Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, О. В. Кунаковская, Интегральная формула для обобщенного инварианта Сато–Левина в магнитной гидродинамике, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 524–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:44:36

Интегральная формула для обобщенного инварианта Сато–Левина в магнитной гидродинамике

П. М. Ахметьев, О. В. Кунаковская

Для пары бездивергентных векторных полей $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, локализованных в двух ориентированных трубках U , $\tilde{U}$ в $\mathbb{R}^3$ соответственно, предложен интеграл W четвертого порядка. Описана зависимость между интегралом W и более высоким топологическим инвариантом $\beta = \beta(l, \tilde{l})$ (а именно, обобщенным инвариантом Сато–Левина) новый интеграл обобщает известный интеграл, который был определен ранее для двух трубок нулевым коэффициентом зацепления.

Библиография: 17 названий.

Работа посвящается 70-летию В. И. Арнольда

1. Введение

Проблема построения высшего аналога интеграла спиральности для бездивергентных векторных полей сформулирована в [1]. Положительное решение этой проблемы привело бы, в частности, к построению первого интеграла в задаче движения идеальной жидкой проводящей среды с магнитным полем, который с одной стороны, был бы величиной, обобщающей коэффициент (асимптотический) зацепления магнитных или вихревых линий и имел бы простой геометрический смысл, с другой стороны, был бы важен для решения прикладных задач.

В настоящей работе получены результаты на пути построения высшего аналога интеграла спиральности. Предложена конструкция интегрального инварианта, значение которого сохраняется при движении трубок в идеальной среде. Новый инвариант определен для (магнитного) поля, представленного двумя трубками, и обозначается через $\mathbf{W}$ (см. следствие из теоремы 1). Отметим, что аналогичный результат доказан в работе [2] для частного случая двух трубок с нулевым коэффициентом зацепления.

2. Интегральная формула инварианта $\mathbf{W}$

2.1. Магнитные поля в трубках и их потенциалы. Пусть $V = D^2 \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3$ – бесконечный открытый цилиндр, снабженный цилиндрической системой координат (r, λ, z) , где $0 \leq r < r_0$. Рассмотрим сдвиг $t: V \rightarrow V$, определенный в выбранной системе координат формулой $t(r, \lambda, z) = (r, \lambda + \lambda_0, z + z_0)$ при некоторых

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00663) и фонда INTAS (грант № 05-1000008-7805).

Рис. 1

фиксированных значениях констант λ_0, z_0 . В этом случае определен полноторий $U = V/t$, который служит базой циклического накрытия $V \rightarrow U$; полноторий U является многообразием, риманова метрика которого индуцирована стандартной метрикой цилиндра V . Индуцированные координаты на U мы будем обозначать так же, как и на V , приняв во внимание неоднозначность при факторизации.

Определим на V инвариантное при трансляции вдоль вертикальной оси z векторное поле $\mathbf{B}^V: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, полагая

$$\mathbf{B}^V(r, \lambda, z) = (0, 0, \theta(r)).$$

При этом считаем, что задана функция интенсивности поля $\mathbf{B}^V$ – гладкая невозрастающая функция

$$\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, \theta_0], \quad \text{где } \theta_0 > 0, \quad \theta_0 = \theta(0) \geq \theta(r) \geq \theta(r_0) = 0 \quad \forall r \in [0, +\infty)$$

(см. рис. 1).

Очевидно, что $\operatorname{div}(\mathbf{B}^V) = 0$. Поскольку поле $\mathbf{B}^V$ инвариантно при сдвиге t , при проекции $V \rightarrow U$ поле $\mathbf{B}^V$ факторизуется до бездивергентного (в другой терминологии, соленоидального) векторного поля $\mathbf{B}$ на U .

Образ произвольного гладкого вложения $\iota: U \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, сохраняющего объем, будем называть *магнитной трубкой*. Она представляет собой полноторий (далее также обозначаемый через U), снабженный векторным полем $\iota_*(\mathbf{B})$, за которым сохраним обозначение $\mathbf{B}$. Два из возможных положений U можно видеть на рис. 2 (b), 2 (c). Будем предполагать, что наибольший радиус поперечного сечения трубки U много меньше наименьшего радиуса кривизны ее центральной линии.

При этом *поток* (или *интенсивность*) бездивергентного векторного поля $\mathbf{B}$ в трубке U называется числом Φ , равное потоку векторного поля $\mathbf{B}$ через любое трансверсальное сечение трубки U ; в нашем случае получаем

$$\Phi = 2\pi \int_0^{r_0} r\theta(r) dr.$$

В силу $\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$ определен вектор-потенциал $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B}$: $\operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. Потребуем, чтобы

$$\mathbf{A}(r) \sim r^{-2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Рис. 2

В общем случае, как известно, вектор-потенциал определен с точностью до калибровочного преобразования $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } f$, где $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция. Калибровка $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ и граничные условия $(*)$ определяют векторное поле $\mathbf{A}$ однозначно (в дальнейшем аналогичные граничные условия будем называть *правильными*). Напомним, что по теореме Стокса

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

– поток поля $\mathbf{B}$ – равен циркуляции поля $\mathbf{A}$ по границе C произвольного трансверсального сечения трубки U .

