Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Гулецкий, О дзета-функциях в триангулированных категориях, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 369–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:32:18

О дзета-функциях в триангулированных категориях

В. И. Гулецкий

В работе доказывается “два-из-трех” свойство рациональности мотивной дзета-функции в выделенных треугольниках в категории Воеводского $\mathcal{DM}$. В качестве приложения мы получаем рациональность мотивной дзета-функции для всех многообразий, мотивы которых лежат в насыщенной триангулированной тензорной подкатегории, порожденной мотивами квазипроективных кривых в $\mathcal{DM}$. Вместе с результатом П. О’Сулливана это дает первый пример многообразия, мотив которого не является конечномерным, а его мотивная дзета-функция, тем не менее, рациональна.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. В [1] и [2] Андрэ показал, что если X – это объект псевдо-абелевой жесткой тензорной $\mathbb{Q}$ -категории $\mathcal{T}$, конечномерный в смысле Кимуры [3], то соответствующая мотивная дзета-функция $\zeta_X(t)$ является рациональным рядом в кольце $K_0(\mathcal{T})[[t]]$, где коэффициенты $K_0(\mathcal{T})$ – это кольцо Гротендика категории $\mathcal{T}$. В частности, дзета-функция рациональна для мотивов абелевого типа в категории мотивов Чжоу $\mathcal{M}$ [3]. Кроме того, Хайнлот доказала, что для таких мотивов дзета-функция удовлетворяет функциональному уравнению (см. [4]).

Понятие мотивной дзета-функции естественным образом связано со многими важными задачами в арифметике и геометрии. Оно было введено Капрановым в [5], который показал ее рациональность и функциональное уравнение для гладких проективных кривых над полем относительно любой мотивной меры μ , удовлетворяющей условию $\mu(\mathbb{A}^1) \neq 0$. В частности, если μ считает число точек неособой проективной кривой X , определенной над конечным полем, то дзета-функция ее мотива $M(X)$ – это обычная дзета-функция Хассе–Вейля, ассоциированная с кривой X . Рациональность дзета-функции Хассе–Вейля для всех многообразий над конечным полем была доказана Дворком в [6].

Цель настоящей заметки – показать, что мотивная дзета-функция мультипликативна относительно выделенных треугольников в категории $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T}$ является гомотопической категорией некоторой симплициальной модельной и моноидальной категории $\mathcal{C}$. В качестве приложения мы показываем рациональность мотивных дзета-функций всех многообразий, мотивы которых лежат в насыщенной (thick) триангулированной и тензорной подкатегории категории Воеводского $\mathcal{DM}$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ [7], порожденной мотивами квазипроективных кривых над полем.

Вместе с некоторым результатом П. О'Сулливана, это дает пример многообразия, чей мотив не является конечномерным по Кимуре, но его мотивная дзета-функция, тем не менее, рациональна.

2. Напоминания. Пусть $k = \mathbb{F}_q$ – конечное поле, состоящее из q элементов, X – алгебраическое многообразие над $\mathbb{F}_q$ и $\#X(\mathbb{F}_q)$ – число $\mathbb{F}_q$ -рациональных точек на X . Тогда обычная дзета-функция Хассе–Вейля ζ_X , ассоциированная с X , может быть определена по формуле

$$\zeta_X(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \#X(\mathbb{F}_{q^n}) \frac{t^n}{n}\right).$$

Пусть $\mathrm{Sym}^n X$ – симметрическая степень X , т.е. фактор $X^{\times n}$ по действию симметрической группы Σ_n . Рациональные над $\mathbb{F}_{q^n}$ точки многообразия X могут быть проинтерпретированы как точки многообразия $\mathrm{Sym}^n X$, рациональные над $\mathbb{F}_q$. Учитывая это, а также применяя экспоненциальную формулу из комбинаторики, можно показать, что

$$\zeta_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \# \mathrm{Sym}^n X(\mathbb{F}_q) t^n.$$

Для любого поля k пусть $\mathcal{V}ar$ – это категория квазипроективных многообразий над k , и пусть $\mathbb{Z}[\mathcal{V}ar]$ – свободная абелева группа, порожденная классами изоморфизмов многообразий из $\mathcal{V}ar$. Группа Гротендика $K_0(\mathcal{V}ar)$ категории $\mathcal{V}ar$ является, по определению, фактором $\mathbb{Z}[\mathcal{V}ar]$ по минимальной подгруппе, порожденной соотношениями вида $[X] = [Z] + [X \setminus Z]$, где Z – замкнутое подмногообразие в X . Тогда $K_0(\mathcal{V}ar)$ естественным образом является коммутативным кольцом с единицей и произведением, индуцированным расслоенными произведениями многообразий над k . Мотивная мера μ – это просто кольцевой гомоморфизм $\mu: K_0(\mathcal{V}ar) \rightarrow A$ в любое другое кольцо A . Мера μ тотчас дает мотивную дзета-функцию, ассоциированную с X , с коэффициентами в A :

$$\zeta_{X,\mu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu[\mathrm{Sym}^n X] t^n$$

(см. [5]). Например, если μ считает число точек многообразия X над конечным полем k , то $\zeta_{X,\mu}(t)$ – это в точности дзета-функция Хассе–Вейля для X . В этом случае $\zeta_X(t)$ рациональна по результату Дворка [6].

