Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, Группы с периодическими определяющими соотношениями, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 323–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 03:10:23

Группы с периодическими определяющими соотношениями

С. И. Адян

В работе доказывается разрешимость проблемы распознавания равенства слов и проблемы сопряженности для широкого класса конечно-определенных групп, задаваемых периодическими определяющими соотношениями достаточно большой нечетной степени. В доказательстве используется некоторый упрощенный вариант классификации периодических слов и преобразований этих слов, подробно изложенной в монографии автора, посвященной известной проблеме Бернсайда. В дополнение к этому результату приводится доказательство интересного результата Саркисян о существовании группы с неразрешимой проблемой равенства, задаваемой определяющими соотношениями вида $E_i^2 = 1$. Этот результат был впервые опубликован в тезисах докладов Всесоюзного алгебраического симпозиума в г. Гомеле в 1975 г.

Библиография: 3 названия.

В работе доказывается разрешимость проблемы распознавания равенства слов и проблемы сопряженности для широкого класса конечно-определенных групп, задаваемых периодическими определяющими соотношениями достаточно большой нечетной степени. В дополнение к этому результату приводится доказательство интересного результата Саркисян о существовании группы с неразрешимой проблемой равенства, задаваемой определяющими соотношениями вида $E_i^2 = 1$. Этот результат был впервые опубликован в тезисах докладов Всесоюзного алгебраического симпозиума в г. Гомеле в 1975 г.

В монографии автора [1] была подробно изложена классификация периодических слов и преобразований этих слов, использованная для доказательства бесконечности свободных периодических групп нечетной экспоненты $n \geq 665$ и ряда других результатов. Используя некоторый упрощенный вариант этой теории, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа G задана конечным числом определяющих соотношений вида

$$A_i^{n_i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

в алфавите

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_m^{-1}, \quad (2)$$

причем, $n_i = r_i n$ для каждого i , где все показатели n_i делятся на фиксированное нечетное число $n \geq 665$. Если при этом в группе G нет инволюций, то в ней разрешимы проблема распознавания равенства слов и проблема сопряженности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы "Ведущие научные школы".

При доказательстве теоремы 1 мы будем пользоваться обозначениями и системой ссылок, принятой в работе [1]. Изложенная там в параграфе 4 главы I система понятий была основана на множестве всех несократимых периодических слов вида A^n , где n есть фиксированное нечетное число ≥ 665 . Здесь мы построим аналогичную систему понятий, начиная с заданного конечного числа слов вида (1), где все показатели n_i нечетны и делятся на фиксированное нечетное число $n \geq 665$. При этом в качестве вспомогательных параметров p и q мы можем взять те же значения $p = 9$ и $q = 90$.

Очевидно, мы можем считать, что все периоды A_i в словах (1) несократимы и не являются степенями других слов, а также они не являются циклическими сдвигами друг друга. Отметим, что в ходе доказательства теоремы мы будем строить промежуточные группы разных рангов и заменять периоды A_i на более короткие или сопряженные. При этом в силу условия отсутствия в G инволюций дополнительные множители, возникающие в показателях n_i (при возможной замене периодов A_i на более короткие), не могут стать четными. Так что условие нечетности показателей в (1) не нарушится.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Элементарные периоды, вновь возникающие вместо некоторых A_i , могут оказаться сопряженными или обратными друг другу в рассматриваемой группе. Такие периоды можно назвать “родственными”. В рассматриваемой группе такие периоды имеют один и тот же порядок. Поэтому все такие периоды мы можем заменить одним элементарным периодом, а в качестве показателя степени взять наибольший общий делитель показателей степеней всех “родственных” элементарных периодов данного ранга в (1). Наличие общего кратного $n \geq 665$ во всех показателях слов (1) в формулировке теоремы 1 нужно только для того, чтобы при такой замене эти наибольшие общие кратные не оказались меньше 665. Фактически, мы докажем более сильное утверждение, получаемое из теоремы 1 удалением общего множителя $n \geq 665$ и добавлением условия, что в (1) все показатели n_i не меньше 665 и не становятся меньше 665 при указанной замене их наименьшими общими кратными степеней периодов, которые оказываются сопряженными или обратными в рассматриваемых ниже группах G_j .

