Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Щенникова, Устойчивоподобные свойства решений одной многосвязной системы дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 136–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:37:14

Устойчивоподобные свойства решений одной многосвязной системы дифференциальных уравнений

Е. В. Щенникова

Доказывается теорема об асимптотической устойчивости степенного типа относительно одной части фазовых переменных, а относительно другой – о равномерной ограниченности решений одной многосвязной системы дифференциальных уравнений.

Библиография: 9 названий.

Рассмотрим многосвязную систему вида

$$\frac{dy_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + F_s(t, y_s, z_s) + F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (1_1)$$

$$\frac{dz_s}{dt} = A_s(t)z_s + Y_s^{(\mu)}(t, y_s) + \Phi_s(t, y_s, z_s) + \Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}) + f_s(t), \quad (1_2)$$

где $X_s^{(\mu)}(y_s) \in C'(\mathbb{R}^{m_s} \rightarrow \mathbb{R}^{m_s})$ – однородные m_s -мерные векторные функции порядка μ ,

$$\begin{aligned} F_s(t, y_s, z_s) &\in C(J^+ \times \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{l_s} \rightarrow \mathbb{R}^{m_s}), \\ F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}) &\in C(J^+ \times \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_{s-1}} \times \mathbb{R}^{m_{s+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_q} \\ &\quad \times \mathbb{R}^{l_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{l_{s-1}} \times \mathbb{R}^{l_{s+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{l_q} \rightarrow \mathbb{R}^{m_s}), \\ \Phi_s(t, y_s, z_s) &\in C(J^+ \times \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{l_s} \rightarrow \mathbb{R}^{l_s}), \\ \Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}) &\in C(J^+ \times \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_{s-1}} \times \mathbb{R}^{m_{s+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_q} \\ &\quad \times \mathbb{R}^{l_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{l_{s-1}} \times \mathbb{R}^{l_{s+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{l_q} \rightarrow \mathbb{R}^{l_s}), \\ J^+ &= \{t : t \geq t_0 \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^q (m_s + l_s) = n, \quad \sum_{s=1}^q m_s = m, \quad \sum_{s=1}^q l_s = l,$$

$A_s(t)$ – непрерывные ограниченные матрицы размерности $l_s \times l_s$, $\|A_s(t)\| \leq \tilde{A}_s$, $0 < \tilde{A}_s = \text{const}$, $Y_s^{(\mu)}(t, y_s) \in C(J^+ \times \mathbb{R}^{m_s} \rightarrow \mathbb{R}^{l_s})$ – однородные относительно координат вектора y_s векторные функции также порядка μ ,

$$\|Y_s^{(\mu)}(t, y_s)(t)\| \leq b_s \|y_s\|^\mu,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-08-00826-а).

$$\|F_s(t, y_s, z_s)\| \leq \nu_s \|y_s\|^{\mu+\alpha}, \quad \|F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z})\| \leq \sum_{j=1, j \neq s}^q a_{sj} \|y_j\|^{\mu+\alpha},$$

$$\|\Phi_s(t, y_s, z_s)\| \leq \gamma_s \|y_s\|^\eta, \quad \|\Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z})\| \leq \sum_{j=1, j \neq s}^q b_{sj} \|y_j\|^\eta$$

при всех $t \geq t_0 \geq 0$, $0 < (\alpha \wedge \nu_s \wedge \gamma_s \wedge b_s \wedge a_{sj} \wedge b_{sj}) = \text{const}$, $\eta > \mu - 1$;

$$F_s(t, 0, z_s) = F_{1s}(t, 0, \tilde{z}) = \Phi(t, y_s, 0) = \Phi_{1s}(t, \tilde{y}, 0) \equiv 0;$$

$f_s(t)$ – непрерывные l_s -мерные векторные функции такие, что

$$\int_{t_0}^{\infty} \|f_s(\tau)\| d\tau \leq M_s, \quad 0 < M_s = \text{const},$$

$x = (y^T, z^T)^T$, $y = (y_1^T, \dots, y_q^T)$, $z = (z_1^T, \dots, z_q^T)$. Здесь и далее верхний индекс T означает транспонирование, $s = 1, \dots, q$, $1 < q \in \mathbb{N}$; норма вектора евклидова и согласована с нормой вектора, $\mu = p/q > 1$, $(p \wedge q)$ – положительные нечетные числа.

