Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков, О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 803–816

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:42:35

О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций

Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков

Исследуются решетки конгруэнций полуколец и полуполей непрерывных неотрицательных функций над произвольным топологическим пространством. Доказана продолжаемость конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций до конгруэнций полукольца непрерывных неотрицательных функций.

Библиография: 6 названий.

Пусть $C^+(X)$ ($U(X)$) – полукольцо (полуполе без нуля) всех непрерывных неотрицательных (положительных) функций, определенных на произвольном топологическом пространстве X , с обычными операциями сложения и умножения функций. Если вместо сложения $+$ взять операцию $\max$ $\vee$, то получим идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)$ и полуполе $U^\vee(X)$. Кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X служит кольцом разностей для $C^+(X)$ и для $U(X)$.

Исследуются решетки конгруэнции этих полуколец и полуполей, изучение которых начато в [1]. В теореме 4.1 статьи [1] доказано, что идеальность всех конгруэнций полуполя $U(X)$ равносильна псевдокомпактности пространства X . Из чего следует продолжаемость конгруэнций с полуполя $U(X)$ на полукольцо $C^+(X)$ для любого псевдокомпактного пространства X . Возникает естественный вопрос, верно ли данное утверждение для произвольного пространства X . Решению этой задачи в случае полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ и посвящена настоящая статья.

Отметим, что идемпотентные полуполя изучались В. П. Масловым и его учениками как основа идемпотентного анализа [2].

1. Основные понятия. Исходные понятия теории полуколец имеются в монографии Голана [3]. Теория колец непрерывных функций изложена в известной книге Гилмана и Джерисона [4].

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, в которой $\langle S, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ – моноид, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения, тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ и $0 \neq 1$.

Если операция умножения на S коммутативна, то S – *коммутативное полукольцо*. Полукольцо, не являющееся кольцом, каждый элемент которого обратим, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Если для каждого $a \in S$ выполняется равенство $a + a = a$, то S называется (*аддитивно*) *идемпотентным* полукольцом.

Пусть X – топологическое пространство. На кольце $C(X)$ зададим поточечно операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

для любых $f, g \in C(X)$ и $x \in X$.

На множестве $C(X)$ зададим порядок

$$f \leq g \iff \forall x \in X (f(x) \leq g(x)).$$

Запись $f < g$ обозначает, что $f \leq g$, но $f \neq g$.

Для каждой функции $f \in C(X)$ множества

$$Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \text{coz } f = X \setminus Z(f)$$

называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* на X соответственно. Обозначим

$$\text{pos } f = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \quad \text{и} \quad \text{neg } f = \{x \in X \mid f(x) < 0\}.$$

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности на S , сохраняющее полукольцевые операции. Пусть ρ – конгруэнция на полукольце S . Полукольцо $S/\rho = \{[a]_\rho \mid a \in S\}$ всех классов $[a]_\rho = \{s \in S \mid s \rho a\}$, $a \in S$, конгруэнтности называется *фактор-полукольцом* полукольца S по конгруэнции ρ . Через $\ker \rho$ будем обозначать класс единицы $[1]_\rho$ конгруэнции ρ и называть его *ядром* полукольца S . Ядро конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$ назовем $\vee$ -*ядром*.

Пусть I – идеал полукольца S . Отношение σ_I на S :

$$\forall a, b \in S \quad (a \sigma_I b \iff \exists u, v \in I (a + u = b + v))$$

является *конгруэнцией Берна* по идеалу I . Это наименьшая конгруэнция, содержащая идеал I в классе нуля.

Пусть I – идеал кольца $C(X)$. Конгруэнция $\gamma(I)$ на полукольце $C^+(X)$ или полуполе $U(X)$, заданная формулой $a \gamma(I) b \iff a - b \in I$ для любых $a, b \in C^+(X)$ или $U(X)$, называется *идеальной* конгруэнцией на $C^+(X)$ или $U(X)$ соответственно. Любая идеальная конгруэнция $\gamma(I) \in \text{Con } U(X)$ продолжается до соответствующей конгруэнции $\gamma(I)$ на $C^+(X)$.