Капранов доказал [5; 1.1.9], что $\zeta_{X,\mu}(t)$ рациональна, если X – неособая проективная кривая, обладающая дивизором степени один, кольцо A является полем, и мотивная мера $\mu(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой не равна нулю. С другой стороны, Ларсен и Лунц показали [8], что существует мера μ , построенная по числам Ходжа $h^{i,0}$, такая, что $\zeta_{X,\mu}$ не рациональна, если X – это поверхность с $h^{2,0} \neq 0$.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ – категория мотивов Чжоу над k с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ (см. [9]). Так как она является тензорной, мы можем определить кольцо Гротендика $K_0(\mathcal{M})$ категории $\mathcal{M}$, взяв прямые суммы в качестве сложения и тензорное произведение в качестве умножения в K_0 . В [10] Жилле и Суле построили мотивную меру

$$\mu_{GS}: K_0(\mathcal{V}ar) \rightarrow K_0(\mathcal{M}),$$

переводящую класс $[X]$ неособого проективного многообразия X в класс $[M(X)]$ его мотива $M(X)$ в $\mathcal{M}$. Для любого $M \in \text{Ob } \mathcal{M}$ пусть

$$\zeta_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\text{Sym}^n M] t^n$$

– соответствующая дзета-функция с коэффициентами в $K_0(\mathcal{M})$. Как показано в [11], $\mu_{GS}[\text{Sym}^n X] = [\text{Sym}^n M(X)]$, откуда

$$\zeta_{M(X)} = \zeta_{X, \mu_{GS}}$$

для любого X . Если M – мотив Чжоу, конечномерный в смысле Кимуры, то $\zeta_M(t)$ является рациональной (см. [1] и [2]).

Широкое обобщение приведенных выше конструкций может быть сделано следующим образом. Пусть $\mathcal{A}$ – это любая псевдоабелева¹ симметрическая моноидальная $\mathbb{Q}$ -линейная категория с моноидальным произведением $\otimes$. Внешние и симметрические степени любого объекта X в $\mathcal{A}$ определяются как образы соответствующих идемпотентов в групповой алгебре симметрической группы Σ_n , действующей на $X^{\otimes n}$ перестановками факторов. Пусть, далее, $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]$ – свободная абелева группа, порожденная классами изоморфизмов объектов в $\mathcal{A}$, и пусть $K_0(\mathcal{A})$ – группа Гротендика категории $\mathcal{A}$, т.е. фактор $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]$ по минимальной подгруппе, порожденной соотношениями $[X \oplus Y] - [X] - [Y]$. Ясно, что она обладает кольцевой структурой, индуцированной моноидальным произведением $\mathcal{A}$.

Напомним, что лямбда-структура на коммутативном кольце A с единицей 1 – это набор отображений $\lambda^i: A \rightarrow A$, $i = 0, 1, 2, \dots$, такой, что $\lambda^0(a) = 1$, $\lambda^1(a) = a$ и $\lambda^n(a+b) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(a) \lambda^j(b)$ для всех a и b в A . Она может также быть определена как групповой гомоморфизм

$$\lambda_t: A \rightarrow 1 + A[[t]]^+, \quad a \mapsto \lambda_t(a) = \sum_i \lambda^i(a) t^i$$

из аддитивной группы кольца A в мультипликативную группу $1 + A[[t]]^+$ формальных степенных рядов вида $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$. Рассматривая эту мультипликативную структуру как аддитивную, мы можем смотреть на $1 + A[[t]]^+$ как на абелеву группу, в которой сложение – это умножение рядов. Эта группа обладает своим собственным умножением и, более того, является лямбда-кольцом. В самом деле, пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ – бесконечные наборы независимых переменных над $\mathbb{Z}$. Глядя на коэффициенты ряда $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ как на алгебраически независимые симметрические функции, такой ряд может быть переписан в виде бесконечного произведения $\prod (1 + \xi_i t)$. Тогда умножение в $1 + A[[t]]^+$ может быть введено по правилу

$$\prod (1 + \xi_i t) \circ \prod (1 + \eta_j t) = \prod (1 + \xi_i \eta_j t),$$

а лямбда-структура по правилу

$$\Lambda^n \left(\prod (1 + \xi_i t) \right) = \prod (1 + \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_r} t)$$

¹Псевдоабелевость категории означает, что она содержит ядра своих идемпотентов.

(см. [12] и [13]). Лямбда-структура на A называется *специальной*, если λ_t является кольцевым гомоморфизмом, коммутирующим с Λ^i , т.е.

$$\Lambda^i \lambda_t = \lambda_t \Lambda^i$$

для любого i . Наконец, две лямбда-структуры λ и σ на одном и том же кольце называются *противоположными*, если

$$1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^i(a)t^i = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma^i(a)(-t)^i\right)^{-1}$$

для всех a из A .

Возвращаясь к категории $\mathcal{A}$, внешние и симметрические степени в $\mathcal{A}$ дают две специальные лямбда-структуры в $K_0(\mathcal{A})$, которые противоположны друг другу [4; 4.1]. Мы будем обозначать эти лямбда-структуры так: λ_+ для внешних и λ_- для симметрических степеней соответственно. Например, если $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, то $\lambda_+^n[X] = [\wedge^n X]$ и $\lambda_-^n[X] = [\text{Sym}^n X]$. Пусть также

$$\lambda_t^\pm: K_0(\mathcal{A}) \rightarrow 1 + K_0(\mathcal{A})[[t]]^+$$

– гомоморфизмы групп, соответствующие лямбда-структурам $\lambda_\pm$. В этой терминологии для любого объекта X в $\mathcal{A}$ его дзета-функция $\zeta_X(t)$ определяется по формуле

$$\zeta_X(t) := \lambda_t^-([X]) = [\mathbb{1}] + [X]t + [\text{Sym}^2 X]t^2 + \dots,$$

где $\mathbb{1}$ – единичный объект в $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ – это категория мотивов Чжоу $\mathcal{M}$, то мы получаем указанную выше мотивную дзета-функцию относительно меры, построенной Жилле и Суле в [10].