В связи с тем, что условия теоремы существования и единственности выполняются для решений системы (1₁), (1₂), множество $P = \{y, z : y = 0\}$ является инвариантным. Такое множество называют “частичным” положением равновесия [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. “Частичное” положение равновесия $y = 0$ системы (1₁), (1₂):

- 1) *устойчиво*, если для любых $\epsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ такое, что из $\|y_0\| < \delta$ следует $\|y(t, t_0, x_0)\| < \epsilon$ при всех $t \geq t_0$ и произвольном $\|z_0\| \leq r$;
- 2) *равномерно устойчиво*, если выбор величины δ не зависит от t_0 ;
- 3) *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и, кроме того, найдется такое $\delta_1(t_0, \epsilon) > 0$, что из $\|y_0\| < \delta_1(t_0, \epsilon)$ и произвольном $\|z_0\| \leq r$ следует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, t_0, x_0)\| = 0$;
- 4) *равномерно асимптотически устойчиво*, если оно равномерно устойчиво и выбор величины δ_1 не зависит от t_0 ;
- 5) *асимптотически устойчиво степенного (экспоненциального) типа*, если решения системы (1₁), (1₂) относительно фазовых переменных $y_1, \dots, y_m$ стремятся к нулю по степенному (экспоненциальному) закону при $t \rightarrow \infty$.

В отличие от работ [1], [2] здесь $\|z_0\| \leq r$.

Система первого приближения по отношению к системе (1₁), (1₂) имеет вид

$$\frac{dy_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s), \tag{21}$$

$$\frac{dz_s}{dt} = A_s(t)z_s, \quad s = 1, \dots, q. \tag{22}$$

Предположим, что при каждом $s = 1, \dots, q$:

- A1) нулевое решение системы (2₁) асимптотически устойчиво;
- A2) нулевое решение системы (2₂) равномерно устойчиво.

При выполнении условия A1) для каждой системы (2₁) на основании теорем Краковского [3; с. 112–116] и Зубова [4; с. 115–123] справедливы оценки вида [5]

$$\bar{a}_{1s} \|y_s\|^{m+1-\mu} \leq V_s(y_s) \leq \bar{a}_{2s} \|y_s\|^{m+1-\mu}, \tag{3}$$

$$\left\| \frac{\partial V_s(y_s)}{\partial y_s} \right\| \leq \bar{a}_{3s} \|y_s\|^{m-\mu}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{dV_s(y_s)}{dt} \right|_{(2_1)} \leq -\bar{a}_{4s} \|y_s\|^m. \quad (5)$$

Здесь $0 < \bar{a}_{is} = \text{const}$, m – достаточно большое четное положительное число, $s = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, 4$.

В качестве функции Ляпунова для каждой подсистемы системы (1₁) выберем функции $V_s(y_s)$, $s = 1, \dots, q$, удовлетворяющие оценкам (3)–(5).

С учетом оценок (3)–(5), непрерывности по совокупности переменных и ограничений на векторные функции $F_s(t, y_s, z_s)$, $F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z})$ ($s = 1, \dots, q$), получим [6; с. 48–50]

$$\left. \frac{dV_s(y_s)}{dt} \right|_{(1_1)} \leq -\bar{a}_{4s} \|y_s\|^m + r^\alpha \left(\bar{a}_{3s} \nu_s \|y_s\|^m + \bar{a}_{3s} \|y_s\|^{m-\mu} \sum_{j=1, j \neq s}^q a_{sj} \|y_j\|^\mu \right) \quad (6)$$

при $\|y\| \leq r$. Величину r уточним позднее. Обозначим

$$\rho_s = [V_s(y_s)]^{1/(m+1-\mu)}, \quad s = 1, \dots, q. \quad (7)$$

Исходя из неравенств (3) и равенства (7), будем иметь

$$\frac{[V_s(y_s)]^{1/(m+1-\mu)}}{\bar{a}_{2s}^{1/(m+1-\mu)}} \leq \|y_s\| \leq \frac{[V_s(y_s)]^{1/(m+1-\mu)}}{\bar{a}_{1s}^{1/(m+1-\mu)}}, \quad s = 1, \dots, q. \quad (8)$$