Множество всех конгруэнций $\text{Con } S$ полукольца S является полной решеткой относительно включения $\subseteq$. Точной верхней гранью двух конгруэнций $\rho, \sigma \in \text{Con } S$ является транзитивное замыкание $\rho \vee \sigma$ композиции $\rho \circ \sigma$ этих конгруэнций. Точной нижней гранью конгруэнций $\rho, \sigma \in \text{Con } S$ является их пересечение $\rho \cap \sigma$. Наименьшим элементом решетки $\text{Con } S$ является отношение равенства $\mathbf{0}$, наибольшим – одноклассовая конгруэнция $\mathbf{1}$.

2. О ядрах конгруэнций на полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$. Подмножество A упорядоченного множества S называется *выпуклым*, если вместе с элементами $s_1 \leq s_2$ множество A содержит все элементы s , удовлетворяющие условию $s_1 \leq s \leq s_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для полукольца $C^\vee(X)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) множество I в $C^\vee(X)$ является классом нуля некоторой конгруэнции тогда и только тогда, когда I – выпуклый идеал;
- 2) классы любой конгруэнции на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполе $U^\vee(X)$ выпуклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $I = [0]_\rho$ для некоторой конгруэнции $\rho \in \text{Con } C^\vee(X)$. Ясно, что I – идеал полукольца $C^\vee(X)$. Пусть $g \leq f$ и $f\rho 0$, тогда $(f \vee g)\rho(0 \vee g)$ и $f\rho g$. Поэтому идеал I выпуклый.

Пусть I – выпуклый идеал. Возьмем конгруэнцию Берна $\sigma = \sigma_I$:

$$f\sigma g \iff \exists \chi \in I \quad f \vee \chi = g \vee \chi.$$

Если $\tau \in I$, то $\tau \vee \tau = 0 \vee \tau$ влечет $\tau \in [0]_\sigma$. Пусть $\tau \in [0]_\sigma$. Тогда существует такой $\chi \in I$, что $\tau \vee \chi = 0 \vee \chi = \chi$. Откуда $\tau \leq \chi$. Так как I выпукло, то $\tau \in I$. Итак, $I = [0]_\sigma$.

2) Пусть ρ – произвольная конгруэнция на $C^\vee(X)$ (или на $U^\vee(X)$), $f_1, f_2 \in [g]_\rho$, $f \in C^\vee(X)$ и $f_1 \leq f \leq f_2$. Тогда

$$[f]_\rho = [f \vee f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_2]_\rho = [f \vee f_2]_\rho = [f_2]_\rho = [g]_\rho.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Мультипликативная нормальная подгруппа K полутела U является ядром тогда и только тогда, когда $k_1 s_1 + \dots + k_n s_n \in K$ для любых $k_1, \dots, k_n \in K$ и любых $s_1, \dots, s_n \in U$ с условием $s_1 + \dots + s_n = 1$. При этом K и ρ связаны соотношениями

$$uv\rho \iff uv^{-1} \in K \quad \text{для любых } u, v \in U \text{ и } K = \ker \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по n . Для $n = 2$ это предложение рассмотрено в [3; предложение 9.23].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решетка $\text{Con } U$ изоморфна решетке

$$\{\ker \rho \mid \rho \in \text{Con } U\}$$

всех ядер полутела U с операциями умножения и пересечения ядер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Мультипликативная подгруппа K полуполя $U^\vee(X)$ является $\vee$ -ядром тогда и только тогда, когда K выпукла и замкнута относительно операций взятия максимума $\vee$ (равносильно, минимума $\wedge$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется мультипликативная подгруппа K в $U^\vee(X)$. Если K является $\vee$ -ядром, то оно выпукло по предложению 1, 2) и, очевидно, замкнуто относительно операции взятия максимума $\vee$. Для любых $f, g \in K$ имеем $f \wedge g = (f^{-1} \vee g^{-1})^{-1} \in K$. Значит, K замкнуто относительно операции $\wedge$.

Обратно, пусть K выпукло и замкнуто относительно $\vee$. Тогда K замкнуто относительно $\wedge$. Рассмотрим отношение эквивалентности ρ на $U^\vee(X)$, заданное формулой

$$f\rho g \iff fg^{-1} \in K \quad \text{для любых } f, g \in U^\vee(X).$$

Ясно, что $[1]_\rho = K$.

Проверим сохранение операций. Возьмем произвольные $f, g \in U^\vee(X)$ такие, что $f\rho g$. Для всех $h \in U^\vee(X)$ имеем

$$(fh)\rho(gh) \iff fh(gh)^{-1} = fh h^{-1} g^{-1} = fg^{-1} \in K \iff f\rho g.$$

Поэтому, умножение сохраняется.