Мы, главным образом, заинтересованы в мотивных мерах μ , которые могут быть пропущены через μ_{GS} , т.е. $\mu = \tau \circ \mu_{GS}$ для некоторого гомоморфизма τ из $K_0(\mathcal{M})$ в A . В этом случае, если мы знаем рациональность $\zeta_{M(X)}$, то мы также знаем и рациональность $\zeta_{X,\mu}$.

Любая разумная мотивная мера, которая может быть определена в терминах подходящих групп когомологий, может быть пропущена через $K_0(\mathcal{M})$. Например, числа Ходжа $h^{p,q}$ квазипроективного многообразия X над $\mathbb{C}$ определяются как размерности соответствующих биградуированных кусков смешанной структуры Ходжа на когомологиях с компактными носителями $H_c^{p+q}(X, \mathbb{Q})$ многообразия X . Тогда мотивная мера, сопоставляющая многообразию X его полином Ходжа $\sum h^{p,q} u^p v^q$, может быть пропущена через $K_0(\mathcal{M})$. Другой интересный пример мотивной меры, пропускающей через $K_0(\mathcal{M})$, можно построить, используя кондукторы l -адических представлений над числовыми полями (см. [14]).

3. Результат. Пусть $\mathcal{T}$ – малая триангулированная категория с функтором сдвига $X \mapsto \Sigma X$, и пусть $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]$ – свободная абелева группа, порожденная классами изоморфизмов объектов в $\mathcal{T}$. Пусть далее $S(\mathcal{T})$ – минимальная подгруппа $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]$, порожденная элементами $[Y] - [X] - [Z]$, где $Y = X \oplus Z$, и пусть $T(\mathcal{T})$ – минимальная подгруппа, порожденная такими же выражениями всякий раз, когда мы имеем выделенный треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ в $\mathcal{T}$. Фактор $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]/S(\mathcal{T})$ – это описанная выше группа Гротендика аддитивной категории, которую мы, начиная с этого

момента, будем обозначать через $K_0^s(\mathcal{T})$, желая подчеркнуть, что она построена при помощи факторизации по расщеплениям (split) вида $Y = X \oplus Z$. В то время как символ $K_0(\mathcal{T})$ мы зарезервируем для фактор-группы $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]/T(\mathcal{T})$ – группы Гротендика триангулированной категории $\mathcal{T}$, построенной при помощи факторизации по всем, не только расщепленным, выделенным треугольникам в $\mathcal{T}$. Очевидно, $K_0(\mathcal{T})$ – это фактор $K_0^s(\mathcal{T})$ по $T(\mathcal{T})/S(\mathcal{T})$. Если $\mathcal{T}$ – это производная категория некоторой достаточно хорошей абелевой категории $\mathcal{A}$, то $K_0(\mathcal{T})$ изоморфна группе Гротендика категории $\mathcal{A}$, построенной при помощи факторизации по соотношениям, возникающим из точных троек в категории $\mathcal{A}$, так что $K_0(\mathcal{T})$ имеет смысл (см. [15]).

Теперь предположим, что $\mathcal{T}$ – симметрическая моноидальная триангулированная категория. Если $\Sigma: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ – функтор сдвига и $\otimes$ – произведение в $\mathcal{T}$, то они должны быть согласованы друг с другом в следующем смысле. Для любых двух объектов X и Y в $\mathcal{T}$ должны существовать естественные изоморфизмы

$$X \otimes \Sigma Y \cong \Sigma(X \otimes Y) \cong \Sigma X \otimes Y,$$

и для любого выделенного треугольника

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

и любого объекта V в $\mathcal{T}$ индуцированный треугольник

$$X \otimes V \longrightarrow Y \otimes V \longrightarrow Z \otimes V \longrightarrow \Sigma X \otimes V$$

является выделенным (см. [16]). В этом случае K_0 категория $\mathcal{T}$ является коммутативным кольцом. Предположим, кроме того, что $\mathcal{T}$ псевдоабелева и $\mathbb{Q}$ -линейна. Тогда в $\mathcal{T}$ определены внешние и симметрические степени. Поскольку $\mathcal{T}$ аддитивна, $K_0^s(\mathcal{T})$ имеет две канонические лямбда-структуры $\lambda_{\pm}$ по лемме 4.1 из [4] (см. ниже). Возникает следующий вопрос: индуцируют ли эти лямбда-структуры соответствующие лямбда-структуры на триангулированной группе $K_0(\mathcal{T})$. Положительный ответ на этот вопрос мог бы иметь достаточно интересные следствия, если применять все это к триангулированной категории $\mathcal{DM}$ мотивов над полем. Ниже мы покажем существование двух противоположных лямбда-структур в группе $K_0(\mathcal{T}')$, индуцированных внешними и симметрическими степенями в $\mathcal{T}$, где $\mathcal{T}'$ – это насыщенная симметрическая моноидальная подкатегория, порожденная компактными объектами в $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}$ является гомотопической категорией симплициальной модельной моноидальной категории.