Выразим левые и правые части в неравенствах (6) через ρ_s , $s = 1, \dots, q$; тогда с учетом неравенств (8) система неравенств (6) перейдет в систему неравенств вида

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s}{dt} \leq & -\frac{\bar{a}_{4s}\rho_s^\mu}{(m+1-\mu)\bar{a}_{2s}^{m/(m+1-\mu)}} \\ & + r^\alpha \left[\frac{\bar{a}_{3s}\nu_s \cdot \rho_s^\mu}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{m/(m+1-\mu)}} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{a}_{3s}}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{(m-\mu)/(m+1-\mu)}} \sum_{j=1, j \neq s}^q \frac{a_{sj}}{\bar{a}_{1j}^{\mu/(m+1-\mu)}} \rho_j^\mu \right], \quad s = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для вектор-функции Ляпунова $V(y_1, \dots, y_m) = (V_1(y_1), \dots, V_m(y_m))^T$ с учетом системы неравенств (9) построена система сравнения

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} = & -\frac{\bar{a}_{4s}u_s^\mu}{(m+1-\mu)\bar{a}_{2s}^{m/(m+1-\mu)}} \\ & + r^\alpha \left[\frac{\bar{a}_{3s}\nu_s u_s^\mu}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{m/(m+1-\mu)}} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{a}_{3s}}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{(m-\mu)/(m+1-\mu)}} \sum_{j=1, j \neq s}^q \frac{a_{sj}u_j^\mu}{\bar{a}_{1j}^{\mu/(m+1-\mu)}} \right], \quad s = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (10)$$

Величину r всегда можно подобрать так, что система (10) будет иметь единственное изолированное положение равновесия $u_s = 0$, $s = 1, \dots, q$. Правая часть системы (10) удовлетворяет условиям теоремы Важевского [7; с. 28]. Следовательно, если $\rho_s(t_0) = u_s(t_0)$, $s = 1, \dots, q$, то при $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\rho_s(t) \leq u_s(t), \quad s = 1, \dots, q.$$

А тогда из асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (10) следует асимптотическая устойчивость “частичного” положения равновесия $y = 0$ системы (1₁), (1₂) [7; с. 61–62].

Для доказательства асимптотической устойчивости системы (10) запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} = & \frac{1}{m+1-\mu} \left(-\frac{\bar{a}_{4s}}{\bar{a}_{2s}^{m/(m+1-\mu)}} + \frac{\bar{a}_{3s}\nu_s r^\alpha}{\bar{a}_{1s}^{m/(m+1-\mu)}} \right) u_s^\mu \\ & + \frac{\bar{a}_{3s}r^\alpha}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{(m-\mu)/(m+1-\mu)}} \cdot \sum_{j=1, j \neq s}^q \frac{a_{sj}u_j^\mu}{\bar{a}_{1j}^{\mu/(m+1-\mu)}}, \quad s = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (11)$$

Матрицу системы сравнения обозначим через $H = (h_{sj})_{1,1}^{q,q}$, где

$$\begin{aligned} h_{sj} = & \left[\frac{1}{m+1-\mu} \left(-\frac{\bar{a}_{4s}}{\bar{a}_{2s}^{m/(m+1-\mu)}} + \frac{\bar{a}_{3s}\nu_s r^\alpha}{\bar{a}_{1s}^{m/(m+1-\mu)}} \right) \text{ при } s = j \right] \\ & \wedge \left[\frac{\bar{a}_{3s}r^\alpha \cdot a_{sj}}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{(m-\mu)/(m+1-\mu)}\bar{a}_{1j}^{\mu/(m+1-\mu)}} \text{ при } s \neq j \right], \quad s, j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Проведем далее исследование асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11). Для этого выберем функцию Ляпунова

$$V^{(1)}(u) = \frac{1}{\mu+1} \sum_{s=1}^q c_s u_s^{\mu+1},$$

где $c_s > 0$, $u = (u_1, \dots, u_q)$.

