Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Задерей, Е. Н. Пелагенко, Условия Боаса–Теляковского интегрируемости кратных тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 627–631

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:29:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Условия Боаса–Теляковского интегрируемости кратных тригонометрических рядов

П. В. Задерей, Е. Н. Пелагенко

Пусть m – произвольное натуральное число, $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_m)$;

$$\mathbb{Z}_+^m = \{k \in \mathbb{R}^m : k_i = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, m\}.$$

Обозначим через $L_1(\mathbb{T}^m)$ пространство определенных на $\mathbb{T}^m$ 2π -периодических интегрируемых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{T}^m)} = \int_{\mathbb{T}^m} |f(x)| dx < \infty,$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$; при $m = 1$ $L_1 := L_1(\mathbb{T}^1)$ и для всех $f \in L_1$ имеем $\|f\|_1 := \|f\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + \dots + l_m = k} e^{i(l, x)}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{T}^m$, $l \in \mathbb{Z}_+^m$, $(l, x) = \sum_{j=1}^m l_j x_j$, с последовательностью коэффициентов $a = \{a_k\}$, удовлетворяющих условиям

$$a_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$T(a) := \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| < \infty, \quad (3)$$

где, как обычно, $\Delta a_k := a_k - a_{k+1}$ для всех $k \geq 0$. Условия (3) называют условиями Боаса–Теляковского. Известно [1], что условия (2) и (3) являются достаточными для того, чтобы тригонометрический ряд $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ был рядом Фурье интегрируемой функции; при выполнении условий (2) и (3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ является рядом Фурье в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty. \quad (4)$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\int_0^\pi \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \leq CT(a), \quad \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right| dx \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right).$$

Здесь и далее через C будем обозначать абсолютные положительные константы, возможно разные в разных формулах.

Обширная библиография, посвященная условиям интегрируемости одномерных тригонометрических рядов, имеется в [1], [2], а условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов были получены в работах [3]–[10]. Целью данной работы является доказательство m -мерного аналога одномерных теорем Теляковского [1]. Нами доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям (2) и (3). Тогда ряд (1) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и является ее рядом Фурье–Лебега тогда и только тогда, когда сходится ряд (4).

При этом, если ряд (4) сходится, то справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{T}^m} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(x) \right| dx \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k F_k(x)$ частную сумму ряда (1). В работе [6] Кузнецовой доказано, что при выполнении условий (2) и $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty$ ряд (1) сходится почти всюду на $\mathbb{T}^m$ к некоторой функции $f(x)$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ почти всюду на $\mathbb{T}^m$. Рассмотрим модифицированный метод суммирования Валле–Пуссена

$$V_{2n,n}^*(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(V_{2n,n}(x)) = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda_k^{(n)})^2 a_k F_k(x),$$

где

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, \dots, n, \\ \frac{2n-k+1}{n+1}, & k = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2n,n}^*(x) = f(x)$ почти всюду на $\mathbb{T}^m$.

Докажем интегрируемость функции f . Для этого согласно теореме Фату достаточно показать, что имеет место неравенство

$$\int_{T^m} |V_{2n,n}^*(x)| dx \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right).$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$\int_{T^m} |V_{2n,n}^*(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{2n} (\lambda_k^{(n)})^2 a_k F_k(x) e^{ikt} \right| dt \right) dx. \quad (6)$$

Подынтегральную функцию $\sum_{k=0}^{2n} (\lambda_k^{(n)})^2 a_k F_k(x) e^{ikt}$ в (6) можно представить в виде свертки [11; с. 64]

$$\sum_{k=0}^{2n} (\lambda_k^{(n)})^2 a_k F_k(x) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(u) g_{n,x}(t-u) du,$$

где

$$h_n(u) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} a_k e^{iku}, \quad g_{n,x}(u) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} F_k(x) e^{iku}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{2n} (\lambda_k^{(n)})^2 a_k F_k(x) e^{ikt} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} h_n(u) g_{n,x}(t-u) du \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \|h_n\|_1 \cdot \|g_{n,x}\|_1. \quad (7)$$

Таким образом, из (6) и (7) следует

$$\int_{T^m} |V_{2n,n}^*(x)| dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \|h_n\|_1 \int_{T^m} \|g_{n,x}\|_1 dx = \frac{1}{2\pi} \|h_n\|_1 \int_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} F_k(x) \right| dx. \quad (8)$$

Для оценки величины $\|h_n\|_1$ применим метод, предложенный Теляковским в [12]. Определим последовательность $\beta = \{\beta_k\}$ как в лемме 2 из [12]:

$$\beta_k = \begin{cases} a_k, & 0 \leq k \leq n, \\ \frac{2n+1-k}{n+1} a_k, & n+1 \leq k \leq 2n, \\ 0, & k \geq 2n+1. \end{cases}$$

Для последовательности $\{\beta_k\}$ справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{|a_k|}{k}, \quad T(\beta) \leq C \left(\sum_{k=0}^{3n} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{2n} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| \right) < \infty,$$

следовательно, все условия теорем 1 и 2 из [1] выполнены, поэтому

$$\begin{aligned} \|h_n\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{iku} \right| du \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos ku \right| du + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin ku \right| du \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{k} + T(\beta) \right) \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для доказательства неравенства

$$\int_{\mathbb{T}^m} \left| \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} F_k(x) \right| dx \leq C < \infty \quad (10)$$

применим следствие 1 работы [13], где показано, что константы Лебега–Ландау $L_n^m(\Lambda)$ линейных методов суммирования по треугольным областям рядов Тейлора функций из класса Харди $H_1^m := H_1(\mathbb{D}^m)$ не зависят от числа m , т.е.