Нам потребуется явная формула для $\mathbf{A}$ внутри U . Вектор-потенциал $\mathbf{A}_0^V$ поля $\mathbf{B}^V$ можно определить стандартным способом по формуле

$$\mathbf{A}_0^V = (0, A_\lambda(r), 0), \quad A_\lambda(r') = \frac{1}{r'} \int_0^{r'} r \theta(r) dr.$$

Отметим, что $\mathbf{A}_0^V$ на границе трубки V не обращается в нуль, но обращается в нуль на центральной линии трубки и не имеет особенностей в окрестности этой центральной линии. Векторное поле $\mathbf{A}_0^V$ на V инвариантно относительно сдвига t и факторизуется до поля $\mathbf{A}_0$ в трубке U , для которого $\text{rot}(\mathbf{A}_0) = \mathbf{B}$.

Построенное векторное поле $\mathbf{A}_0$ преобразуется как замороженная 1-форма, т.е. ассоциированная с ним 1-форма преобразуется инвариантно.

Для вектор-потенциала $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B}$ при ограничении на U имеем разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \text{grad } \phi_0 + \text{grad } \phi,$$

где ϕ_0 – многозначная функция (которая при поднятии на накрывающее V трубки U становится однозначной), ϕ – гладкая функция, причем

$$\oint \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = 0$$

при интегрировании по центральной линии $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\nu)$, $0 \leq \nu \leq z_0$, трубки U , $\nu = z \bmod z_0$. Далее l обозначает носитель $\mathbf{l}([0, z_0])$ параметризованной кривой $\mathbf{l}$ (а также носитель кривой $\iota \circ \mathbf{l}$).

Рис. 3. (b) Зацепление Уайтхеда, (c) Торическое зацепление $(1, k)$, $k = 4$

Зафиксируем сумму первых двух слагаемых в формуле для $\mathbf{A}$. В дальнейших построениях эту сумму $\mathbf{A}_0 + \text{grad } \phi_0$ можно фиксировать произвольным образом. Удобно условиться, что указанная сумма фиксирована так, что функция ϕ_0 зависит лишь от координаты z трубки и становится линейной при поднятии на накрывающее V . В этом случае третье слагаемое ϕ при заданном значении $\mathbf{A}$ определено однозначно с точностью до прибавления константы.

Предположим теперь, что при помощи двух гладких вложений $\iota, \tilde{\iota}$ заданы две магнитные трубки $U, \tilde{U}$ с фиксированными ориентациями их центральных линий $l, \tilde{l}$ и с полями $\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}$ с потоками $\Phi, \tilde{\Phi}$ соответственно. Три из возможных вариантов их расположения изображены на рис. 3 (a), (b), (c). В первом (a) и третьем (c) случаях центральные линии магнитных трубок зацеплены с коэффициентом $+1$ и $+4$ соответственно, во втором (b) случае коэффициент зацепления нулевой.

2.2. Интеграл $\mathbf{W}$ и его свойства. Рассмотрим ограничение $\tilde{\mathbf{A}}|_U$ потенциала $\tilde{\mathbf{A}}$ поля $\tilde{\mathbf{B}}$ на трубку U . Определим многозначную функцию $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ с помощью линейного интеграла

$$\tau(x) = \int_{x_0}^x \tilde{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{s}, \quad x \in U, \quad \tau(x_0) = 0,$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ – вектор-потенциал поля $\tilde{\mathbf{B}}$, $x_0 \in U$ – фиксированная точка, $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mu)$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ для некоторого $\mu_0 > 0$, – путь, соединяющий точки x_0 и x в торе U . Нетрудно проверить, что $\tau = T + \tilde{\varphi}$, где функция T является многозначной, причем такой, что поднятие этой функции на накрытие $V \rightarrow U$ является однозначной функцией, линейной по координате z , а период неоднозначности функции T составляет $lk(l, \tilde{l})\tilde{\Phi}$, где $lk(l, \tilde{l})$ – коэффициент зацепления центральных линий $l, \tilde{l}$ магнитных трубок $U, \tilde{U}$ соответственно, $\tilde{\Phi}$ – поток вектора $\tilde{\mathbf{B}}$ в трубке $\tilde{U}$. Функция $\tilde{\varphi}$ определена по $\tilde{\mathbf{A}}|_U$ однозначно с точностью до аддитивной константы. При этом справедливо равенство

$$\tilde{\mathbf{A}}|_U = \text{grad } T + \text{grad } \tilde{\varphi}.$$

Для трубки $\tilde{U}$ определены аналогичные функции $\tilde{T}$ и φ и разложение

$$\mathbf{A}|_{\tilde{U}} = \text{grad } \tilde{T} + \text{grad } \varphi.$$

Определим функцию $\alpha: U \cup \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^1$ по формуле

$$\alpha = \alpha_U + \alpha_{\tilde{U}},$$

где

$$\alpha_U = \mathbf{B} \cdot \text{grad } T, \quad \alpha_{\tilde{U}} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \text{grad } \tilde{T}.$$

Заметим, что функции $\phi, \tilde{\varphi}$ (соответственно $\tilde{\phi}, \varphi$) в трубке U (соответственно $\tilde{U}$) определены по $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$ неоднозначно, а лишь с точностью до прибавления констант. Обозначим эти константы через $c_\phi, c_{\tilde{\varphi}}$ ($c_{\tilde{\phi}}, c_\varphi$) соответственно. Выберем константы $c_\phi, c_{\tilde{\varphi}}$ так, чтобы были выполнены равенства

$$\int_U \alpha \tilde{\varphi} dx = 0, \quad \int_{\tilde{U}} \alpha \varphi dx = 0. \quad (1)$$

Если центральные линии трубок $U, \tilde{U}$ зацеплены с ненулевым коэффициентом, равенствами (1) константы $c_\phi, c_{\tilde{\varphi}}$ определяются однозначно. Константы $c_\phi, c_{\tilde{\phi}}$ при этом выбираются произвольными.