Для ранга 0 все понятия остаются без изменений. В частности, все несократимые слова называются *приведенными в ранге 0*, а все слова (1) и их достаточно длинные подслова называются *периодическими словами ранга 1*. Графическое равенство слов мы будем обозначать через $\doteq$. Без ограничения общности можно считать, что слова (1) не содержат подслов вида A_j^s при $j \neq i$ и $s > (n_j + 1)/2$, так как иначе мы могли бы заменить соотношение $A_i^{r_i n} = 1$ новым соотношением $B_i^{r_i n} = 1$, где период B_i короче A_i . В самом деле, тогда в силу простоты рассматриваемых периодов по лемме I.2.9 из [1] такое подслово A_j^s должно входить либо в период A_i , либо в некоторый его циклический сдвиг. Заменив в слове $A_i^{n_i}$ все вхождения слова A_j^s равным ему в группе G словом $A_j^{-n_j+s}$, после возможных сокращений и сопряжений получим искомое слово $B_i^{n_i}$ с более коротким периодом B_i . Очевидно, соотношение (1) группы G можно заменить более коротким соотношением $B_i^{n_i} = 1$. Мы можем сделать то же самое со всеми определяющими соотношениями (1) группы G .

Все периоды A_i являются минимальными периодами ранга 1. Согласно определению I.4.10 из [1] среди них мы можем выделить все элементарные периоды ранга 1 относительно множества периодических слов вида (1). Это будут те периоды A_i , для

которых в слово A_i^3 не входит никакое подслово E длины $\ell(E) > 8\ell(A)$ периодического слова вида $A_j^{n_j}$ из множества (1). Такие слова E в [1] называются 9-степенями или p -степенями, так как у нас $p = 9$.

Затем мы введем повороты ранга 1 для всех периодических слов (1), периоды которых элементарны ранга 1. Эти повороты будут иметь обычную форму,

$$X \doteq pA^t A_1 Q \rightarrow P(A^{-1})^{n_i-t-1} A_2^{-1} Q \doteq Y, \quad (3)$$

где A или A^{-1} есть элементарный период A_i ранга 1 или некоторый его циклический сдвиг, n_i – соответствующий показатель степени в (1), $A \doteq A_1 A_2$, слова X и Y несократимы и слова $A^t A_1$ и $(A^{-1})^{n_i-t-1} A_2^{-1}$ содержат не менее $p = 9$ участков, т.е. являются p -степенями. Напомним, что каждая буква (2) по определению является ядром ранга 0 и всякое вхождение элементарного слова ранга 1 в несократимое слово нормализовано по определению. Естественным образом мы определяем *реальные* повороты ранга 1 вида (3) (это будут q -повороты ранга 1). Напомним, что по определению $q = 90$. На базе реальных поворотов определяется понятие ядра ранга 1 для слов $X \in N_1$, где множество слов N_1 определяется согласно I.4.21 из [1]. Заметим, что в ранге 1 мы рассматриваем только повороты вида (3). Далее согласно I.4.26 из [1] мы определяем множества

$$R_1, K_1, L_1, M_1,$$

отношение эквивалентности ранга 1, обозначаемое через $\sim^1$, а также все остальные понятия ранга 1.

Легко проверить, что доказательства всех необходимых свойств введенных нами понятий ранга 1 проходят без изменений, если не считать естественные упрощения, связанные с простотой самих понятий в ранге 1. Новым является только ограничение класса элементарных слов теми элементарными словами ранга 1, которые получены согласно новым определениям на базе периодических слов множества (1). Далее мы используем все понятия и обозначения из книги [1] с указанным ограничением без особого упоминания об этом. Условие нечетности всех экспонент n_i в поворотах (3) необходимо для выполнения леммы IV.2.36 из [1] и всех основанных на ней утверждений.