$$L_n^m(\Lambda) := \sup_{\|f\|_{H_1^m} \leq 1} \left\| \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu}^{(n)} \sum_{l_1+\dots+l_m=\nu} c_l(f) z^l \right\|_{H_1^m} = \sup_{\|g\|_{H_1^1} \leq 1} \left\| \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu}^{(n)} c_{\nu}(g) z^{\nu} \right\|_{H_1^1} =: L_n^1(\Lambda),$$

где $\Lambda := \{\lambda_{\nu}^{(n)}\}$, $n = 0, \dots, \infty$, $\nu = 0, \dots, n$, – бесконечная треугольная матрица, $z^1 = z_1^{l_1} \dots z_m^{l_m}$,

$$\mathbb{D}^m = \{z = (z_1, \dots, z_m) : |z_j| < 1, j = 1, \dots, m\}.$$

В частности, когда матрица $\Lambda = V_{n,k} := \{\lambda_{\nu}^{(n)}\}$, где

$$\lambda_{\nu}^{(n)} = 1 \quad \text{при } 0 \leq \nu \leq k, \quad \lambda_{\nu}^{(n)} = \frac{n-\nu+1}{n-k+1} \quad \text{при } k \leq \nu \leq n, \quad k \leq n,$$

определяет метод суммирования Валле-Пуссена. Из работы Тайкова [14] следует, что для констант Лебега–Ландау

$$L_n^m(V_{n,k}) = L_n^1(V_{n,k}) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n+1}{n-k+1} + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Справедливость неравенства (10) следует из (11), а оценки (5) – из (8)–(10).

Для доказательства необходимости условия (4) применим многомерный аналог неравенства Харди–Литлвуда (см. [15; с. 64]) и оценку $\|F_k\|_{H_1^m} \geq C \ln^{m-1} k$ [16]:

$$\|f\|_{L_1(T^m)} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k \right\|_{H_1^m} \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1} \|F_k\|_{H_1^m} \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1} \ln^{m-1}(k+2) \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

Покажем теперь, что ряд (1) есть ряд Фурье функции f . Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и $s := \sum_{i=1}^m \nu_i$. Найдём коэффициенты Фурье $\hat{f}_\nu$ функции f . Выберем $n \geq s+1$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{f}_\nu &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(x) e^{-i(\nu, x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(x) e^{-i(\nu, x)} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} a_k F_k(x) e^{-i(\nu, x)} dx + \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \sum_{k=0}^{\infty} b_k F_k(x) e^{-i(\nu, x)} dx = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $b_k = 0$ при $0 \leq k \leq n$, $b_k = 1 - \lambda_k^{(n)} = (k-n)/(n+1)$ при $n+1 \leq k \leq 2n$ и $b_k = a_k$ при $k \geq 2n+1$.

Из ортогональности системы $\{e^{i(l, x)}\}$ следует, что $I_1 = a_s$.

Осталось показать, что $I_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для последовательности $b := \{b_k\}$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k| \leq C \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty, \quad (13)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta b_{k-l} - \Delta b_{k+l}) \right| \leq C \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| + \sum_{k=[n/2]}^{3n} |\Delta a_k| \right) < \infty. \quad (14)$$

Неравенства (13) очевидны, а доказательство оценки (14) легко получить, используя соображения, приведенные в доказательстве леммы 2 из [12]. Следовательно, для оценки интеграла I_2 из (12) можно применить неравенство (5):

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k F_k(x) \right| dx \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + T(b) \right) \\ &\leq C \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + \sum_{k=n}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| + \sum_{k=[n/2]}^{\infty} |\Delta a_k| \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{f}_\nu = a_s$, что и требовалось доказать.

Авторы благодарят рецензента и С. А. Теляковского за существенные замечания, способствующие улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Теляковский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28** (1964), 1209–1236. [2] Z. Tomovski, *Convergence and Integrability on Some Classes of Trigonometric Series*, Thesis, St. Kiril and Metodij University, Skopje, 2000. [3] Я. С. Бугров, *Тр. науч. общед. преподав. физ.-матем. фак-та пед. ин-та Дальнего Востока*, т. 1, 1962, 28–49. [4] С. А. Теляковский, *Ортогональные ряды и приближение функций*, Тр. МИАН, **164**, Наука, М., 1983, 180–188. [5] Ю. Л. Носенко, *Теория функций и смежные вопросы анализа*, Тр. МИАН,

180, Наука, М., 1989, 166–168. [6] О. И. Кузнецова, *Константы Лебега и аппроксимативные свойства линейных средних кратных рядов Фурье*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, Институт прикладной математики и механики АН УССР, Донецк, 1985. [7] О. И. Кузнецова, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 402–406. [8] F. Móricz, *J. Math. Anal. Appl.*, **154**:2 (1991), 452–465. [9] F. Móricz, *J. Math. Anal. Appl.*, **165**:2 (1992), 419–437. [10] П. В. Задерей, *Укр. матем. журн.*, **44**:3 (1992), 340–365. [11] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965. [12] С. А. Теляковский, *Приближение периодических функций*, Тр. МИАН, **109**, Наука, М., 1971, 65–97. [13] В. В. Савчук, М. В. Савчук, *Укр. матем. журн.*, **54**:12 (2002), 1669–1679. [14] Л. В. Тайков, *УМН*, **17**:1 (1962), 223–230. [15] У. Рудин, *Теория функций в полукруге*, Мир, М., 1974. [16] А. Н. Подкорытов, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 1982, № 2, 110–111.

П. В. Задерей

Киевский национальный университет
технологии и дизайна, г. Киев
E-mail: ljenchik@bigmir.net

Поступило
28.09.2007

Е. Н. Пелагенко

Киевский национальный университет технологии и дизайна
E-mail: ljenchik@bigmir.net