Более точно, пусть $\mathcal{C}$ – отмеченная симплициальная модельная категория [16], и пусть

$$\mathcal{T} = \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$$

– гомотопическая категория категории $\mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{T}$ является триангулированной категорией, чей функтор сдвига индуцирован симплициальной надстройкой

$$\Sigma X = X \wedge S^1$$

в $\mathcal{C}$ [16]. Предположим далее, что категория $\mathcal{C}$ является симметрической и моноидальной с моноидальным произведением $\wedge$, причем модельная и моноидальная

структуры согласованы в смысле [16; 4.2]. Такая триангулированная категория имеет симметрическое моноидальное произведение $\otimes$, индуцированное произведением $\wedge$ в категории $\mathcal{C}$, и она может рассматриваться как некий абстрактный прототип для всех разумных стабильных гомотопических категорий, возникающих в алгебраической топологии и алгебраической геометрии [16]. Поскольку мы заинтересованы в изучении внешних и симметрических степеней в $\mathcal{T}$, будем предполагать, что $\mathcal{T}$ является $\mathbb{Q}$ -локализованной, т.е. все группы Hom являются векторными пространствами над $\mathbb{Q}$.

Есть несколько примеров таких триангулированных категорий, возникающих в алгебраической топологии и мотивной алгебраической геометрии. Гомотопическая категория $\mathbb{Q}$ -локальных топологических симметрических спектров над точкой – это всего лишь категория градуированных $\mathbb{Q}$ -векторных пространств. Тем не менее, рациональная стабильная гомотопическая теория S^1 -эквивариантных спектров представляет собой интерес (см. [17]). Но для наших целей главным примером такой категории является гомотопическая категория мотивных симметрических $\mathbb{Q}$ -локальных спектров $\mathcal{SH}(X)$ над нетеровой базой X (см. [18] и [19]). Если $X = \text{Spec}(k)$, то мы будем писать $\mathcal{SH}$ вместо $\mathcal{SH}(X)$. Как было анонсировано Морелем в [20], если или $\text{char}(k) = 0$, или -1 – сумма квадратов в k , категория $\mathcal{SH}$ эквивалентна большой триангулированной категории $\mathcal{DM}$ мотивов над полем k . Используя эту эквивалентность, мы можем применять результаты, которые были получены в $\mathcal{T} = \text{Ho}(\mathcal{C})$, к категории $\mathcal{DM}$.

Так как $\mathcal{T}$ – это гомотопическая категория, она замкнута относительно произвольных прямых сумм. Тогда $K_0(\mathcal{T}) = 0$ по так называемому трюку Эйленберга. В самом деле, пусть X – объект в $\mathcal{T}$, и пусть $[X]$ – это его класс в K_0 . Пусть $Y = X \oplus X \oplus \dots$ – прямая сумма счетного числа копий объекта X в $\mathcal{T}$. Тогда $X \oplus Y = Y$, откуда $[X] = 0$ в K_0 . Поэтому, имея дело с категорией $\mathcal{T} = \text{Ho}(\mathcal{C})$, имеет смысл работать с ее насыщенной триангулированной подкатегорией

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T}^{\aleph_0}$$

компактных объектов $\mathcal{T}$ (см. [15]). Например, если $\mathcal{T} = \mathcal{DM}$ над полем, то $\mathcal{T}' = \mathcal{DM}'$ – это ни что иное, как триангулированная категория геометрических мотивов $DM_{gm} \otimes \mathbb{Q}$ над k с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ (см. [7]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть, как и выше, $\mathcal{T}'$ – насыщенная триангулированная моноидальная подкатегория компактных объектов в гомотопической категории $\mathcal{T} = \text{Ho}(\mathcal{C})$ симплициальной модельной симметрической моноидальной категории $\mathcal{C}$, причем предполагается, что все группы Hom в $\mathcal{T}$ являются векторными пространствами над $\mathbb{Q}$. Тогда внешние и симметрические степени в $\mathcal{T}'$ индуцируют две специальные лямбда-структуры в кольце $K_0(\mathcal{T}')$, и они противоположны друг другу.

На самом деле эта теорема является следствием из существования некоторой специальной башни Постникова, связывающей внешние (симметрические) степени вершины Y любого наперед заданного выделенного треугольника

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

в $\mathcal{T} = \text{Ho}(\mathcal{C})$ с внешними (симметрическими) степенями двух других вершин X и Z , и которая была построена в [21]. Более точно, для любого $i = 0, \dots, n$ существуют два выделенных треугольника

$$I_+^i \longrightarrow I_+^{i+1} \longrightarrow J_+^{i+1} \longrightarrow \Sigma I_+^i, \quad I_-^i \longrightarrow I_-^{i+1} \longrightarrow J_-^{i+1} \longrightarrow \Sigma I_-^i$$

– один для альтернированного, и другой для симметрического случаев соответственно. Если $i = 0$, то

$$I_+^0 = \wedge^n X, \quad I_+^n = \wedge^n Y,$$

и, аналогично,

$$I_-^0 = \text{Sym}^n X, \quad I_-^n = \text{Sym}^n Y.$$

Ключевой момент заключается в том, что конусы $J_\pm^i$ этих треугольников могут быть посчитаны по правилу Кюннета:

$$J_+^i = \wedge^i Z \otimes \wedge^{n-i} X, \quad J_-^i = \text{Sym}^i Z \otimes \text{Sym}^{n-i} X.$$

Для того чтобы вывести теорему 1 из факта существования указанных выше башен, точная конструкция которых описана в [21], нам понадобятся следующие элементарные и чисто алгебраические наблюдения.

Пусть M – абелевый моноид, и пусть M^+ – групповое пополнение M с универсальным морфизмом $M \rightarrow M^+$, $m \mapsto [m]$. Если R – аддитивное отношение эквивалентности на M , то пусть M/R – это фактор моноида M по отношению R . Рассмотрим подгруппу R^+ в M^+ , порожденную элементами $[a] - [a']$, где $(a, a') \in R$. Тогда абелева группа M^+/R^+ канонически изоморфна абелевой группе $(M/R)^+$.