Покажем, что

$$(f \vee h)(g \vee h)^{-1} = (f \vee h)(g^{-1} \wedge h^{-1}) \in K.$$

Имеем

$$\begin{aligned} fg^{-1} \wedge 1 &= fg^{-1} \wedge hh^{-1} \leq (f \vee h)g^{-1} \wedge (f \vee h)h^{-1} = (f \vee h)(g^{-1} \wedge h^{-1}) \\ &= f(g^{-1} \wedge h^{-1}) \vee h(g^{-1} \wedge h^{-1}) \leq fg^{-1} \vee hh^{-1} = fg^{-1} \vee 1. \end{aligned}$$

В силу замкнутости K относительно операций $\vee$ и $\wedge$ получаем $fg^{-1} \vee 1 \in K$ и $fg^{-1} \wedge 1 \in K$. Выпуклость K влечет $(f \vee h)(g \vee h)^{-1} \in K$. Следовательно, $(f \vee h)\rho(g \vee h)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. На полуполе $U^+(X)$ любое $\vee$ -ядро является ядром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – $\vee$ -ядро. В силу предложения 2 достаточно показать, что для любых $f_1, f_2 \in U^+(X)$ и любых $e_1, e_2 \in K$ условие $f_1 + f_2 = 1$ влечет $f_1e_1 + f_2e_2 \in K$. Имеем

$$e_1 \wedge e_2 = (f_1 + f_2)(e_1 \wedge e_2) \leq f_1e_1 + f_2e_2 \leq (f_1 + f_2)(e_1 \vee e_2) = e_1 \vee e_2,$$

причем, $e_1 \wedge e_2, e_1 \vee e_2 \in K$ по предложению 3. В силу выпуклости $\vee$ -ядра (предложение 1, 2)) получаем $f_1e_1 + f_2e_2 \in K$.

На полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$ конгруэнции однозначно задаются своими ядрами. Поэтому на основании замечания 1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Решетка конгруэнций $\text{Con } U^\vee(X)$ является подрешеткой решетки конгруэнций $\text{Con } U(X)$.

Главной конгруэнцией ρ на полуполе U , порожденной парой (u, v) , называется наименьшая конгруэнция на U с условием uv . Она однозначно задается парой $(uv^{-1}, 1)$.

Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ (соответственно $U^\vee(X)$), порожденной парой $(\varphi, 1)$, будем называть *главным ядром* и обозначим $\ker(\varphi)$ (соответственно $\ker^\vee(\varphi)$).

Семенов [5; теорема 1] установлено строение главных конгруэнций на полуполе $U(X)$.

ТЕОРЕМА А. Главные ядра $\ker(\varphi)$ на полуполе $U(X)$ и только они имеют вид

$$\{v \in U(X) \mid v - 1 \in (\varphi - 1)C(X), (\exists k \in \mathbb{N})(\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leq v \leq (\varphi \vee \varphi^{-1})^k\}. \quad (2.1)$$

Для главных $\vee$ -ядер теорема приобретает следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Главные ядра $\ker^\vee(\varphi)$ на полуполе $U^\vee(X)$ и только они имеют вид

$$\{v \in U^\vee(X) \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \leq v \leq (\varphi \vee \varphi^{-1})^k\}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отношение ρ , заданное условием

$$f\rho g \iff (\exists k \in \mathbb{N})f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \leq g \leq f(\varphi \vee \varphi^{-1})^k$$

для любых $f, g \in U^\vee(X)$. Легко видеть, что это отношение эквивалентности, причем $[1]_\rho$ есть множество (2.2).

Проверим сохранение операций. Рассмотрим произвольные $f, g, h \in U^\vee(X)$. Пусть $f\rho g$, т.е.

$$f(\varphi^k \wedge \varphi^{-k}) \leq g \leq f(\varphi^k \vee \varphi^{-k})$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(f \vee h)(\varphi^k \wedge \varphi^{-k}) \leq f(\varphi^k \wedge \varphi^{-k}) \vee h \leq g \vee h \leq f(\varphi^k \vee \varphi^{-k}) \vee h \leq (f \vee h)(\varphi^k \vee \varphi^{-k})$$

и

$$hf(\varphi^k \wedge \varphi^{-k}) \leq hg \leq hf(\varphi^k \vee \varphi^{-k}).$$

Откуда $(f \vee h)\rho(g \vee h)$ и $(fh)\rho(gh)$. Таким образом, ρ является конгруэнцией на полуполе $U^\vee(X)$, причем $[1]_\rho = \ker^\vee(\varphi)$.