ЛЕММА. При условии вмерзженности магнитных полей $\mathbf{B}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ функция α является вмерзженной (т.е. инвариантной относительно потока поля скоростей $\mathbf{v}$ рассматриваемой проводящей жидкости), другими словами, постоянной на интегральных кривых этого потока, что дает (калибровочную) инвариантность α при замене координат в $\mathbb{R}^3$, сохраняющей обзвм. При этом

$$\int_U \alpha_U dx = \int_{\tilde{U}} \alpha_{\tilde{U}} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{v}$ – вектор скорости рассматриваемой проводящей жидкой среды. Условие вмерзженности данной дифференциальной формы (1-, 2-, или 3-формы) ω в поток $\mathbf{v}$ заключается в том, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \omega = 0,$$

где $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ – производная Ли формы ω в направлении $\mathbf{v}$ (см. [3]). Для магнитного поля $\mathbf{B}$ (ассоциированного с некоторой 2-формой) вмерзженность эквивалентна тому, что поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению индукции для идеальной среды

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

(аналогично для поля $\tilde{\mathbf{B}}$). Для поля градиента многозначной функции T ($\tilde{T}$) по его определению выполнено условие вмерзженности, так как указанная многозначная функция нами строится при помощи фиксированной системы координат на трубке, определяющей поток поля $\mathbf{v}$. При этом рассматриваемое условие вмерзженности эквивалентно условию вмерзженности ассоциированной 1-формы. Вмерзженность функции α теперь, очевидно, следует из того, что ассоциированная с ней 3-форма представима в виде внешнего произведения вмерзженных 1- и 2-форм.

Второе утверждение леммы вытекает из первого. Явным образом это можно показать следующими стандартными вычислениями. Для интеграла $H(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}})$ имеем

$$H(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}) := \int_U \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_U dx = \int_{\tilde{U}} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A}|_{\tilde{U}} dx = lk(l, \tilde{l}) \Phi \tilde{\Phi}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_U \alpha_U dx - \int_{\tilde{U}} \alpha_{\tilde{U}} dx &= \int_U \mathbf{B} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}|_U - \text{grad } \tilde{\varphi}) dx - \int_{\tilde{U}} \tilde{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{A}|_{\tilde{U}} - \text{grad } \varphi) dx \\ &= \int_U \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_U dx - \int_{\tilde{U}} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A}|_{\tilde{U}} dx = 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим векторное поле (ассоциированное с некоторой 2-формой, вообще говоря, незамкнутой, если центральные линии трубок U , $\tilde{U}$ оказались зацепленными между собой с ненулевым коэффициентом)

$$\mathbf{F}' = \mathbf{A} \times \tilde{\mathbf{A}} + \varphi \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\varphi} \mathbf{B}.$$

Имеем $\text{div } \mathbf{F}' = \alpha_U - \alpha_{\tilde{U}}$. В самом деле, это легко увидеть из следующих равенств:

$$\begin{aligned}\text{div}(\mathbf{A} \times \tilde{\mathbf{A}}) &= \text{rot } \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_U - \mathbf{A}|_{\tilde{U}} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_U - \mathbf{A}|_{\tilde{U}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}, \\ \text{div}(\varphi \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\varphi} \mathbf{B}) &= \text{grad } \varphi \cdot \tilde{\mathbf{B}} - \text{grad } \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{B} \\ &= -\tilde{\mathbf{B}} \cdot \text{grad } \tilde{T} + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A}|_{\tilde{U}} - \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_U + \mathbf{B} \cdot \text{grad } T.\end{aligned}$$

Определим поле $\mathbf{F}$ так, чтобы

$$\text{div}(\mathbf{F}) = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \text{rot}(\mathbf{F}') \quad (3)$$

с рассматриваемыми граничными условиями на бесконечности. Иными словами, положим

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \tilde{\mathbf{A}} + \varphi \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\varphi} \mathbf{B} + \text{grad } \chi,$$

причем потенциал χ выберем таким, чтобы выполнялось условие (2). Теперь найдем вектор-потенциал $\mathbf{G}$ поля $\mathbf{F}$, $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Если наложить требование $\text{div}(\mathbf{G}) = 0$ и правильные граничные условия, то векторное поле $\mathbf{G}$ определено по $\mathbf{F}$ однозначно.