Пусть теперь S – множество, и пусть $\mathbb{N}[S]$ – свободный абелевый моноид, порожденный S . Пусть ρ – рефлексивное и симметрическое отношение на моноиде $\mathbb{N}[S]$. Если $(a, b) \in \rho$, мы будем говорить, что элемент a *элементарно ρ -эквивалентен элементу b* . Построим аддитивное отношение эквивалентности $\langle \rho \rangle$ на $\mathbb{N}[S]$, порожденное ρ следующим образом: две линейные комбинации a и a' из $\mathbb{N}[S]$ называются *эквивалентными*, если существует цепочка линейных комбинаций $a_0, a_1, \dots, a_n$ такая, что $a_0 = a$, $a_n = a'$ и для каждого i элемент a_{i+1} может быть получен из a_i посредством замещения слагаемого в a_i каким-то другим элементарно ρ -эквивалентным слагаемым. Для краткости, пусть $\mathbb{N}[S]/\rho$ – это фактор $\mathbb{N}[S]$ по $\langle \rho \rangle$ и пусть $\rho^+ = \langle \rho \rangle^+$. Конечно же, $(\mathbb{N}[S])^+ = \mathbb{Z}[S]$. Из предыдущих рассуждений мы имеем $(\mathbb{N}[S]/\rho)^+ = \mathbb{Z}[S]/\rho^+$.

Например, пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная категория, $\mathbb{N}[\mathcal{A}] := \mathbb{N}[\text{Ob}(\mathcal{A})]$, и пусть σ – множество пар $([X \oplus Y], [X] + [Y])$ и их транспозиций $([X] + [Y], [X \oplus Y])$. Мы видим, что $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]/\sigma^+$ – аддитивная группа Гротендика $K_0^s(\mathcal{A})$ категории $\mathcal{A}$. Приведенный выше изоморфизм показывает, что $K_0^s(\mathcal{A})$ может быть также описана как пополнение абелевого моноида $\mathbb{N}[\mathcal{A}]/\sigma$.

В триангулированной ситуации мы имеем следующее. Пусть $\mathcal{T}$ – произвольная малая триангулированная категория, $\mathbb{N}[\mathcal{T}] := \mathbb{N}[\text{Ob}(\mathcal{T})]$ и Δ – это множество пар $([Y], [X] + [Z])$, где XYZ – выделенный треугольник, и их транспозиций $([X] + [Z], [Y])$. Снова видим, что $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]/\Delta^+$ – это группа Гротендика $K_0(\mathcal{T})$ триангулированной категории $\mathcal{T}$, и приведенный выше изоморфизм показывает, что она может быть также описана как пополнение моноида $\mathbb{N}[\mathcal{T}]/\Delta$.

Пусть теперь $\mathcal{T} = \text{Ho}(\mathcal{C})$ – гомотопическая категория из условия теоремы 1, и пусть $\mathcal{T}'$ – подкатегория компактных объектов в ней. Для того чтобы доказать теорему 1, мы рассмотрим только случай внешних степеней. Симметрический случай аналогичен.

Рассмотрим набор отображений

$$\lambda^n: \mathbb{Z}[\mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{T}], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\lambda^n[X] = [\wedge^n X],$$

для любого объекта X в $\mathcal{T}$ значение λ^n на сумме $[X] + [Y]$ определено по правилу Кюннета. Этот набор отображений дает λ -структуру

$$\lambda^n: K_0^s(\mathcal{T}) \rightarrow K_0^s(\mathcal{T}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

на группе $K_0^s(\mathcal{T})$ (см. [4; лемма 4.1]). Моноидальное произведение конечного числа компактных объектов компактно и подобъект компактного объекта также компактен. Стало быть, указанные выше отображения λ^n индуцируют отображения $\lambda^n: \mathbb{Z}[\mathcal{T}'] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{T}']$ на группах, порожденных компактными объектами в $\mathcal{T}$. Поэтому для того, чтобы определить лямбда-операции по такому же правилу в группе $K_0(\mathcal{T}')$, нам нужно только показать, что отображения $\lambda^n: \mathbb{Z}[\mathcal{T}'] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{T}']$ сохраняют подгруппу $T(\mathcal{T}')$. А так как $K_0(\mathcal{T}') = \mathbb{Z}[\mathcal{T}']/T(\mathcal{T}') = (\mathbb{N}[\mathcal{T}']/\Delta)^+$, на самом деле нам достаточно показать, что если две линейные комбинации a и b в $\mathbb{N}[\mathcal{T}']$ элементарно Δ -эквивалентны, то элемент $\lambda^n a$ является Δ -эквивалентным элементу $\lambda^n b$.

Не теряя общности, можем предполагать, что $a = [Y]$, $b = [X] + [Z]$ и мы имеем выделенный треугольник

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma Z$$

в $\mathcal{T}'$. Для каждого n пусть

$$I_+^i \longrightarrow I_+^{i+1} \longrightarrow J_+^{i+1} \longrightarrow \Sigma I_+^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

– это описанная выше башня Постникова для внешних степеней. Пусть

$$a_i = [I_+^i], \quad c_i = [J_+^i], \quad x_i = [\wedge^i X], \quad y_i = [\wedge^i Y], \quad z_i = [\wedge^i Z]$$

для всех неотрицательных целых чисел i . В терминах кольца $K_0(\mathcal{T}')$ наша башня может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_n, & a_n &= y_n, \\ c_i &= z_i x_{n-i}, & i &= 0, 1, \dots, n, \\ a_{i+1} &= a_i + c_{i+1}, & i &= 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$y_n = \sum_{i=0}^n z_i x_{n-i}$$

в кольце $K_0(\mathcal{T}')$, где $y_n = \lambda^n[Y]$, $x_0 = 1$ и $z_0 = 1$. Это означает, что элемент $\lambda^n([X] + [Z])$ является Δ -эквивалентным элементу $\lambda^n[Y]$, что и требовалось.