Обозначим через G_1 группу, задаваемую порождающими (2) и всеми определяющими соотношениями (1), в которых A_i есть элементарный период ранга 1 в новом смысле. Отныне класс элементарных периодов ранга 1 и определяющих соотношений группы G_1 меняться не будет. Остальные соотношения (1) мы классифицируем позже. Каждое из них будет связано с некоторым элементарным периодом некоторого ранга > 1 , которые мы найдем позже.

Аналогично лемме VI.2.8 из [1] мы можем доказать, что для любых слов $X, Y \in R_1$ выполнено следующее соотношение:

$$X = Y \text{ в группе } G_1 \Leftrightarrow X \sim^1 Y. \quad (4)$$

Как и в VI.2.4 из [1], для любого слова X можно найти такое слово $Y \in R_1$, что $X = Y$ в группе G_1 . В силу IV.3.12 из [1] и эквивалентности (4) такое слово Y можно найти также во множестве $\bar{M}_1$.

Если все периоды A_i в (1) суть элементарные периоды ранга 1, то группа G_1 совпадает с G и мы можем решить проблему равенства слов в G_1 , используя (4).

Допустим, что некоторые из периодов A_i в (1) не являются элементарными в ранге 1. Очевидно, мы можем предполагать, что соответствующие степени (1) все принадлежат множеству R_1 . В силу II.3.7 из [1] все такие периоды A_i будут периодическими словами ранга 2. Для каждого из них соответствующее слово (1) мы преобразуем в ранге 1 в такое слово $Z_i \in \overline{M}_1$, что $A_i^{n_i} \stackrel{1}{\sim} Z_i$. Для каждого такого периода A_i в силу II.7.16 из [1] мы найдем такой минимальный период B_i ранга 2 и такое слово $T_i \in R_1$, что при некотором $k_i > 0$ будет выполнено соотношение

$$A_i \stackrel{1}{\sim} [T_i, B_i^{k_i}, T_i^{-1}]_1. \quad (5)$$

Тогда в группе G_1 выполнено равенство $A_i = T_i B_i^{k_i} T_i^{-1}$. Следовательно, без ограничения общности мы можем переписать все соотношения (1) группы G , в которых период A_i не элементарен в ранге 1, в виде

$$B_i^{k_i r_i n_i} = 1,$$

где все B_i суть минимальные периоды ранга 2. При этом все числа r_i тоже будут нечетны, так как по условию теоремы в рассматриваемой группе нет инволюций. Но если у нас появился новый период B_i ранга 2, которого не было в (1), то мы должны будем сравнить его с остальными периодами ранга 2 на случай, если они сопряжены или взаимно обратны в группе G_1 . В таком случае мы заменяем оба периода на один из них, а в качестве показателя степени берем наибольший общий делитель их степеней. Напомним, что по условию теоремы этот наибольший общий делитель должен быть не меньше 665. Для простоты, чтобы не менять обозначения, можем считать, что уже в (1) все периоды A_i ранга 2 минимальны в ранге 1. В силу предложения II.3.7 из [1] среди них должны быть элементарные периоды ранга 2.

Обозначим через G_2 группу, полученную в результате добавления к соотношениям группы G_1 всех соотношений (1) для элементарных периодов ранга 2. Отныне класс элементарных периодов ранга 2 и определяющих соотношений группы G_2 также не будет меняться. Если все соотношения (1) этим исчерпаны, то группа G_2 совпадает с G .

Рассматривая повороты вида (3) для элементарных периодов ранга 2, выделим среди них реальные повороты ранга 2 и определим все нужные нам понятия в ранге 2: понятие ядра ранга 2, множества R_2 , K_2 , L_2 , M_2 , $\overline{M}_2$ и отношение эквивалентности ранга 2, обозначаемое $X \stackrel{2}{\sim} Y$. Для внимательного читателя заметим, что в ранге 1 множества M_1 и $\overline{M}_1$ совпадали, так как у нас не было поворотов ранга 0. Но уже в ранге 2 они могут отличаться.

Аналогично соотношению (4) для любых слов $X, Y \in R_2$ мы можем доказать соотношение

$$X = Y \text{ в группе } G_2 \Leftrightarrow X \stackrel{2}{\sim} Y. \quad (6)$$

Так как все используемые нами понятия определены конструктивно, мы имеем простой алгоритм для нахождения по любому данному слову X в алфавите (2) такого слова $Y \in R_2$, что $X = Y$ в G_2 . Поэтому из (6) следует, что для группы G_2 разрешима проблема распознавания равенства.