Это наименьшая конгруэнция на $U^\vee(X)$, порожденная парой $(\varphi, 1)$. Действительно, пусть τ – произвольная конгруэнция на $U^\vee(X)$, для которой $\varphi\tau 1$. Рассмотрим произвольные функции $f, g \in U^\vee(X)$ такие, что $f\rho g$. Для них

$$f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \leq g \leq f(\varphi \vee \varphi^{-1})^k$$

при некотором $k \in \mathbb{N}$. По предложению 3

$$f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \in [f]_\tau \quad \text{и} \quad f(\varphi \vee \varphi^{-1})^k \in [f]_\tau.$$

Значит, по предложению 1, 2) $g \in [f]_\tau$ и $f\tau g$.

3. Продолжение конгруэнций для полукольца $C^\vee(X)$. Для каждой конгруэнции $\rho \in \text{Con } U^\vee(X)$ с ядром $K = [1]_\rho$ введем следующие бинарные отношения $\vee_K$ и ρ_K на полукольце $C^\vee(X)$.

Будем считать, что функции $f, g \in C^\vee(X)$ находятся в отношении $\vee_K$, если существуют

$$f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in C^\vee(X), \quad u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in K,$$

для которых выполняются условия

$$f = f_1 \vee \dots \vee f_n, \quad g = g_1 \vee \dots \vee g_m, \quad \bigvee_{i=1}^n f_i u_i = \bigvee_{i=1}^m g_i v_i. \quad (3.1)$$

Отношение ρ_K задается условием

$$f\rho_K g \iff gk \leq f \leq gk' \quad \text{для некоторых } k, k' \in K.$$

ЛЕММА 1. Для любых $f, g \in C^\vee(X)$ $f \vee_K g$ тогда и только тогда, когда существуют $g_1, \dots, g_n \in C^\vee(X)$ и $w_1, \dots, w_n \in K$ такие, что $g = g_1 \vee \dots \vee g_n$ и $f = \bigvee_{i=1}^n g_i w_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $f \vee_K g$ при $f, g \in C^\vee(X)$. По определению отношения $\vee_K$ существуют $u_i, v_j \in K$, $f_i, g'_j \in C^\vee(X)$, для которых

$$f = \bigvee_{i=1}^n f_i, \quad g = \bigvee_{j=1}^m g'_j, \quad \bigvee_{i=1}^n f_i u_i = \bigvee_{j=1}^m g'_j v_j = s.$$

Так как $f_i, g'_j \in C^\vee(X)$, то можно считать, что $m = n$. Для элементов $\beta_{ij} = f_i u_i \wedge g'_j v_j$ имеем

$$\begin{aligned} f_i u_i &= f_i u_i \wedge s = f_i u_i \wedge \left(\bigvee_{j=1}^n g'_j v_j \right) = \bigvee_{j=1}^n (f_i u_i \wedge g'_j v_j) = \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}, \\ g'_j v_j &= g'_j v_j \wedge s = g'_j v_j \wedge \left(\bigvee_{i=1}^n f_i u_i \right) = \bigvee_{i=1}^n (g'_j v_j \wedge f_i u_i) = \bigvee_{i=1}^n \beta_{ij}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$w_{n(i-1)+j} = u_i^{-1} v_j \in K, \quad g_{n(i-1)+j} = \beta'_{ij} = \beta_{ij} v_j^{-1} \in C^\vee(X)$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$.