Справедливы очевидные неравенства

$$c_{\min} \|u\|^{\mu+1} \leq V^{(1)}(u) \leq c_{\max} \|u\|^{\mu+1}, \quad (12')$$

где $c_{\min} = \min_{1 \leq s \leq q} (c_s/(\mu+1))$, $c_{\max} = \max_{1 \leq s \leq q} (c_s/(\mu+1))$.

Полная производная функции Ляпунова по времени t на решениях системы (11) имеет вид

$$\left. \frac{dV^{(1)}(u)}{dt} \right|_{(11)} = \sum_{s=1}^q c_s u_s^\mu \left(\sum_{j=1, j \neq s}^q h_{sj} u_j^\mu \right). \quad (13)$$

Обозначим $\xi_s := u_s^\mu$, $s = 1, \dots, q$. С учетом этого равенство (13) примет вид

$$\left. \frac{dV^{(1)}(\xi)}{dt} \right|_{(11)} = W^{(1)}(\xi) + r^\alpha W^{(2)}(\xi), \quad (14)$$

где

$$W^{(1)}(\xi) = \xi^T [(H^{(1)})^T C + C H^{(1)}] \xi, \quad W^{(2)}(\xi) = \xi^T [(H^{(2)})^T C + C H^{(2)}] \xi,$$

$$\begin{aligned}
\xi &= \text{Col}(\xi_1, \dots, \xi_q), \quad C = (c_{sj})_{1,1}^{q,q}, \quad c_{sj} = (c_s \text{ при } s = j) \wedge (0 \text{ при } s \neq j), \\
H &= H^{(1)} + H^{(2)}, \quad H^{(1)} = (h_{sj}^{(1)})_{1,1}^{q,q}, \quad H^{(2)} = (h_{sj}^{(2)})_{1,1}^{q,q}, \\
h_{sj}^{(1)} &= \left(-\frac{\bar{a}_{4s}}{(m+1-\mu)\bar{a}_{2s}^{m/(m+1-\mu)}} \text{ при } s \neq j \right) \wedge (h_{sj}^{(1)} = 0 \text{ при } s = j), \\
h_{sj}^{(2)} &= \left(\frac{\bar{a}_{3s}\nu_s r^\alpha}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{m/(m+1-\mu)}} \text{ при } s = j \right) \\
&\quad \wedge \left(\frac{\bar{a}_{3s}a_{sj}r^\alpha}{(m+1-\mu)\bar{a}_{1s}^{(m-\mu)/(m+1-\mu)}\bar{a}_{1j}^{\mu/(m+1-\mu)}} \text{ при } s \neq j \right).
\end{aligned}$$

Помимо того, что величина r должна быть такой, при которой будет выполняться неравенство (6), но еще и такой, чтобы квадратичная форма $W^{(1)}(\xi) + r^\alpha W^{(2)}(\xi)$ была определенно-отрицательной (очевидно при указанном значении r система (10) имеет единственное изолированное положение равновесия $u_s = 0$, $s = 1, \dots, q$). Такой выбор величины r возможен в силу того, что $W^{(1)}(\xi)$ и $W^{(2)}(\xi)$ являются квадратичными формами [6; с. 48–50]. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво. Докажем, что асимптотическая устойчивость является устойчивостью степенного вида. Для этого рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\left. \frac{dV^{(1)}(u)}{dt} \right|_{(11)} \leq (-\lambda)_{\max} \|u\|^{2\mu}. \quad (15)$$