Все периоды A_i ранга 2, которые не являются элементарными периодами ранга 2, в силу II.3.7 из [1] будут периодическими словами ранга 3, так как все соответствующие степени (1) мы можем считать принадлежащими множеству R_2 . Далее аналогично предыдущему рангу найдем для них некоторые минимальные периоды B_i ранга 3 и соответствующие соотношения сопряженности (5). После этого произведем замены всех сопряженных или взаимно обратных минимальных периодов на один из них с соответствующей заменой у него показателя степени. Далее в целях упрощения новых обозначений придем к соглашению, что с самого начала можно было считать в (1) все эти периоды A_i минимальными в ранге 3. Выделим среди них элементарные периоды ранга 3 и добавим соответствующие им соотношения (1) к группе G_2 . Таким образом получим группу G_3 , соотношения которой больше меняться не будут.

Продолжая изложенную процедуру классификации далее, мы через конечное число шагов исчерпаем множество определяющих соотношений (1). Очевидно, полученная при этом группа G_α будет совпадать с исходной группой G , а α будет максимальным рангом периодических и элементарных слов в полученной классификации.

Разрешимость проблемы распознавания равенства слов во всех построенных нами промежуточных группах G_α естественно вытекает из конечности множества соотношений (1) и конструктивности всех наших определений аналогично тому, как это было получено в [1] для групп $B(m, n, \alpha)$.

Разрешимость проблемы сопряженности для группы G получим на основе найденного нами представления группы G точно так же, как в VI.3.5 из [1] была доказана разрешимость проблемы сопряженности для свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие конечности числа соотношений (1) в группе G является существенным для теоремы 1, так как уже в двубуквенном алфавите

$$a, b, a^{-1}, b^{-1} \quad (7)$$

для произвольного $n \geq 4$ можно указать такую бесконечную рекурсивную последовательность простых слов

$$B_1, B_2, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, \quad (8)$$

что группа, задаваемая порождающими (8) и рекурсивной системой определяющих соотношений

$$B_i^n = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

имеет неразрешимую проблему распознавания равенства слов, а значит, и неразрешимую проблему сопряженности.

В самом деле, пусть $n \geq 4$. Легко проверить, что система определяющих соотношений

$$A_i^n \triangleq (a^i b^i a^{-i} b^{-i})^n = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

удовлетворяет условию малого сокращения для $1/6$ (см. теорему 4.5 главы V книги [2]). Поэтому ни одно из этих соотношений не следует из всех остальных. Рассмотрим произвольное нерекурсивное, но рекурсивно-перечислимое, множество натуральных чисел E . Пусть дан алгоритм пересчитывающий все элементы множества E ,

$$j_1, j_2, j_3, \dots \quad (11)$$

Нерекурсивность множества E означает, что невозможен алгоритм распознавания по натуральному числу m принадлежит ли оно множеству E . Очевидно, группа H , заданная определяющими соотношениями

$$(A_{j_1})^n = 1, \quad (A_{j_2})^n = 1, \quad (A_{j_3})^n = 1, \quad \dots, \quad (12)$$

имеет неразрешимую проблему равенства слов, так как соотношение $A_i^n = 1$ выполняется в группе H в том и только том случае, если $i \in E$. Система определяющих соотношений (12) не рекурсивна. В качестве искомой рекурсивной последовательности (9) можно взять следующую рекурсивную последовательность:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_{j_1}, \quad B_2 = (A_{j_1})^n A_{j_2}, \quad B_3 = (A_{j_1})^n (A_{j_2})^n A_{j_3}, \quad \dots, \\ B_{r+1} &= (A_{j_1})^n (A_{j_2})^n \dots (A_{j_r})^n (A_{j_{r+1}}) \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

которая задает ту же группу H с неразрешимой проблемой равенства. Рекурсивность этой последовательности следует из того, что в ней длины слов монотонно растут.