Получаем

$$\begin{aligned} g'_j &= \bigvee_{i=1}^n \beta_{ij} v_j^{-1} = \bigvee_{i=1}^n \beta'_{ij}, & f_i &= \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij} u_i^{-1}, \\ g &= \bigvee_{j=1}^n g_j = \bigvee_{ij=1, \dots, n} \beta'_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n^2} g_k, \\ f &= \bigvee_{i=1}^n f_i = \bigvee_{i,j=1, \dots, n} \beta_{ij} u_i^{-1} = \bigvee_{i,j=1, \dots, n} \beta'_{ij} u_i^{-1} v_j = \bigvee_{k=1}^{n^2} g_k w_k. \end{aligned}$$

Обратно, если $g = g_1 \vee \dots \vee g_m$ и $f = \bigvee_{j=1}^m g_j w_j$ для некоторых $w_1, \dots, w_m \in K$ и $g_1, \dots, g_m \in C^\vee(X)$, то $f u = \bigvee_{j=1}^m g_j w_j$ при $u = 1$. Поэтому $f \vee_K g$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть ρ есть некоторая конгруэнция на полуполе $U^\vee(X)$ и $K = [1]_\rho$. Тогда отношение $\vee_K$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^\vee(X)$, склеивающей ядро $K: K \subseteq \ker \vee_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = [1]_\rho$, где $\rho \in \text{Con } U^\vee(X)$. Докажем, что $\vee_K$ — отношение эквивалентности.

Рефлексивность и симметричность отношения $\vee_K$ очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $f \vee_K g$ и $g \vee_K h$. По лемме 1 существуют $u_i \in K$ и $f_i \in C^\vee(X)$, для которых

$$f = \bigvee_{i=1}^n f_i \quad \text{и} \quad g = \bigvee_{i=1}^n f_i u_i,$$

и существуют $v_j \in K$ и $h_j \in C^\vee(X)$, для которых

$$h = \bigvee_{k=1}^m h_k \quad \text{и} \quad g = \bigvee_{i=1}^m h_i v_i.$$

Тогда $\bigvee_{i=1}^n f_i u_i = \bigvee_{i=1}^m h_i v_i$, т.е. $f \vee_K h$.

Пусть $f, g, h \in C^\vee(X)$ и $f \vee_K g$. Тогда выполняются условия (3.1). Следовательно,

$$\bigvee_{i=1}^n (f_i h) u_i = \bigvee_{j=1}^m (g_j h) v_j \quad \text{и} \quad \left(\bigvee_{i=1}^n f_i u_i \right) \vee h \cdot 1 = \left(\bigvee_{j=1}^m g_j v_j \right) \vee h \cdot 1.$$

Откуда $(fh) \vee_K (gh)$ и $(f \vee h) \vee_K (g \vee h)$. Итак, отношение $\vee_K$ – конгруэнция на полукольце $C^\vee(X)$.

Покажем, что $K \subseteq [1]_{\vee_K}$. Пусть $f \in K$. Возьмем $n = 1$, $e_1 = 1$, $v_1 = f \in K$. Получим, $f = e_1 v_1$ и $f \vee_K 1$ по определению конгруэнции $\vee_K$. Следовательно, $K \subseteq [1]_{\vee_K}$.

Теперь докажем, что конгруэнция $\vee_K \in \text{Con } C^\vee(X)$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^\vee(X)$, склеивающей ядро $K = [1]_\rho$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию $\tau \in \text{Con } C^\vee(X)$, для которой $K \subseteq [1]_\tau$, и покажем, что $f \vee_K g$ влечет $f\tau g$. Пусть $f \vee_K g$ для $f, g \in C^\vee(X)$. Согласно лемме 1 существуют $u_1, \dots, u_n \in K$ и $g_1, \dots, g_n \in C^\vee(X)$ такие, что $g = g_1 \vee \dots \vee g_n$ и $f = \bigvee_{i=1}^n g_i u_i$.

Так как $K \subseteq [1]_\tau$, то все $u_i \tau 1$. Тогда

$$[f]_\tau = \left[\bigvee_{i=1}^n g_i u_i \right]_\tau = \bigvee_{i=1}^n [g_i]_\tau [u_i]_\tau = \bigvee_{i=1}^n [g_i]_\tau = \left[\bigvee_{i=1}^n g_i \right]_\tau = [g]_\tau,$$

т.е. $f\tau g$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ρ – произвольная конгруэнция на полуполе $U^\vee(X)$ и K – ее ядро. Тогда конгруэнция $\vee_K$ является продолжением ρ на полукольцо $C^\vee(X)$, причем $\ker \vee_K = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предложения 7 известно, что $\vee_K$ – конгруэнция на $C^\vee(X)$ и $K \subseteq [1]_{\vee_K}$. Проверим обратное включение.

