)$ – $n \times n$ -матрицы. Предполагаем выполнение условий:

- 1) матрица $A(t, \varepsilon)$ имеет разложение по степеням малого параметра

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t);$$

- 2) матрицы $A_s(t)$, $s = 0, 1, \dots$, $B(t)$ бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0; L]$;
- 3) матрицы $A_s(0)$, $s = 0, 1, \dots$, $B(0)$ действительные;
- 4) $\det B(0) = 0$, $\det B(t) \neq 0 \forall t \in (0; L]$;
- 5) $(d/dt)(\det B(t))|_{t=0} \neq 0$;
- 6) $\text{rang } B(0) = n - 1$;
- 7) корни характеристического уравнения

$$F(t, w(t)) = \det \|A_0(t) - w(t)B(t)\| = 0 \quad (2)$$

простые при $t > 0$;

- 8) существует при $t \rightarrow 0+$ конечный предел $n - 1$ корней $w_i(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, характеристического уравнения (2).

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА. Если матрица $B(t)$ удовлетворяет условиям 4)–6), то существуют числовая неособенная матрица R и неособенная бесконечно дифференцируемая при $0 \leq t \leq L$ матрица $B_1(t)$ такие, что выполняется равенство

$$RB(t) = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} B_1(t), \quad (3)$$

где E_{n-1} – единичная матрица $(n - 1)$ -го порядка, элементы b_{ij} , $i = 1, \dots, n - 1$, $j = 1, \dots, n$, матрицы $B_1(t)$ совпадают с элементами матрицы $B(t)$, а элементы b_{1nj} , $j = 1, \dots, n$, задаются равенствами

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}(t) + b_{nj}(t) = tb_{1nj}(t), \quad j = 1, \dots, n,$$

$b_{ni} \in \mathbb{R}$. Элементы матрицы R определяются по формулам $\{R\}_{ii} = 1$, $\{R\}_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n - 1$, остальные элементы равны нулю.

Будем требовать выполнение таких условий:

9) уравнение

$$S(w) = \det \|C(0) - wT_0\| = 0, \quad (4)$$

имеет $n - 1$ различных корней, где $C(t) = RA_0(t)B_1^{-1}(t)$,

$$T_0 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

10) выполняется неравенство $c_{nn}(0) > 0$, где $c_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, элементы матрицы $C(t)$.

Согласно условию 8) $n - 1$ корней $w_i(t)$ уравнения (2) доопределим в точке $t = 0$, положив $w_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} w_i(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$. Согласно условию 9) функции

$$w_{i0}(t) = \begin{cases} w_i(t), & \text{при } 0 < t \leq L, \\ w_i(0), & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

являются корнями уравнения (2) и бесконечно дифференцируемы в точке $t = 0$, так как $F'_{w_{i0}}(0, w_{i0}(0)) = S'_{w_{i0}}(w_{i0}(0)) \neq 0$, $i = 1, \dots, n - 1$. Можно доказать, что корни $w_{i0}(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, при $t > 0$ уравнения (2) являются корнями уравнения

$$\det \|C(t)I(t) - tw(t)\| = 0, \quad (5)$$

где $I(t)$ матрица вида

$$I(t) = \begin{pmatrix} tE_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойствам корней уравнения (5) и условию 10) приходим к выводу, что $n - 1$ корней $\bar{w}_i(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, уравнения

$$G(t, \bar{w}) = \det \|C(t)I(t) - \bar{w}(t)\| = 0 \quad (6)$$

разные при $t > 0$ и $\bar{w}_i(0) = 0$, а корень $\bar{w}_n(t)$ уравнения (6), для которого $\bar{w}_n(0) = c_{nn}(0)$, — простой, а значит, они бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0; L]$.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия 1)–10), то система дифференциальных уравнений (1) имеет $n - 1$ формальных решений вида

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right), \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (7)$$

одно формальное решение вида

$$x_n(t, \varepsilon) = t^{a^2(\varepsilon)/\varepsilon^h} u_n(t, \varepsilon) \exp\left(e^{-h} \int_0^t \lambda_n(t, \varepsilon) dt\right), \quad (8)$$

где $u_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$, — n измеримые вектора, $\lambda_j(t, \varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ — скалярные функции, которые имеют разложения по степеням параметра ε

$$u_j(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{js}(t), \quad \lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \lambda_s(t), \quad a(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_s. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что коэффициенты разложений (9) можно определить, так, чтобы вектор $x_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$, формально [1] удовлетворял системе (1). Для этого, подставив (7) в (1), получим тождество

$$\varepsilon^h B(t)u'(t, \varepsilon) + B(t)u(t, \varepsilon)\lambda(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon), \quad (10)$$