При $n = 3$ можно провести такие же рассуждения, если в соотношениях (10) взять $A_i \doteq a^i b^i a^{-i} b^{-i} c^i$, добавив к числу порождающих (7) третью букву c . Легко убедиться, что и в этом случае соотношения $A_i^n = 1$ будут удовлетворять условию малого сокращения для $1/6$.

В связи с теоремой 1 представляет несомненный интерес построенный в кандидатской диссертации [3] пример конечно-определенной группы с неразрешимой проблемой равенства слов, все определяющие соотношения которой являются квадратами простых слов. На самом деле, предложенная в [3] конструкция для любой наперед заданной конечно-определенной группы дает естественное вложение ее в группу, порожденную инволюциями, причем, все определяющие соотношения этого расширения являются квадратами простых слов. Однако, изложенное в [3] доказательство этого результата содержит неточности. При этом сама диссертация доступна читателю только в МГУ. Поэтому мы приведем здесь этот интересный результат с подробным доказательством. Фактически, в [3] нет доказательства ключевой леммы 1 параграфа 4, которая интересна сама по себе.

ТЕОРЕМА 2 (О. А. Саркисян). *Существует конечно определенная группа с неразрешимой проблемой равенства, порожденная инволюциями и задаваемая определяющими соотношениями вида $E_i^2 = 1$, где все слова E_i не являются степенями других слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid A_i = 1, i = 1, 2, \dots, m \rangle$$

имеет неразрешимую проблему равенства. Рассмотрим группу G_1 , заданную порождающими

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \quad (14)$$

и определяющими соотношениями

$$A_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad b_j^2 = 1, \quad a_j b_j = b_j a_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Пользуясь терминологией Новикова (см. [2; с. 52]), можно сказать, что в группе G_1 порождающие b_j образуют систему проходных букв. Однако в отличие от классического случая, где проходные буквы не могут входить в другие соотношения и обязательно имеют бесконечный порядок, здесь буквы b_j имеют порядок 2. Поэтому, формально говоря, мы не можем говорить, что они образуют правильную систему проходных букв. Однако нетрудно показать, что в этом случае группа G также вкладывается в группу G_1 .

ЛЕММА 1. *Группа G_1 является естественным расширением группы G , т.е. любые два слова в алфавите группы G равны в G тогда и только тогда, когда они равны в группе G_1 , т.е. группа G_1 также имеет неразрешимую проблему равенства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение леммы очевидно. Пусть два слова X и Y равны в группе G_1 , т.е. имеется последовательность элементарных преобразований группы G_1

$$X \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y. \quad (16)$$

Если в этой последовательности нет вставок букв b_j , т.е. преобразований вида

$$UV \rightarrow Ub_j^2V, \quad (17)$$

то буквы b_j не участвуют в преобразованиях (16). Тогда слова X и Y равны в группе G . Так что нам остается доказать, что в последовательности (16) можно исключить все вставки вида (17). Выделим последнюю вставку вида (17) в последовательности (16):

$$X \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \doteq UV \rightarrow Ub_j^2V \doteq X_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow Y. \quad (18)$$

Вставленные в слово UV буквы b_j должны будут потом сократиться, так как в слове Y нет таких букв. А до этого они могут участвовать только в преобразованиях вида

$$Ua_jb_jV \rightleftharpoons Ub_ja_j^{-1}V. \quad (19)$$

Мы будем считать, что в преобразованиях вида (19) выделенные в правой и левой частях вхождения буквы b_j тождественны по индивидуальности. Иначе говоря, мы считаем, что в этих преобразованиях буква b_j не затрагивается, а соседняя буква $a_j^{\pm 1}$ просто перепрыгивает через него вправо или влево, меняя при этом знак в показателе степени. Очевидно, по модулю вставок и сокращений буквы a_j каждое преобразование вида (19) можно выполнить в виде

$$Ub_jV \rightarrow Ua_j^{\pm 1}b_ja_j^{\pm 1}V. \quad (20)$$

В таком случае, переставляя порядок независимых преобразований в (18), мы можем все преобразования вида (19), в которых участвует буква b_j данной индивидуальности от момента вставки до момента ее сокращения, объединить в виде одного суммарного преобразования вида

$$Ub_jV \rightarrow Ua_j^h b_j a_j^h V, \quad (21)$$

где h – целое число.