Здесь $(-\lambda)_{\max}$ – наибольшее характеристическое число матрицы H . Введем снова преобразование $\rho^{(1)} = [V^{(1)}(u)]^{1/(\mu+1)}$. В результате из (15) получим

$$\rho^{(1)}(t) \leq \frac{\rho_0^{(1)}}{\sqrt[\mu-1]{1 + k^{(1)}(1-\mu)(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}(t-t_0)}} \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где $k^{(1)} = (-\lambda)_{\max}/((\mu+1)c_{\max}^{2\mu/(\mu+1)}) < 0$, $\rho_0^{(1)} = \rho^{(1)}(t_0)$, а тогда при $\rho^{(1)}(t_0) = u(t_0)$ будем иметь

$$\|u(t)\| \leq \frac{\rho_0^{(1)} c_{\min}^{-1/(\mu+1)}}{\sqrt[\mu-1]{1 + k^{(1)}(1-\mu)(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}(t-t_0)}} \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Следовательно, с учетом того, что $|u_s(t)| \leq \|u(t)\|$, $\rho_s(t) \leq u_s(t)$, $s = 1, \dots, q$, и неравенств (3), при каждом $s = 1, \dots, q$ справедливы неравенства

$$\|y_s(t)\| \leq \frac{\rho_0^{(1)} c_{\min}^{-1/(\mu+1)} \cdot a_1^{-1/(m+1-\mu)}}{\sqrt[\mu-1]{1 + k^{(1)}(1-\mu)(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}(t-t_0)}} \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (16)$$

Таким образом, установлена асимптотическая устойчивость “частичного” положения равновесия $y = 0$ системы (1₁), (1₂), причем она имеет степенной характер.

Перейдем далее к анализу поведения решений системы (1₂). Используя формулу Коши, будем иметь

$$\begin{aligned}
z_s(t) &= K_s(t, t_0) z_{s0} \\
&\quad + \int_{t_0}^t K_s(t, \tau) [Y_s^{(\mu)}(\tau, y_s(\tau)) + \Phi_s(t, y_s(\tau), z_s(\tau))] d\tau
\end{aligned}$$

$$+ \Phi_{1s}(t, \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau)) + f_s(\tau)] d\tau, \quad s = 1, \dots, q,$$

где $K_s(t, t_0)$ – матрицы Коши систем (22).

В силу равномерной устойчивости [8; с. 81–85] систем (22) $\|K_s(t, t_0)\| \leq N_s$, где N_s – положительные постоянные, не зависящие от t_0 ; $s = 1, \dots, q$.

Тогда с учетом того, что $\|K_s(t, t_0)\| \leq N_s$, а также ограничений на векторные функции $Y_s^{(\mu)}(t, y)$, $\Phi_s(t, y_s, z_s)$, $\Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z})$, $f_s(t)$ при каждом $s = 1, \dots, q$ и неравенств (16), получим

$$\|z_s(t)\| \leq N_s \left\{ \|z_0\| + \frac{b_s(k^{(2)})^\mu}{|k^{(1)}|(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}} + \frac{\gamma_s(k^{(2)})^\eta}{(\eta + 1 - \mu)|k^{(1)}|(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}} + B_s \frac{q(k^{(2)})^\eta}{(\eta + 1 - \mu)|k^{(1)}|(\rho_0^{(1)})^{\mu-1}} + M_s \right\} \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где $k^{(2)} = \rho_0^{(1)} c_{\min}^{-1/(\mu+1)} a_1^{-1/(\mu+1-\mu)}$, $B_s = \sum_{j=1, s \neq j}^q b_{sj}$.

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что*

- 1) *выполнены условия A1), A2);*
- 2) *квадратичная форма $W^{(1)}(\xi) + r^\alpha W^{(2)}(\xi)$ определенно-отрицательная.*

Тогда “частичное” положение равновесия $y = 0$ системы (11), (12) асимптотически устойчиво степенного типа, а ее решения относительно фазовых переменных $z_1, \dots, z_l$ равномерно ограничены (равномерно z -ограничены).

ПРИМЕЧАНИЕ. Условие равномерной устойчивости системы (22) не удастся ослабить, на что указывают результаты работ [8; с. 81–85], [9].