Теперь мы должны показать, что обе лямбда-структуры на $K_0(\mathcal{T}')$ специальные и противоположны друг-другу. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} K_0^s(\mathcal{T}') & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}') \\ \lambda_t \downarrow & & \downarrow \lambda_t \\ 1 + K_0^s(\mathcal{T}')[[t]]^+ & \longrightarrow & 1 + K_0(\mathcal{T}')[[t]]^+. \end{array}$$

Левое вертикальное отображение сохраняет умножение, поскольку лямбда-структура на $K_0^s(\mathcal{T}')$ специальна. Так как диаграмма коммутативна, а гомоморфизм $K_0^s(\mathcal{T}') \rightarrow K_0(\mathcal{T}')$ сюръективен, правый вертикальный гомоморфизм также сохраняет умножение.

Для того, чтобы доказать, что построенные лямбда-структуры на $K_0(\mathcal{T}')$ перестановочны с операциями Λ^i , рассмотрим трехмерную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K_0^s(\mathcal{T}') & \xrightarrow{\Lambda^i} & K_0^s(\mathcal{T}') & & \\ \downarrow \lambda_t & \searrow & \downarrow \lambda_t & \searrow & \\ & K_0(\mathcal{T}') & \xrightarrow{\Lambda^i} & K_0(\mathcal{T}') & \\ & \downarrow \lambda_t & & \downarrow \lambda_t & \\ 1 + K_0^s(\mathcal{T}')[[t]]^+ & \xrightarrow{\Lambda^i} & 1 + K_0^s(\mathcal{T}')[[t]]^+ & & \\ & \searrow & \downarrow \lambda_t & \searrow & \\ & 1 + K_0(\mathcal{T}')[[t]]^+ & \xrightarrow{\Lambda^i} & 1 + K_0(\mathcal{T}')[[t]]^+ & \end{array}$$

в которой все грани, за исключением передней, являются коммутативными квадратами. Прекомпозиции $\Lambda^i \lambda_t$ и $\lambda_t \Lambda^i$ с сюръективным гомоморфизмом $K_0^s(\mathcal{T}') \rightarrow K_0(\mathcal{T}')$ совпадают, потому что лямбда-структура в K_0^s специальна. Поэтому передняя грань также коммутативна, что завершает доказательство специальности лямбда-структур в $K_0(\mathcal{T}')$.

Пусть теперь θ – это композиция отображения, переводящего переменную t в $-t$, и взятия обратного элемента в $1 + A(\mathcal{T}')[[t]]^+$, где A – это либо кольцо $K_0^s(\mathcal{T})$, либо кольцо $K_0(\mathcal{T})$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K_0^s(\mathcal{T}') & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + K_0^s(\mathcal{T}')[[t]]^+ & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ K_0(\mathcal{T}') & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + K_0(\mathcal{T}')[[t]]^+ & & \\ & \searrow \sigma_t & \swarrow \theta & & \\ & 1 + K_0^s(\mathcal{T}')[[t]]^+ & & & \\ & \searrow \sigma_t & \swarrow \theta & & \\ & 1 + K_0(\mathcal{T}')[[t]]^+ & & & \end{array}$$

в которой λ_t и σ_t индуцированы лямбда-операциями, построенными по внешним и симметрическим степеням в $K_0^s(\mathcal{T}')$ и в $K_0(\mathcal{T})$. Противоположность операций λ и σ в $K_0^s(\mathcal{T}')$ может быть выражена формулой $\theta \circ \sigma_t = \lambda_t$. Для того чтобы показать их противоположность в $K_0(\mathcal{T})$, заметим, что прекомпозиция $\theta \circ \sigma_t$ и λ_t с отображением $K_0^s(\mathcal{T}') \rightarrow K_0(\mathcal{T})$ совпадут из-за того, что они совпадают на $K_0^s(\mathcal{T}')$ -уровне. Так как последнее отображение сюръективно, то $\theta \circ \sigma_t = \lambda_t$ и на $K_0(\mathcal{T})$ -уровне, что и требовалось доказать.

4. Некоторые применения. Формальный степенной ряд $\xi(t)$ от переменной t с коэффициентами в коммутативном кольце A называется *рациональным*, если существуют два многочлена $a(t)$ и $b(t)$ в $A[t]$ такие, что $a\xi = b$ в $A[[t]]$.

Для любого $a \in K_0(\mathcal{T}')$ пусть $\zeta_a(t) = \lambda_t^-(a)$ – соответствующая дзета-функция элемента a , и пусть $\zeta_X = \zeta_{[X]}$, если $X \in \text{Ob } \mathcal{T}'$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого объекта X в $\mathcal{T}'$

$$\zeta_{\Sigma X} = (\zeta_X)^{-1}.$$

В частности, надстройка не меняет рациональность дзета-функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надстройка $\Sigma: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ индуцирует инволюцию $a \mapsto -a$ на $K_0(\mathcal{T}')$, а теорема 1 дает формулу $\zeta_{-a} = \zeta_a^{-1}$ для всякого a в K_0 .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ – выделенный треугольник в $\mathcal{T}$. Если две из трех дзета-функций ζ_X , ζ_Y и ζ_Z являются рациональными, то и третья дзета-функция также рациональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как треугольник XYZ выделенный, имеем $[Y] = [X] + [Z]$ в $K_0(\mathcal{T})$. И поскольку мы работаем с дзета-функциями, индуцированными лямбда-структурой в K_0 ,

$$\zeta_Y = \zeta_X \cdot \zeta_Z,$$

откуда и получаем доказательство нашего следствия.