Так как выделенная в (18) вставка слова b_j^2 является последней и обе вставленные при этом буквы должны сократиться, то возможны только следующие 3 случая:

- 1) выделенные в слове x_{k+1} индивидуальности буквы b_j после участия в некоторых преобразованиях вида (19) сокращаются между собой;
- 2) стоящая справа буква b_j в последовательности (19) сокращается раньше той буквы b_j , которая была слева;
- 3) стоящая слева буква b_j сокращается в (19) раньше той буквы b_j , которая была справа.

В случае 1), объединив, как указано выше, все преобразования вида (19), в которых участвует каждая из вставленных букв b_j , в виде (21), мы можем записать последовательность (19) в виде

$$\begin{aligned} X \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \stackrel{\circ}{=} UV \rightarrow Ub_j b_j V \rightarrow Ua_j^h b_j a_j^h b_j V \\ \rightarrow Ua_j^h b_j a_j^h a_j^t b_j a_j^t V \stackrel{\circ}{=} Z \rightarrow \dots \rightarrow X_s \stackrel{\circ}{=} U_1 b_j b_j V_1 \rightarrow U_1 V_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y, \end{aligned} \quad (22)$$

где X_s есть то самое слово последовательности (19), в котором наши буквы b_j оказались рядом в момент взаимного сокращения.

Рассмотрим конец последовательности (22), начинающийся со слова Z . На этом участке нет вставок букв b_j , а выделенные в Z буквы b_j в преобразованиях не участвуют. Поэтому здесь мы имеем следующие самостоятельные цепочки элементарных подстановок без вставок букв b_j :

$$Ua_j^h \rightarrow \dots \rightarrow U_1, \quad (23)$$

$$a_j^h a_j^t \rightarrow \dots \rightarrow 1, \quad (24)$$

$$a_j^t V \rightarrow \dots \rightarrow V_1, \quad (25)$$

$$U_1 V_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y. \quad (26)$$

Цепочка преобразований (24) без вставок букв b_j означает, что $a^h a^t = 1$ в группе G , т.е. мы можем указать цепочку преобразований группы G

$$1 \rightarrow a_j^h a_j^t. \quad (27)$$

Теперь легко видеть, что слово X_k можно преобразовать в слово Y , используя последовательно цепочки (27), (24), (25) и (26), в которых нет вставок букв b_j , т.е. последняя вставка букв b_j в последовательности (22) исключается.

Случай 2). В слове V выделим и подчеркнем то вхождение буквы b_j , которое должно сократиться с буквой b_j из последней вставки. Пусть $V \stackrel{\circ}{=} V_1 \underline{b_j} V_2$. Тогда конец последовательности (19), начиная со слова X_k , запишется в виде

$$X_k \stackrel{\circ}{=} UV_1 \underline{b_j} V_2 \rightarrow Ub_j b_j V_1 \underline{b_j} V_2 \stackrel{\circ}{=} Z \rightarrow \dots \rightarrow U' b_j \underline{b_j} V_2' \rightarrow U' V_2' \rightarrow \dots \rightarrow Y. \quad (28)$$

Объединив все преобразования вида (19), в которых участвует каждая из сокращаемых букв b_j , аналогично случаю 1) получим следующие самостоятельные цепочки преобразований без вставок букв b_j :

$$Ub_j a_j^h \rightarrow \dots \rightarrow U', \quad (29)$$

$$a_j^h V_1 a_j^t \rightarrow \dots \rightarrow 1, \quad (30)$$

$$a_j^t V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_2', \quad (31)$$

$$U' V_2' \rightarrow \dots \rightarrow Y. \quad (32)$$

Далее, используя вставки a_j и последовательно цепочки преобразований

$$\underline{b}_j \rightarrow a_j^t a_j^h \underline{b}_j a_j^h a_j^t,$$

(31), (30), (32) и (33), мы получим следующую последовательность элементарных преобразований группы G_1 , не содержащую вставок букв b_j :

$$\begin{aligned} X_k \stackrel{\circ}{=} U V_1 \underline{b}_j V_2 &\rightarrow U a_j^{-h} a_j^h V_1 \underline{b}_j V_2 \rightarrow U a_j^{-h} a_j^h V_1 a_j^t a_j^h \underline{b}_j a_j^h a_j^t V_2 \\ &\rightarrow U \underline{b}_j a_j^h a_j^t V_2 \rightarrow \dots \rightarrow U' V' \rightarrow \dots \rightarrow Y. \end{aligned} \quad (33)$$