где $(\cdot)'$ означает производную по t . Подставим (9) в (10) и, сравнивая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε , придем к системе уравнений

$$(A_0(t) - B(t)\lambda_{i0}(t))u_{is}(t) = f_{is}(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $f_{i0} = 0$; $f_{is}(t)$ выражаются через функции $u_{is1}(t)$, $\lambda_{is1}(t)$, $s_1 < s$. Согласно предыдущим соображениям характеристическое уравнение (2) имеет $n-1$ различных и бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0; L]$ корней $w_{i0}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, поэтому уравнение (7) будет иметь ненулевое решение, когда $\lambda_{i0}(t) = \omega_{i0}(t)$, и для нахождения $\lambda_{is}(t)$, u_{is} , $s = 0, 1, \dots$, можно использовать методы [1].

Подставляя (8) в (1), получим тождество

$$\varepsilon^h B(t)tu'_n(t, \varepsilon) + \lambda_n(t, \varepsilon)tB(t)u_n(t, \varepsilon) + a^2 B(t)u_n(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)tu_n(t, \varepsilon). \quad (12)$$

Подставим (9) в (12) и, сравнивая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε , придем к системе уравнений

$$(A_0(t) - (a_0^2 + t\lambda_0(t))B(t))u_{ns}(t) = b_{ns}(t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} b_{n0}(t) &= 0, \quad b_{ns}(t) = (t\lambda_{ns}(t) + 2a_0a_s)B(t)u_{n0}(t) + f_{ns}(t), \\ f_{ns}(t) &= tB(t)u'_{n,s-h}(t) - \sum_{r=1}^s A_r(t)u_{n,s-r}(t) + tB(t) \sum_{r=1}^{s-1} u_{n,r}(t)\lambda_{n,s-r}(t) \\ &\quad + \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^{s_r} (2\Delta_r a_0 a_r + a_{r/2}^2 + 2a_j a_{r-j})B(t)u_{n,s-r}(t), \end{aligned}$$

$s_r = (r-1)/2$, если r нечетное, $s_r = [r/2] - 1$, если r четное число; $\Delta_r = 1$, если $r \neq s$, $\Delta_r = 0$, если $r = s$; причем, если $r/2$ — дробное число, то $a_{r/2} = 0$. Подставив (3) в (13) и умножив (13) слева на матрицу R , получим уравнения для нахождения $\lambda_{ns}(t)$, $u_{ns}(t)$, $s = 0, 1, 2, \dots$:

$$(C(t)I(t) - (a_0^2 + t\lambda_{n0}(t))E)v_s(t) = g_s(t), \quad (14)$$

где $u_{ns}(t) = B^{-1}(t)I(t)v_s(t)$, $Rf_{ns}(t) = tg_s(t)$.

Уравнение (14) имеет ненулевое решение, когда

$$a_0^2 + t\lambda_{n0}(t) = \bar{w}_n(0). \quad (15)$$

Положим в (15) $t = 0$ и возьмем $a_0 = \sqrt{a_{nn}(0)}$. При $0 < t \leq L$ получим

$$\lambda_{n0}(t) = \frac{\bar{w}_n(t) - \bar{w}_n(0)}{t}.$$

Доопределим функцию $\lambda_{n0}(t)$ в точке $t = 0$; для этого положим

$$\lambda_{n0}(0) = \bar{\omega}'_n(0), \quad v_0(t) = \bar{\varphi}_n(t) \quad \forall t \in [0; L],$$

где $\bar{\varphi}_n(t)$ — собственный вектор матрицы $G(t) = C(t)I(t)$, соответствующий собственному значению $\bar{\omega}_n(t)$. Выберем вектор $\bar{\varphi}_n(t)$ так, чтобы $(\bar{\varphi}_n(t), \bar{\psi}_n(t)) = 1$, где $\bar{\psi}_j(t) -$