Пусть $u \in C^\vee(X)$ и $u \vee_K 1$. Тогда найдутся такие $e_1, \dots, e_n \in C^\vee(X)$, удовлетворяющие условию $e_1 \vee \dots \vee e_n = 1$, и $u_1, \dots, u_n \in K$, что

$$u = \bigvee_{i=1}^n u_i e_i \in [1]_{\vee_K}.$$

Имеем

$$\bigvee_{i=1}^n u_i \geq \bigvee_{i=1}^n u_i e_i = u \geq \bigvee_{j=1}^n \left(\bigwedge_{i=1}^n u_i \right) e_j = \bigwedge_{i=1}^n u_i \cdot \bigvee_{j=1}^n e_j = \bigwedge_{i=1}^n u_i,$$

причем $\bigwedge_{i=1}^n u_i$ и $\bigvee_{i=1}^n u_i$ лежат в K по предложению 3. Заключаем, что $u \in K$ в силу выпуклости K .

Итак, $\ker \vee_K = K$ и конгруэнция $\vee_K$ является продолжением ρ на $C^\vee(X)$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2. Пусть K – некоторое ядро полуполя $U^\vee(X)$. Тогда отношение ρ_K является наименьшей конгруэнцией на $C^\vee(X)$, склеивающих K . При этом $[1]_{\rho_K} = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = [1]_\rho$, где $\rho \in \text{Con } U^\vee(X)$. Докажем, что ρ_K – отношение эквивалентности. Рефлексивность очевидна. Если $f\rho_K g$, то по определению отношения ρ_K существуют такие $k, l \in K$, что $gk \leq f \leq gl$. Тогда, $fl^{-1} \leq g \leq fk^{-1}$, где $k^{-1}, l^{-1} \in K$, т.е. $g\rho_K f$.

Проверим транзитивность. Пусть $f\rho_K g$ и $g\rho_K h$. Тогда существуют такие $k, l, t, t' \in K$, что $gk \leq f \leq gl$ и $ht \leq g \leq ht'$. Откуда $h(tk) \leq gk \leq f \leq gl \leq h(t'l)$. Так как $tk, t'l \in K$, то $f\rho_K h$.

Пусть $f, g, h \in C^\vee(X)$, причем $f\rho_K g$. Тогда $gk \leq f \leq gl$, $h g k \leq h f \leq h g l$ и $gk \vee h \leq f \vee h \leq gl \vee h$ для некоторых $k, l \in K$. Имеем

$$\begin{aligned} (g \vee h)(k \wedge 1) &= g(k \wedge 1) \vee h(k \wedge 1) \leq gk \vee h \leq f \vee h \\ &\leq gl \vee h \leq g(l \vee 1) \vee h(l \vee 1) = (g \vee h)(l \vee 1), \end{aligned}$$

причем $k \wedge 1 \in K$ и $l \vee 1 \in K$. Значит, $(hf)\rho_K(hg)$ и $(f \vee h)\rho_K(g \vee h)$.

Итак, ρ_K – конгруэнция на полукольце $C^\vee(X)$.

Докажем, что $K = \ker \rho_K$. Ясно, что $K \subseteq [1]_{\rho_K}$.

Обратно, пусть $f \in [1]_{\rho_K}$, т.е. $f\rho_K 1$. Существуют $k, l \in K$, для которых $1 \cdot k \leq f \leq 1 \cdot l$. По предположению 1, 2) $f\rho_K 1$, т.е. $f \in K$.

Теперь докажем, что конгруэнция $\rho_K \in \text{Con } C^\vee(X)$ является наименьшей конгруэнцией на $C^\vee(X)$, склеивающей ядро $K = [1]_\rho$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию $\tau \in \text{Con } C^\vee(X)$, для которой $K \subseteq [1]_\tau$. Пусть $f\rho_K g$, т.е. $gk \leq f \leq gl$ для некоторых $k, l \in K$. Поскольку $[gk]_\tau = [g]_\tau[k]_\tau = [g]_\tau$ и $[gl]_\tau = [g]_\tau[l]_\tau = [g]_\tau$, то по предположению 1, 2) $f \in [g]_\tau$. Значит, $f\tau g$ и $\rho_K \subseteq \tau$.

ЛЕММА 3. Для любого $\vee$ -ядра K отношение ρ_K является конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$.