Тем самым мы доказали, что и в случае 2) последняя вставка b_j в (19) исключается. Аналогично она исключается и в случае 3).

Лемма 1 доказана.

Мы доказали, что любая конечно-определенная группа

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid A_i = 1, i = 1, 2, \dots, m \rangle$$

вкладывается в группу G_1 , задаваемую порождающими (15) и определяющими соотношениями (16). Очевидно, соотношения $a_j b_j = b_j a_j^{-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, можно записать в виде

$$(a_j b_j)^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Если добавить к порождающим (15) новые буквы $c_1, c_2, \dots, c_n$ и новые соотношения

$$a_j = c_j b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

то получим эквивалентное задание той же группы G_1 . Теперь можно подставить значение букв a_j из (35) во все определяющие соотношения нашей группы, а затем исключить эти буквы из алфавита. Тем самым мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Группа G вкладывается в группу G_1 , задаваемую порождающими*

$$b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n \quad (36)$$

и определяющими соотношениями

$$E_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad b_j^2 = 1, \quad c_j^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

где слова E_j получены из A_j заменой каждой буквы a_j на $c_j b_j$.

Для доказательства теоремы 2 мы используем группу G_1 с неразрешимой проблемой равенства, задаваемую порождающими (36) и определяющими соотношениями вида (37). Рассмотрим группу G_2 , задаваемую теми же порождающими (36) и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} b_j^2 = 1, \quad c_j^2 = 1, \quad (E_i)^2 = 1, \quad (b_j E_i)^2 = 1, \quad (c_j E_i)^2 = 1, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (38)$$

Очевидно, любое равенство группы G_2 выполнено и в группе G_1 . С другой стороны, если слово X равно 1 в группе, то по известной теореме Дика найдутся такое число k и слова $T_1, T_2, \dots, T_k$, что в свободной группе выполняется равенство

$$X = T_1 D_1 T_1^{-1} T_2 D_2 T_2^{-1} \dots T_k D_k T_k^{-1}, \quad (39)$$

где слова D_i являются левыми частями определяющих соотношений (37) группы G_1 или обратные им слова. Так как в группе G_2 слова E_j коммутируют со всеми порождающими, а соотношения $b_j^2 = 1$ и $c_j^2 = 1$ выполнены и в группе G_2 , то из равенства (39) свободной группы вытекает, что в группе G_2 слово X равно некоторому слову вида

$$X = E_{i_1}^{\pm 1} E_{i_2}^{\pm 1} E_{i_3}^{\pm 1} \dots E_{i_r}^{\pm 1}, \quad (40)$$

где все номера i_j определяющих слов различны. Если бы у нас был алгоритм, решающий проблему равенства слов в группе G_2 , то мы бы могли проверить равенство (40) для каждого значения правой части и по итоговому результату сделать заключение о том, верно ли равенство $X = 1$ в группе G_1 . Но по условию в группе G_1 проблема равенства неразрешима.

Теорема 2 доказана.

Интересно было бы выяснить, существуют ли аналогичные примеры конечно определенных групп с неразрешимой проблемой равенства, задаваемые только соотношениями, левые части которых являются кубами простых слов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975; англ. пер.: S. I. Adian, *The Burnside Problem and Identities in Groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **95**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
- [2] С. И. Адян, В. Г. Дурнев, “Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп”, *УМН*, **55:2** (2000), 3–94.
- [3] О. А. Саркисян, *Проблема равенства слов для некоторых классов групп и полугрупп*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1983.

С. И. Адян

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило

25.09.2007