собственный вектор матрицы $G(t)^*$, сопряженной к матрице $G(t)$. Из условия существования решения уравнения (14) имеем

$$(t\lambda_{ns}(t) + 2a_0a_s)B(t)u_{n0}(t) = F_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $F_s(t) = -(\psi_n(t), g_s(t))$. В равенстве (16) положим $t = 0$ и найдем, что

$$a_s = \frac{F_s(0)}{2\sqrt{\bar{\omega}_n(0)}}, \quad s = 1, 2, \dots$$

При $0 < t \leq L$ имеем

$$\lambda_{ns}(t) = \frac{F_s(t) - F_s(0)}{t}, \quad v_s(t) = H_n(t)b_{ns}(t), \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $H_n(t)$ обобщенно обратная матрица к матрице $B_0(t)I(t) - C(t)\bar{\omega}_n(t)$. Доопределим $\lambda_{ns}(t)$, $v_s(t)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, в точке $t = 0$; для этого положим $\lambda_{ns}(0) = F'_s(0)$, $v_s(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} v_s(t)$. Можно доказать, что функции $\lambda_{ns}(t)$, $v_s(t)$ бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0; L]$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если выполняются условия 1)–3), 6)–9) и условия

$$4') \det B(0) = (d^s/dt^s)(\det B(t))|_{t=0} = 0, \quad s = 1, \dots, k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 < k \leq n;$$

$$5') (d^k/dt^k)(\det B(t))|_{t=0} \neq 0;$$

$$6') \text{rang } M_{\bar{B}(t)}(0^{(k)}) = k;$$

$$7') \text{ выполняются неравенства}$$

$$\bar{\omega}_n(0) = \lambda_{n,n-k+1}(0) \prod_{i=n-k+1}^{n-1} p_{i,i+1} > 0;$$

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left(\frac{G'_t(t, \bar{\omega})}{G'_\omega(t, \bar{\omega})} \right) \right|_{t=0} < 0, \quad s = 1, \dots, k-1,$$

то система (1) имеет $n-1$ формальных решений вида (7) и при $0 < t \leq L$ одно решение вида

$$x_n(t, \varepsilon) = t^{(b_{k-1}^{(2)}(\varepsilon))/\varepsilon^h} u_n(t, \varepsilon) \exp \left(-\frac{b(t, \varepsilon)}{\varepsilon^h t^{k-1}} + \varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_n(t, \varepsilon) dt \right), \quad (17)$$

где функция $b(t, \varepsilon)$ определяется равенствами

$$b(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{k-2} t^r b_r^2(\varepsilon) \quad \text{при } k > 1; \quad b(t, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } k = 0.$$

Функции $b_r(\varepsilon)$ имеют разложения

$$b_r(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i b_{ri}, \quad r = 0, \dots, k-1.$$

$M_{\bar{B}(t)}(0^{(k)})$ – числовая $n^2 \times n$ матрица, которая состоит из строк матрицы $\bar{B}(t)$, транспонированной к матрице, состоящей из алгебраических дополнений матрицы $B(t)$, и строк матриц j , $j = 1, \dots, k-1$, производных матрицы $\bar{B}(t)$ в точке $t = 0$. Элементы

матриц T_0 , $I(t)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \{T_0\}_{ii} &= 1, & \{T_0\}_{ij} &= 1, & \{T_0\}_{n-k+s, \beta_1} &= 0, & \{T_0\}_{n-k+s, \beta_2} &= -p_{n-k+s, \beta_2}, \\ \{I(t)\}_{ii} &= t^k, & \{I(t)\}_{ij} &= 0, & \{I(t)\}_{n-k+s, \alpha} &= 0, & \{I(t)\}_{n-k+s, n-k+s} &= t^{k-1}, \\ \{I(t)\}_{n-k+s, n-k+j_1} &= \sum_{r=2}^{j_1-s+1} \sum_{i_1=s+1}^r \sum_{i_{j_1-s-1}=j_1-1}^r t^{k-r} p_{n-k+s, n-k+i_1} p_{n-k+i_1, n-k+i_2} p_{n-k+i_{j_1-s-1}, n-k+j_1}, \\ i &\neq j, & i &= 1, \dots, n-k, & j &= 1, \dots, n, & \alpha &= 1, \dots, n-k+s-1, \\ & & s &= 1, \dots, k, & j_1 &= s+1, \dots, k, \\ \beta_1 &= n-k+1, \dots, n-k+s, & \beta_2 &= n-k+s+1, \dots, n; & p_{n-k+s, \beta_2} &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

причем $p_{n-k+s, n-k+s+1} \neq 0$; m -е приближение $x_{nm}(t, \varepsilon)$ [1] формального решения (17) можно доопределить в точке $t = 0$, положив $x_{nm}(0, \varepsilon) = 0$.

Таким образом, построены асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища школа, Київ, 2000. [2] A.-M. Wazwaz, *J. Comput. Appl. Math.*, **34**:1 (1991), 65–74.

Н. И. Шкіль

Киевский национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова

Поступило

24.12.2004

Г. В. Завизион

Киевский национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова

E-mail: Zavizion@kspu.kr.ua