Предположим теперь, что либо $\text{char}(k) = 0$, либо -1 – сумма квадратов в k . В этом случае, как мы уже упоминали выше, категория $\mathcal{DM}$ эквивалентна категории $\mathcal{SH}$ (анонсировано в [20]). Следовательно, следствие 3 может быть применено также и к категории геометрических мотивов $\mathcal{DM}' = DM_{gm} \otimes \mathbb{Q}$.

Для любого мотива $M \in \mathcal{DM}'$ пусть $\zeta_M(t)$ – это соответствующая мотивная дзета-функция мотива M . Польза следствия 3 из теоремы 1 заключается, например, в том, что оно позволяет расширить множество многообразий, для которых мы можем доказать, что их дзета-функции рациональны. В самом деле, пусть $\mathcal{DM}_{\leq 1}^{\otimes}$ – это насыщенная тензорная подкатегория в $\mathcal{DM}$, порожденная мотивами квазипроективных кривых над k .

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого мотива M в $\mathcal{DM}_{\leq 1}^{\otimes}$ его дзета-функция $\zeta_M(t)$ рациональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мотив $M(X)$ квазипроективной кривой X/k конечномерен (см. [21] или [22]), и поэтому $\zeta_{M(X)}$ рациональна по результату Андрэ, [2; 13.3.3.1]. Если M находится в $\mathcal{DM}_{\leq 1}^{\otimes}$, то его класс $[M]$ принадлежит подкольцу в $K_0(\mathcal{DM}')$,

порожденному классами мотивов квазипроективных кривых. Так как лямбда-структура на $K_0(\mathcal{DM}')$ специальна, рациональность дзета-функций замкнута относительно сумм и произведений в $K_0(\mathcal{DM}')$, откуда получаем результат.

Следствие 3 говорит, что мотивная дзета-функция обладает “два-из-трех” свойством в выделенных треугольниках в категории $\mathcal{DM}'$. Это согласуется с леммой 3.1 в [8], если применять теорему 1 к выделенным треугольникам Гизина в $\mathcal{DM}'$. Более общо, существует несколько канонических выделенных треугольников в $\mathcal{DM}$, каждый из которых дает новые примеры многообразий, чья мотивная дзета-функция рациональна.

ПРИМЕР 5. Напомним, что гиперповерхность Вейля в $\mathbb{P}^{n+1}$ задается уравнением

$$W(d): W_0(x_0, x_{n+1}) + W_{\geq 1}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} W_{\geq 1} &= \sum_{i=1}^s W_i(x_{2i-1}, x_{2i}) && \text{при } n = 2s, \\ W_{\geq 1} &= \sum_{i=1}^s W_i(x_{2i-1}, x_{2i}) + x_{2s+1}^d && \text{при } n = 2s + 1, \end{aligned}$$

и W_i – форма степени d . Как было показано в [23], мотив $M(W(d))$ порожден мотивами кривых. В нашей терминологии это означает, что такой мотив является объектом категории $\mathcal{DM}_{\leq 1}^{\otimes}$. Стало быть, дзета-функция $\zeta_{M(W(d))}$ рациональна по следствию 4.

В частности, рациональной является функция $\zeta_{M(W(4))}$ гладкой кватрики $W(4)$ в $\mathbb{P}^3$. Такая кватрика является КЗ-поверхностью. Как было показано О’Сулливаном (см. [22]), существует открытое по Зарисскому множество U в $X = W(4)$ такое, что мотив $M(U)$ не является конечномерным. Тем не менее, его мотивная дзета-функция ζ_U рациональна. В самом деле, дополнение $Z = X - U$ представляет собой объединение кривых. Мотив любой квазипроективной кривой конечномерен, откуда получаем рациональность $\zeta_{M(Z)}$. Так как функция $\zeta_{M(X)}$ рациональна, применяем следствие 3 к выделенному треугольнику Гизина в $\mathcal{DM}$, ассоциированному с парой (X, U) , и получаем, что функция $\zeta_{M(U)}$ также рациональна.

ПРИМЕР 6. Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ – объединение квазипроективных поверхностей, чьи дзета-функции $\zeta_{M(X_i)}$ рациональны. Тогда $\zeta_{M(X)}$ также рациональна. Действительно, если $n = 2$, применяем следствие 3 и рациональность мотивных дзета-функций квазипроективных кривых к соответствующему выделенному треугольнику Майера-Вьеториса в $\mathcal{DM}$. Если $n > 2$, то все аналогично, надо только выписать подходящую башню Постникова и применить следствие 3 несколько раз.