Интеграл W определим формулой

$$W(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}, \phi, \tilde{\phi}) = \int \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} dx - \int \varphi^2 \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dx - \int \tilde{\varphi}^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} dx \quad (4)$$

(интегрирование по $\mathbb{R}^3$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку функции φ , $\tilde{\varphi}$ определяются равенством (1) однозначно, значение W также однозначно определено. Однако стоит отметить, что теорема 2 (см. п. 2.3) остается справедливой и в общем случае, т.е. когда указанные функции выбираются произвольными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формула (4) обобщает формулу работы [2], где рассматривался случай двух магнитных трубок, центральные линии которых зацеплены с нулевым коэффициентом. Идея построения интегралов магнитных полей рассматриваемого типа (а именно, типа произведений Масси) возникла в работе [4] и развивалась в целой серии работ [3], [5]–[10].

Рассмотрим однопараметрическое семейство

$$F_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \in [-\varepsilon, +\varepsilon],$$

диффеоморфизмов с компактным носителем, сохраняющих объем. Предположим, что $F_0 = \text{Id}$. Пусть $\mathbf{v}$ – поле скоростей семейства F_t в начальный момент времени, т.е. $\mathbf{v} = \partial F_t(0)/\partial t$. Семейство диффеоморфизмов F_t определяет семейство интегралов $W(t) = W(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}; t)$. Мы вычислим значение производной $dW(0)/dt$.

Определим функцию $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ уравнением

$$f(x) = \Delta^{-1}(\text{div}(\mathbf{v}(x) \times \mathbf{A}(x))) \quad (5a)$$

с правильными граничными условиями на бесконечности. Аналогично определим

$$\tilde{f}(x) = \Delta^{-1}(\text{div}(\mathbf{v}(x) \times \tilde{\mathbf{A}}(x))). \quad (5b)$$

Определим также функции

$$a_U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\tilde{U}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

по формулам

$$a_U(x) = \Delta^{-1}(\alpha_U(x)), \quad a_{\tilde{U}}(x) = \Delta^{-1}(\alpha_{\tilde{U}}(x))$$

с правильными граничными условиями на бесконечности.

Определим интеграл

$$w = -2 \int [\tilde{\varphi} f \alpha_U + \varphi \tilde{f} \alpha_{\tilde{U}} + (a_U - a_{\tilde{U}})(\text{grad } f \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \text{grad } \tilde{f} \cdot \mathbf{A})] dx$$

(интегрирование по $\mathbb{R}^3$).

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\frac{dW(0)}{dt} = w.$$

В частности, для незацепленных трубок W является инвариантом, т.е. не изменяется при движении среды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) W = w.$$

Вычислим результат применения оператора $\partial/\partial t + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ ко всем величинам, входящим в интеграл (4). Вычисление производной W проведем по правилу Лейбница, собрав все соответствующие линейные поправки, появляющиеся при калибровочных преобразованиях.

По лемме функция α меняется инвариантно при замене координат (вморожена в среду). Потенциалы меняются по формулам

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}, \quad \delta \mathbf{A} = \text{grad } f, \quad \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} + \delta \tilde{\mathbf{A}}, \quad \delta \tilde{\mathbf{A}} = \text{grad } \tilde{f}. \quad (6)$$

В этих формулах $\text{grad } f$, $\text{grad } \tilde{f}$ – линейные приращения векторных потенциалов, т.е. результат применения оператора $\partial/\partial t + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ к соответствующему вектор-потенциалу. Функции f , $\tilde{f}$ при этом явно вычисляются по вектору скорости $\mathbf{v}$ согласно формулам (5a), (5b).

Скалярные потенциалы φ , $\tilde{\varphi}$, ϕ , $\tilde{\phi}$ преобразуются по правилу

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + f|_U, & \varphi &\rightarrow \varphi + f|_{\tilde{U}}, \\ \tilde{\phi} &\rightarrow \tilde{\phi} + \tilde{f}|_{\tilde{U}}, & \tilde{\varphi} &\rightarrow \tilde{\varphi} + \tilde{f} + |_U.\end{aligned}$$

По определению получим

$$\mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{F}' + \text{grad } f \times \tilde{\mathbf{A}} + f\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{A} \times \text{grad } \tilde{f} - \tilde{f}\mathbf{B};$$

для $\mathbf{F}$ формула аналогична:

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} + \text{grad } f \times \tilde{\mathbf{A}} + f\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{A} \times \text{grad } \tilde{f} - \tilde{f}\mathbf{B}.$$

Обозначим

$$\text{grad } f \times \tilde{\mathbf{A}} + f\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{A} \times \text{grad } \tilde{f} - \tilde{f}\mathbf{B}$$

через $\delta\mathbf{F}$. Калибровочное слагаемое таково, что

$$\text{div}(\delta\mathbf{F}) = 0.$$

Калибровочное преобразование для $\mathbf{G}$ имеет вид

$$\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G} + \delta\mathbf{G}, \quad \delta\mathbf{G} = f\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{f}\mathbf{A} - \text{grad } \Delta^{-1}(\text{grad } f \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \text{grad } \tilde{f} \cdot \mathbf{A}).$$

Заметим, что

$$\text{div}(\delta\mathbf{G}) = 0.$$

Определим

$$\Delta^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} \cdot \text{grad } f - \mathbf{A} \cdot \text{grad } \tilde{f}) = \delta b.$$

Следовательно,

$$\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G} + f\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{f}\mathbf{A} - \text{grad } \delta b.$$