Для доказательства достаточно показать, что отношение ρ_K стабильно относительно сложения. Действительно, пусть $f, g, h \in C^\vee(X)$ и $f\rho_K g$. Тогда $gk \leq f \leq gl$ для некоторых $k, l \in K$. Для $s = k \wedge 1$, $t = l \vee 1 \in K$ получаем

$$(g + h)s = gs + hs \leq gk + h \leq f + h \leq gl + h \leq gt + ht = (g + h)t.$$

Таким образом, $(f + h)\rho_K(g + h)$ и ρ_K – конгруэнция на $C^+(X)$.

Из предложения 7 и леммы 2 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для любого $\vee$ -ядра K конгруэнции $\vee_K$ и ρ_K совпадают.

Полукольцо M называется *ретрактом* полукольца N , если существуют гомоморфизмы $\pi: N \rightarrow M$ и $\chi: M \rightarrow N$ такие, что $\pi \circ \chi = 1_M$ – тождественное отображение множества M . В этом случае π есть эпиморфизм, а χ – мономорфизм.

ТЕОРЕМА 2. Решетка конгруэнций $\text{Con } U^\vee(X)$ является ретрактом решетки конгруэнций $\text{Con } C^\vee(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} \vartheta: \text{Con } C^\vee(X) &\mapsto \text{Con } U^\vee(X), & \vartheta(\rho) &= \rho|_{U^\vee(X)}, \\ \zeta: \text{Con } U^\vee(X) &\hookrightarrow \text{Con } C^\vee(X), & \zeta(\rho) &= \vee_{\ker(\rho)}. \end{aligned}$$

По теореме 1 отображение ограничения ϑ сюръективно, а отношение ζ инъективно.

Покажем, что ζ – гомоморфизм. Так как каждая конгруэнция на $U^\vee(X)$ однозначно определяется своим ядром, достаточно показать, что

$$\vee_K \cap \vee_H = \vee_{K \cap H} \quad \text{и} \quad \vee_K \vee \vee_H = \vee_{KH},$$

где K, H – ядра конгруэнций на $U^\vee(X)$.

Учитывая предложение 8, докажем сначала равенство

$$\rho_K \cap \rho_H = \rho_{K \cap H}.$$

Пусть $f\rho_K g$ и $f\rho_H g$. Существуют такие $k, k' \in K$ и $h, h' \in H$, что $kg \leq f \leq k'g$ и $hg \leq f \leq h'g$. Рассмотрим функции $l = (k \vee h) \wedge 1$ и $l' = (k' \wedge h') \vee 1$. Легко видеть, что $k \wedge 1 \leq l \leq 1$, $h \wedge 1 \leq l' \leq 1$, $1 \leq l \leq k' \vee 1$ и $1 \leq l' \leq h' \vee 1$. Причем, функции $k \wedge 1$, $k' \vee 1$ и 1 лежат в K , а функции $h \wedge 1$, $h' \vee 1$ и 1 лежат в H . По предложению 1, 2) получаем $l, l' \in K \cap H$. Поскольку $l \leq k \vee h$ и $l' \geq k' \wedge h'$, то $lg \leq kg \vee hg \leq f \leq k'g \wedge h'g \leq l'g$, т.е. $f\rho_{K \cap H} g$. Обратное включение $\rho_{K \cap H} \subseteq \rho_K \cap \rho_H$ очевидно.

Докажем равенство $\vee_K \vee \vee_H = \vee_{KH}$. Включение $\vee_K \vee \vee_H \subseteq \vee_{KH}$ вытекает из $\vee_K \subseteq \vee_{KH}$ и $\vee_H \subseteq \vee_{KH}$. Проверим обратное включение. Рассмотрим функции $f, g \in C^\vee(X)$ такие, что $f \vee_{KH} g$. Существуют $g_1, \dots, g_n \in C^\vee(X)$ и $k_i \in K$, $h_i \in H$, для которых $g = g_1, \dots, g_n$ и

$$f = \bigvee_{i=1}^n k_i h_i g_i.$$

Обозначив $\varphi_i = h_i g_i$ и $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \varphi_i$, имеем $f = \bigvee_{i=1}^n k_i \varphi_i$. По лемме 1 $f \vee_K \varphi$. С другой стороны, $\varphi \vee_H g$, так как $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \varphi_i = \bigvee_{i=1}^n h_i g_i$. Поэтому $f(\vee_K \circ \vee_H)g$. Значит, $\vee_{KH} \subseteq \vee_K \circ \vee_H$. Тогда $\vee_{KH} \subseteq \vee_K \circ \vee_H \subseteq \vee_K \vee \vee_H \subseteq \vee_{KH}$, откуда $\vee_{KH} = \vee_K \vee \vee_H$.