Пусть далее дана система

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} &= X_s^{(\mu)}(y_s) + F_s(t, y_s, z_s, \theta) + F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta), \\ \frac{dz_s}{dt} &= A_s(t)z_s + Y_s^{(\mu)}(t, y_s) + \Phi_s(t, y_s, z_s, \theta) + \Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta) + f_{1s}(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= L(t, y, z, \theta), \quad s = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (17)$$

правые части которой определены в области

$$t \geq t_0, \quad \|x\| \leq r_1, \quad \|\theta\| < +\infty. \quad (18)$$

Будем считать, что правая часть системы (17) удовлетворяет условиям существования и единственности решений задачи Коши в области (18). Помимо этого будем считать, что решения системы (17) θ -продолжимы, т.е. определены для всех $t \geq t_0 \geq 0$, при которых $\|x\| \leq r_1$.

Здесь $X_s^{(\mu)}(y_s)$, $Y_s^{(\mu)}(t, y_s)$, $f_s(t)$ и матрицы $A_s(t)$, $s = 1, \dots, q$, те же, что и в случае системы (11), (12), векторные функции $F_s(t, y_s, z_s, \theta)$, $F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta)$, $\Phi_s(t, y_s, z_s, \theta)$, $\Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta)$ являются непрерывными по совокупности переменных и удовлетворяют при $t \geq t_0 \geq 0$ и $\|x\| \leq r_1$ оценкам

$$\|F_s(t, y_s, z_s, \theta)\| \leq \bar{\nu}_s \|y_s\|^{\mu+\alpha}, \quad \|F_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta)\| \leq \sum_{j=1, s \neq j}^q \tilde{a}_{sj} \|y_j\|^{\mu+\alpha},$$

$$\|\Phi_s(t, y_s, z_s, \theta)\| \leq \bar{\gamma}_s \|y_s\|^\eta, \quad \|\Phi_{1s}(t, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta)\| \leq \sum_{j=1, (s \neq j)}^q \tilde{b}_{sj} \|y_j\|^\eta,$$

$$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{s-1}, 0, y_{s+1}, \dots, y_m), \quad \tilde{z} = (z_1, \dots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \dots, z_l),$$

$$0 < (\alpha \wedge \bar{\nu}_s \wedge \bar{\gamma}_s \wedge \bar{a}_{sj} \wedge \bar{b}_{sj}) = \text{const}, \quad \eta > \mu - 1, \quad s = 1, \dots, q.$$

Предположим, что

$$F_s(t, 0, z, \theta) \equiv F_{1s}(t, 0, \tilde{z}, \theta) \equiv 0, \quad \Phi_s(t, 0, z, \theta) \equiv \Phi_{1s}(t, 0, \tilde{z}, \theta) \equiv 0, \quad L(t, y, z, 0) \equiv 0.$$

Проводя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получим квадратичные формы $W^{(1)}(\xi)$ и $W^{(2)}(\xi)$. Справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что*

- 1) выполнены условия A1) и A2);
- 2) квадратичная форма $W^{(1)}(\xi) + r^\alpha W^{(2)}(\xi)$ определительно-отрицательная.

Тогда относительно фазовых переменных $(y, z) = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_l)$ решения системы (17) обладают свойствами

- 1) “частичное” положение равновесия $y = 0$ асимптотически устойчиво, степенного типа;
- 2) решения системы равномерно z -ограничены.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Воротников, “Об устойчивости и устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия нелинейных динамических систем”, *Докл. РАН*, **389**:3 (2003), 332–337.
- [2] С. А. Алексеева, В. И. Воротников, В. А. Феофанова, “К задачам частичной эквивалентности устойчивости нелинейных динамических систем”, *Автомат. и телемех.*, 2005, № 2, 3–16.
- [3] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [4] В. И. Zubov, *Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение*, Высшая школа, М., 1973.
- [5] А. А. Шестаков, “О степенной асимптотике неавтономной однородной и квазиоднородной системы”, *Дифференц. уравнения*, **11**:8 (1975), 1427–1436.
- [6] Е. А. Барбашин, *Функции Ляпунова*, Наука, М., 1970.
- [7] *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости движения*, ред. А. А. Воронов, В. М. Матросов, Наука, М., 1987.
- [8] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [9] O. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **32**:1 (1930), 703–728.

Е. В. Щенникова

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева,
г. Саранск
E-mail: du@math.mrsu.ru

Поступило

06.07.2005

Исправленный вариант

11.12.2007