Поскольку $\text{div}(\mathbf{F}') = \alpha_U - \alpha_{\tilde{U}} = \Delta(a_U - a_{\tilde{U}})$, калибровочное преобразование для первого слагаемого в интеграле (4) определяется выражением

$$2 \int \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{G} \, dx = 2 \int \mathbf{F}' \cdot (f\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{f}\mathbf{A}) \, dx + 2 \int \text{grad}(a_U - a_{\tilde{U}}) \cdot \text{grad}(\delta b) \, dx.$$

При этом с учетом равенства

$$\int \text{grad } a \cdot \text{grad } b \, dx = - \int a \Delta^{-1}(b) \, dx$$

получим

$$\int \text{grad}(a_U - a_{\tilde{U}}) \cdot \text{grad}(\delta b) \, dx = - \int (a_U - a_{\tilde{U}})(\text{grad } f \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \text{grad } \tilde{f} \cdot \mathbf{A}) \, dx.$$

Предыдущее равенство перепишем в следующем виде:

$$2 \int \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{G} dx = 2 \int \mathbf{F}' \cdot (f \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{f} \mathbf{A}) dx + 2 \int (a_U - a_{\tilde{U}})(\text{grad } f \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \text{grad } \tilde{f} \cdot \mathbf{A}) dx. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$2 \int_{\tilde{U}} \mathbf{F} \cdot (f \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{f} \mathbf{A}) dx = (\text{I}) + (\text{II}),$$

где

$$\begin{aligned} (\text{I}) &= (\text{I}_{\tilde{U}}) + (\text{I}_U) = -2 \int_{\tilde{U}} \tilde{f} \varphi \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{B}} dx - 2 \int_U f \tilde{\varphi} \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} dx, \\ (\text{II}) &= (\text{II}_{\tilde{U}}) + (\text{II}_U) = 2 \int_{\tilde{U}} f \varphi \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} dx + 2 \int_U \tilde{f} \tilde{\varphi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \delta \left(- \int_U \tilde{\varphi}^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} dx \right) &= - \int_U \tilde{\varphi}^2 \mathbf{B} \cdot \text{grad } f dx - 2 \int_U \tilde{\varphi} \tilde{f} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx \\ &= -(\text{I}_U) - (\text{II}_U) - 2 \int_U \tilde{\varphi} f \mathbf{B} \cdot \text{grad } T dx, \\ \delta \left(- \int_{\tilde{U}} \varphi^2 \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dx \right) &= - \int_{\tilde{U}} \varphi^2 \mathbf{B} \cdot \text{grad } \tilde{f} dx - 2 \int_{\tilde{U}} \varphi f \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} dx \\ &= -(\text{I}_{\tilde{U}}) - (\text{II}_{\tilde{U}}) - 2 \int_{\tilde{U}} \varphi \tilde{f} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \text{grad } \tilde{T} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, сумма этих выражений равна

$$-2 \int_{\tilde{U}} f \tilde{\varphi} (\mathbf{B} \cdot \text{grad } T) - 2 \int_U \tilde{f} \tilde{\varphi} (\tilde{\mathbf{B}} \cdot \text{grad } \tilde{T}).$$

Теперь, подставив полученное равенство в равенство (7), получим $dW/dt = w$. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Обозначим через $w_i(t)$, $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$, значение $d^i W(t)/dt^i$ производной порядка i интеграла $W(t)$. Заметим, что $w_1(t) = w(t)$. Определим ряд $\mathbf{W}(t, t_0)$ по переменной t , зависящий от параметра t_0 , следующей формулой:

$$\mathbf{W}(t, t_0) = W(t) - w_1(t)(t - t_0) + w_2(t) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + (-1)^i w_i \frac{(t - t_0)^i}{i!} + \dots$$

Внутри области сходимости указанный ряд доставляет однопараметрическое семейство законов сохранения в однопараметрическом семействе диффеоморфизмов F_t среды с замороженным магнитным полем.

2.3. Топологический смысл $\mathbf{W}$: связь с обобщенным инвариантом Саго–Левина. Для выявления топологического смысла построенного интеграла необходимо напомнить определения Δ -движения зацепления (это понятие изучалось в работах [11], [12]).

Предположим, что заданы две конфигурации пары магнитных трубок, которые отличаются лишь внутри шара D малого радиуса. Центральная линия одной из

магнитных трубок, скажем для определенности U , пересекает шар D по паре отрезков (эти отрезки, а также соответствующие им цилиндрические участки трубки мы обозначим через a , b); центральная линия другой трубки пересекает шар D по одному отрезку, обозначаемому через c . До начала Δ -движения отрезки расположены так, что их проекция на выделенную плоскость образует треугольник, причем при обходе сторон этого треугольника поочередно вдоль центральных линий каждого участка трех трубок, при переходе с одной на другую мы каждый раз движемся с верхней ветви на нижнюю (или наоборот, каждый раз с нижней на верхнюю). После Δ -движения фрагмент внутри диска заменяется симметричным при центральной симметрии в плоскости проекции с центром внутри треугольника. При этом ориентации всех отрезков центральных линий, получившихся при симметрии, меняются. Новый фрагмент трубок, построенный внутри диска, отождествляется с конфигурацией трубок вне диска, которая остается неподвижной. При этом короткие отрезки трубок внутри шара подклеиваются к соответствующим компонентам трубок во внешности шара, как было до начала движения. Тем самым, Δ -движение описано.