ПРИМЕР 7. Пусть X – схема конечного типа над k , Z – регулярно вложенная замкнутая подсхема в X , $f: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие X в Z и $E = f^{-1}(Z)$ – исключительный дивизор. Так как замкнутое вложение $Z \hookrightarrow X$ регулярно, $E \rightarrow Z$ – проективное расслоение над Z (см. [24; В.6.2]). Предположим теперь, что мотив $M(Z)$ конечномерен. Мотив $M(E)$ конечномерен по формуле проективного расслоения в категории Воеводского [7]. Тогда функции $\zeta_{M(Z)}$ и $\zeta_{M(E)}$ рациональны. Если

функция $\zeta_{M(\tilde{X})}$ рациональна, то функция суммы $M(\tilde{X}) \oplus M(Z)$ также рациональна по следствию 3, примененному к соответствующему расщепленному треугольнику в $\mathcal{DM}$. Рассмотрим выделенный треугольник

$$M(E) \rightarrow M(\tilde{X}) \oplus M(Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(E)[1]$$

раздутья $\tilde{X} \rightarrow X$ (см. [7; 2.2]). Применяя следствие 3 еще раз, видим, что функция $\zeta_{M(X)}$ рациональна. Наоборот, если $\zeta_{M(X)}$ рациональна, то рациональна функция суммы $M(\tilde{X}) \oplus M(Z)$. Поскольку функция $\zeta_{M(Z)}$ рациональна, то и функция $\zeta_{M(\tilde{X})}$ рациональна. Здесь мы снова применили следствие 3 несколько раз.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Недавний результат, полученный в статье [25], показывает, что группа $K_0(\mathcal{M})$ изоморфна триангулированной группе $K_0(\mathcal{DM}')$, если мы рассматриваем обе появляющиеся здесь категории над полем характеристики нуля. Скорее всего, этот изоморфизм также дает две канонические лямбда-структуры на категории Воеводского $\mathcal{DM}'$. Тем не менее, наш подход является внутренним, и теорема 1 позволяет работать с лямбда-структурами в 2-функторе $\mathcal{SH}(\cdot)$ на схемах в целом. Тогда, с одной стороны, мы можем использовать $\mathcal{SH}(\cdot)$ для того, чтобы строить новые многообразия с рациональными мотивными дзета-функциями, а с другой стороны, изоморфизм $K_0(\mathcal{M}) \cong K_0(\mathcal{DM}')$ позволяет пропускать интересные мотивные меры также и через $K_0(\mathcal{DM}')$.

Автор выражает благодарность Джозефу Аюбу за несколько полезных обсуждений по теме данной статьи. Я также признателен Институту высших исследований в Принстоне за поддержку и гостеприимство в 2005–2006 академическом году.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. André, “Motifs de dimension finie (d’après S.-I. Kimura, P. O’Sullivan, ...)”, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 2003/2004, Astérisque, **299**, Soc. Math. France, Paris, 2005, 115–145, Exp. No. 929.
- [2] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panor. Synthèses, **17**, Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [3] S.-I. Kimura, “Chow groups are finite dimensional, in some sense”, *Math. Ann.*, **331**:1 (2005), 173–201.
- [4] F. Heinloth, “A note on functional equations for zeta functions with values in Chow motives”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **57**:6 (2007), 1927–1945.
- [5] M. Kapranov, *The Elliptic Curve in the S-Duality Theory and Eisenstein Series for Kac–Moody Groups*, [arXiv: math.AG/0001005v2](https://arxiv.org/abs/math/0001005v2).
- [6] B. Dwork, “On the rationality of the zeta function of an algebraic variety”, *Amer. J. Math.*, **82**:3 (1960), 631–648.
- [7] V. Voevodsky, “Triangulated categories of motives over a field”, *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories*, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 188–238.
- [8] M. Larsen, V. A. Lunts, “Rationality criteria for motivic zeta functions”, *Compos. Math.*, **140**:6 (2004), 1537–1560.
- [9] A. J. Scholl, “Classical motives”, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 163–187.
- [10] H. Gillet, C. Soulé, “Descent, motives and K -theory”, *J. Reine Angew. Math.*, **478** (1996), 127–176.

- [11] S. del Baño Rollin, V. Navarro Aznar, “On the motive of a quotient variety”, *Collect. Math.*, **49**:2–3 (1998), 203–226.
- [12] M. F. Atiyah, D. O. Tall, “Group representations, λ -rings and the J -homomorphism”, *Topology*, **8**:3 (1969), 253–297.
- [13] D. Knutson, *λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Lecture Notes in Math., **308**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
- [14] J. Denef, F. Loeser, “Geometry on arc spaces of algebraic varieties”, *European Congress of Mathematics*, Vol. I (Barcelona, 2000), Progr. Math., **201**, Birkhäuser, Basel, 2001, 327–348.
- [15] A. Neeman, *Triangulated Categories*, Ann. of Math. Stud., **148**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.
- [16] M. Hovey, *Model Categories*, Math. Surveys Monogr., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [17] J. P. C. Greenlees, *Rational S^1 -equivariant stable homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc., **138**, 661, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [18] J. F. Jardine, “Motivic symmetric spectra”, *Doc. Math.*, **5** (2000), 445–553.
- [19] V. Voevodsky, “ $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory”, *Doc. Math.*, Extra Vol. **I** (1998), 579–604.
- [20] F. Morel, “On the motivic π_0 of the sphere spectrum”, *Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **131**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 219–260.
- [21] V. Guletskii, “Finite-dimensional objects in distinguished triangles”, *J. Number Theory*, **119**:1 (2006), 99–127.
- [22] C. Mazza, “Schur functors and motives”, *K-Theory*, **33**:2 (2004), 89–106.
- [23] А. М. Шерменев, “О мотиве гиперповерхностей Вейля”, *Матем. заметки*, **12**:5 (1972), 555–560.
- [24] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [25] М. Bondarko, *Differential Graded Motives: Weight Complex, Weight Filtrations and Spectral Sequences for Realizations*; Voevodsky vs. Hanamura, [arXiv: math.AG/0601713v8](https://arxiv.org/abs/math/0601713v8).

В. И. Гулецкий

University of Liverpool, Англия

E-mail: vladimir.guletskii@liverpool.ac.uk

Поступило

04.10.2007

Исправленный вариант

17.09.2009