Различают разновидности Δ -движений. Рассмотрим компоненту, которая пересекает шар D по двум отрезкам a , b . Такую компоненту назовем *основной компонентой* при Δ -движении. Центральная линия основной компоненты, замкнутая внутри шара коротким отрезком с концами в середине отрезков a , b , образует две замкнутые петли. Одна из петель в начальный момент Δ -движения зацеплена с отрезком c оставшейся компонентой, другая не зацеплена. Эту оставшуюся компоненту назовем *вспомогательной компонентой* при Δ -движении. После Δ -движения зацепление с петлями основной компоненты меняется. Назовем петлю *положительной петлей*, если она после Δ -движения оказывается зацеплена со вспомогательной компонентой с положительным коэффициентом, либо, если дополнительная ей петля оказывается зацепленной с отрицательным коэффициентом. Оставшуюся петлю назовем *отрицательной петлей*. Удобно условиться, что положительная петля начинается в центре отрезка a и заканчивается в центре отрезка b .

Аналогично определим другой тип Δ -движений, при которых с шаром D пересекается лишь одна из трубок. Такой тип Δ -движения назовем *неособым*. Рассмотренный ранее тип Δ -движения назовем *особым*.

Легко видеть, что при Δ -движении любого типа коэффициент зацепления компонент не меняется. Два k -компонентных зацепления с пронумерованными компонентами можно связать последовательностью Δ -движений (особых и неособых) тогда и только тогда, когда матрицы попарных коэффициентов зацеплений компонент у зацеплений совпадают.

Мы зададим правило подскока инварианта W , вычислив разность значений интеграла до и после Δ -движения. Конфигурации трубок при Δ -движении (произвольного типа), вообще говоря, не связаны между собой изотопией пространства. Тем не менее, удастся определить естественный аналог понятия допустимого калибровочного преобразования при Δ -движении. Заметим, что преобразование полей $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ при Δ -движении определяет преобразование потенциалов $\mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ и функции α при Δ -движении.

Определим понятие согласованного продолжения набора скалярных потенциалов ϕ , $\tilde{\phi}$, φ , $\tilde{\varphi}$ при Δ -движении. Заметим, что скалярный потенциал ϕ при извест-

ном векторном потенциале $\mathbf{A}$ в трубке U однозначно восстанавливается, если задано его значение на каком-нибудь отрезке вдоль центральной линии трубки. Действительно, при известном $\mathbf{A}$ потенциал ϕ восстанавливается однозначно с точностью до константы. При сформулированном условии произвол в выборе константы пропадает. Аналогичное утверждение справедливо и для потенциалов $\tilde{\phi}$, φ , $\tilde{\varphi}$.

Скажем, что при Δ -движении трубок набор скалярных потенциалов ϕ , $\tilde{\varphi}$ в трубке U и набор скалярных потенциалов $\tilde{\phi}$, φ в трубке $\tilde{U}$ до и после этого преобразования *соответствуют друг другу*, если вне шара, там, где преобразование неподвижно, ограничения указанных скалярных потенциалов совпадают соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В предыдущем определении предполагается, что при Δ -движении значение потенциалов $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ на соответствующих (неподвижных) участках трубок вне D соответственно совпадают. Строго говоря, это предположение выполняется лишь при дополнительном предельном переходе, когда диаметры трубок и радиус шара D стремятся к нулю. Мы будем предполагать, что перемещение малых участков трубок внутри D не влияет на значения вектор-потенциалов во внешности D .

Теперь сформулируем теорему о связи инварианта W с обобщенным инвариантом Сато–Левина β (см. [11], [13]). Обозначим через $W(+\varepsilon)$ (соответственно $W(-\varepsilon)$) значение интеграла W после (соответственно до) Δ -движения, через $\beta(+\varepsilon)$ (соответственно $\beta(-\varepsilon)$) – значение обобщенного инварианта Сато–Левина β , определенного зацеплением центральных линий трубок после (соответственно до) Δ -движения, через α_+ (соответственно α_-) – значение интеграла от функции α по области, образованной цилиндрическим участком трубки, окружающем положительную (соответственно отрицательную) петлю основной компоненты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть при Δ -движении наборы скалярных потенциалов ϕ , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\phi}$, φ соответствуют друг другу. Тогда при неособом Δ -движении интеграл W не изменяется, а при особом преобразовании справедлива формула

$$W(+\varepsilon) - W(-\varepsilon) = \Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (\beta(+\varepsilon) - \beta(-\varepsilon)) + \Phi \tilde{\Phi} (\alpha_+ - \alpha_-). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим Δ -движение внутри шара D , переводящее конфигурацию трубок $U_{-\varepsilon} \cup \tilde{U}_{-\varepsilon}$ поля $\mathbf{B}_{-\varepsilon}$ в конфигурацию $U_{+\varepsilon} \cup \tilde{U}_{+\varepsilon}$ поля $\mathbf{B}_{+\varepsilon}$. Рассмотрим случай особого Δ -движения и предположим, что основная трубка обозначена через U .

Произвольное Δ -движение можно представить как композицию трех движений $A \circ B \circ A^{-1}$ с носителями внутри шара D . Движение A состоит в самопересечении основной компоненты. Это движение удобно определить как вертикальное перемещение двух отрезков a , b трубки U , при котором возникает точка самопересечения центральной линии основной трубки. Далее, движение B – это изотопия, перемещающая отрезок c центральной линии вспомогательной трубки в горизонтальном направлении так, что на плоскости проекции центральная линия вспомогательной трубки пересекает проекцию точки самопересечения центральной линии основной трубки. Наконец, движение A^{-1} перемещает основную компоненту в первоначальное положение.

Изучим правило подскока инварианта W при движениях A и A^{-1} . Для этого определим понятие согласованного продолжения набора скалярных потенциалов ϕ , $\tilde{\varphi}$ в трубке U и потенциалов $\tilde{\phi}$, φ в трубке $\tilde{U}$ при движении A (A^{-1}).

Заметим, что многозначная функция ϕ_0 в формуле разложения потенциала $\mathbf{A}$ при движении меняется скачком. Предположим, что до начала Δ -движения многозначная функция ϕ_0 соответствовала структуре поля $\mathbf{B}$ в трубке U , т.е. становилась линейной при переходе на накрытие по z -координате. При продолжении этой многозначной функции на основную трубку после Δ -движения указанное свойство теряется и продолженная функция имеет ступеньки, трансверсальные к цилиндрическим отрезкам a , b трубки. Продолжение функции потенциала ϕ , построенной для $\mathbf{A}$ при Δ -движении, определим без особенностей (т.е. как тождественное при естественном отождествлении соответствующих отрезков основной трубки до и после движения). Продолжение скалярного потенциала $\tilde{\phi}$ на U , а также скалярных потенциалов $\tilde{\phi}$, φ на $\tilde{U}$ определим правилом соответствия, как и при Δ -движении.

Покажем, что при движении A при описанном продолжении набора данных подскок инварианта W вычисляется по формуле

$$W(+\varepsilon) - W(-\varepsilon) = (-1)^{d+1} \Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (\tilde{\varphi}_a - \tilde{\varphi}_b)^2, \quad (9)$$

где $\tilde{\varphi}_a$, $\tilde{\varphi}_b$ – значения скалярного потенциала $\tilde{\varphi}$ в центрах соответствующих отрезков центральной линии основной трубки (предполагается, что при движении A трубки имеют пренебрежимо малый диаметр, а самопересечение основной трубки происходит по центральным точкам отрезков a , b). При этом $d = 0$, если коэффициент самозацепления центральной линии трубки U (как оснащенной кривой, снабженной вектором оснащения, восстановленного вдоль скрученной трубки, см. [14]) увеличивается, и $d = 1$, если уменьшается. Действительно, главное слагаемое $\int \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} dx$ в интеграле (4) меняется на величину $(-1)^d 2\Phi_1^2 \tilde{\Phi}^2 \tilde{\varphi}_a \tilde{\varphi}_b$. Последнее слагаемое $(-\int \tilde{\varphi}^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx)$ изменяется на величину $(-1)^{d+1} \Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (\tilde{\varphi}_a^2 + \tilde{\varphi}_b^2)$. Второе слагаемое не изменяется. Следовательно, значение интеграла изменяется в соответствии с формулой (9).

При преобразовании B значение W не меняется. При обратном преобразовании A^{-1} при согласованном продолжении скалярных потенциалов формула подскока инварианта имеет вид

$$W(+\varepsilon) - W(-\varepsilon) = (-1)^d \Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (\tilde{\varphi}_a - \tilde{\varphi}_b + 1)^2. \quad (10)$$

Суммируя формулы (9) и (10), получим формулу подскока инварианта при Δ -движении:

$$W(+\varepsilon) - W(-\varepsilon) = (-1)^d \Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (2(\tilde{\varphi}_a - \tilde{\varphi}_b) + 1). \quad (11)$$

Обозначим через Λ_+ (соответственно Λ_-) коэффициент зацепления положительной (соответственно отрицательной) петли основной компоненты со вспомогательной компонентой после Δ -движения. Воспользуемся формулой

$$\Phi \tilde{\Phi} (\tilde{\varphi}_a - \tilde{\varphi}_b + 1) + \alpha_+ = \Phi \tilde{\Phi} \Lambda_+. \quad (12)$$

Кроме того, воспользуемся формулой

$$\Phi \tilde{\Phi} (\Lambda_+ + \Lambda_-) = \alpha_+ + \alpha_-. \quad (13)$$

Из формул (12), (13) вытекает равенство

$$2\Phi \tilde{\Phi} (\tilde{\varphi}_a - \tilde{\varphi}_b + 1) = \Phi \tilde{\Phi} (\Lambda_+ - \Lambda_-) - (\alpha_+ - \alpha_-). \quad (14)$$

При подстановке в формулу (11) значения правой части из (14) получится следующее выражение:

$$W(+\varepsilon) - W(-\varepsilon) = (-1)^d [\Phi^2 \tilde{\Phi}^2 (2(\Lambda_+ - \Lambda_-) - 1) - \Phi \tilde{\Phi} (\alpha_+ - \alpha_-)]. \quad (15)$$

Согласно результатам [11] формула (15) является переформулировкой формулы (8).

Случай, когда основной является трубка $\tilde{U}$, разбирается аналогично. Теорема 2 доказана.

3. Замечания и обсуждения

Построено новое интегральное выражение W , определенное для магнитного поля, представленного двумя магнитными трубками. Полученное выражение не сохраняется при диффеоморфизмах среды, сохраняющих объем. При заданном значении поля скоростей однопараметрического семейства диффеоморфизмов жидкой проводящей среды в теореме 1 вычисляется скорость изменения интеграла W . Формула из следствия позволяет аналогичным образом исправить ошибку в основной формуле (5) работы [15]. В лемме 1.1 этой работы ошибочно утверждалось, что вектор $C(x; x_i, \tilde{x}_i)$ является бездивергентным, в то время как его дивергенция не обращается в нуль в особых точках $x_1, \tilde{x}_i$. Теорема 2 показывает, каким образом построенный интеграл W связан с обобщенным инвариантом Сато–Левина β от зацепления, образованного центральными линиями данной пары трубок. При этом топологическую интерпретацию получает правило изменения W при Δ -движении трубок.

Обобщенный инвариант Сато–Левина является простейшим инвариантом изотопического класса двухкомпонентного зацепления, который не выражается через коэффициент зацепления компонент. Обобщенный инвариант Сато–Левина β включается в последовательность инвариантов β_k (при $k = 2$), которые вычисляются по матрице коэффициентов зацепления компонент и второму коэффициенту в нормализованном полиноме Александра k -компонентного зацепления (см. [16]) и всех его подзацеплений с меньшим числом компонент. Инварианты в рассматриваемой последовательности имеют общие алгебраические свойства и сходные определения. Поэтому они также называются обобщенными инвариантами Сато–Левина от зацепления с соответствующим числом компонент.

В работе [10] фактически исследован следующий по счету инвариант в рассматриваемой последовательности инвариантов и построен сохраняющийся относительно диффеоморфизмов среды интеграл, который вычисляется через топологические инварианты β_2, β_3 и коэффициенты зацепления компонент. Интегральная формула, полученная в [10], имеет высокий порядок (порядок 12).

Комбинируя подход, развитый в настоящей работе, с подходом [10], можно получить различные интегральные выражения для интегралов W_k . Особенно интересным представляется задача построения интеграла W_4 для инварианта β_4 . Такое исследование связано с подходом, предложенным в [17], и, вероятно, приводит к интегралу, наиболее подходящему для решения целого ряда задач МГД.

Авторы благодарят И. С. Красильщика, Ф. Ю. Попеленского, А. И. Реза, В. Б. Семикоза, Д. Д. Соколова, А. Г. Хованского за обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000.
- [2] P. Akhmetiev, A. Ruzmaikin, “A fourth-order topological invariant of magnetic or vortex lines”, *J. Geom. Phys.*, **15**:2 (1995), 95–101.
- [3] Ch. Mayer, *Topological Link Invariants of Magnetic Fields*, Thesis, Bochum, 2003.
- [4] M. I. Monastyrsky, V. S. Retakh, “Topology of linked defects in condensed matter”, *Comm. Math. Phys.*, **103**:3 (1986), 445–459.
- [5] M. V. Monastyrsky, P. V. Sasorov, “Topological invariants in magnetic hydrodynamics”, *Sov. Phys. JETP*, **93** (1987), 1210–1220.
- [6] M. A. Berger, “Third-order braid invariants”, *J. Phys. A*, **24**:17 (1991), 4027–4036.
- [7] N. W. Evans, M. A. Berger, “A hierarchy of linking integrals”, *Topological Aspects of Fluids and Plasmas* (Santa Barbara, CA, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. E Appl. Sci., **218**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 237–248.
- [8] G. Hornig, Ch. Mayer, “Towards a third-order topological invariant for magnetic fields”, *J. Phys. A*, **35**:17 (2002), 3945–3959.
- [9] H. v. Bodecker, G. Hornig, “Link invariants of electromagnetic fields”, Article № 030406, *Phys. Rev. Lett.*, **92**:3 (2004), 4 pp..
- [10] P. M. Akhmetiev, “On a new integral formula for an invariant of 3-component oriented links”, *J. Geom. Phys.*, **53**:2 (2005), 180–196.
- [11] P. M. Akhmetiev, “On a higher analog of the linking number of two curves”, *Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **185**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 113–127.
- [12] Y. Nakanishi, “Delta link homotopy for two component links”, *Topology Appl.*, **121**:1–2 (2002), 169–182.
- [13] П. М. Ахметьев, Д. Реповш, “Обобщение инварианта Сато–Левина”, *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Тр. МИАН, **221**, Наука, М., 1998, 69–80.
- [14] П. М. Ахметьев, О. В. Кунаковская, В. А. Кутвицкий, “Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности”, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 150–160.
- [15] П. М. Ахметьев, “О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергентных векторных полей”, *Геометрия и топология*. 6, Зап. научн. сем. ПОМИ, **279**, ПОМИ, СПб., 2001, 15–23.
- [16] S. A. Melikhov, *Colored Finite Type Invariants and a Multi-Variable Analogue of the Conway Polynomial*, [arXiv: math.GT/0312007](https://arxiv.org/abs/math.GT/0312007).
- [17] П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш, “Об инвариантах Милнора четырехкомпонентных зацеплений”, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 496–507.

П. М. Ахметьев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pmakhmet@mi.ras.ru

Поступило

10.10.2007

Исправленный вариант

21.04.2008

О. В. Кунаковская

Воронежский государственный университет