Докажем, что ϑ – гомоморфизм. Проверим сохранение операций. Пусть $\rho, \tau \in \text{Con } C^\vee(X)$. Поскольку $\rho, \tau \subseteq C^\vee(X) \times C^\vee(X)$, то

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho \cap \tau) &= (\rho \cap \tau) \cap (U(X) \times U(X)) \\ &= (\rho \cap (U(X) \times U(X))) \cap (\tau \cap (U(X) \times U(X))) = \vartheta(\rho) \cap \vartheta(\tau). \end{aligned}$$

Установим справедливость равенства $\vartheta(\rho \vee \tau) = \vartheta(\rho) \circ \vartheta(\tau)$. Очевидно, $\vartheta(\rho) \circ \vartheta(\tau) \subseteq \vartheta(\rho \vee \tau) \subseteq \vartheta(\rho \vee \tau)$. Проверим обратное включение $\vartheta(\rho \vee \tau) \subseteq \vartheta(\rho) \circ \vartheta(\tau)$. Пусть $f(\rho \vee \tau)g$ для некоторых $f, g \in U^\vee(X)$. Тогда существуют такие $u_1, \dots, u_n \in C^\vee(X)$, что $f\rho u_1 \tau u_2 \rho \dots \tau u_n \rho g$. Имеем

$$\begin{aligned} f\rho(u_1 \vee f)\tau(u_2 \vee f)\rho \dots \tau(u_n \vee f)\rho(g \vee f)\rho, \\ \rho(g \vee u_1)\tau(g \vee u_2)\rho \dots \tau(g \vee u_n)\rho g. \end{aligned}$$

Для $u_i \vee f, g \vee u_i \in U^\vee(X)$ конгруэнции ρ и τ можно переставлять. Поэтому $f(\rho|_{U^\vee(X)} \circ \tau|_{U^\vee(X)})g$, т.е. $\vartheta(\rho \vee \tau) \subseteq \vartheta(\rho) \circ \vartheta(\tau)$. Таким образом, $\vartheta(\rho \vee \tau) = \vartheta(\rho) \circ \vartheta(\tau)$.

Теперь для любой $\rho \in \text{Con } U^\vee(X)$ с ядром $K = [1]_\rho$ имеем $\vartheta(\zeta(\rho)) = \vartheta(\vee_K) = \rho$ по теореме 1. Значит, $\vartheta \circ \zeta$ – тождественное отображение на $U^\vee(X)$ и $\text{Con } U^\vee(X)$ является ретрактом решетки $\text{Con } C^\vee(X)$. Теорема доказана.

4. Продолжение конгруэнций для полукольца $C^+(X)$. Для каждой конгруэнции $\rho \in \text{Con } U(X)$ с ядром $[1]_\rho = K$ рассмотрим следующее бинарное отношение $\sim_K$ на полукольце $C^+(X)$:

$$f \sim_K g \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n f_i u_i = \sum_{i=1}^m g_i v_i$$

для некоторых $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in K$ и некоторых $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in C^+(X)$ с условиями $f = f_1 + \dots + f_n$, $g = g_1 + \dots + g_m$.

ЛЕММА 4. Пусть ρ – некоторая конгруэнция на $U(X)$, $K = [1]_\rho$. Тогда $f \sim_K g$ в том и только том случае, когда существуют $g_1, \dots, g_n \in C^+(X)$ и $w_1, \dots, w_n \in K$ такие, что

$$g = g_1 + \dots + g_n \quad \text{и} \quad f = \sum_{i=1}^n g_i w_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \sim_K g$ для $f, g \in C^+(X)$. Существуют $u_i, v_j \in K$ и $f_i, g'_j \in C^+(X)$, для которых

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \quad g = \sum_{j=1}^m g'_j, \quad \sum_{i=1}^n f_i u_i = \sum_{j=1}^m g'_j v_j.$$

Можно считать, что $n = m$.

Заметим, что для фиксированных $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leq n$, если $j = ((i + k - 2) \bmod n) + 1$, то $i = ((j - k) \bmod n) + 1$.

Для всех $k, i \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим функции из полукольца $C^+(X)$:

$$\begin{aligned} \beta_{ik} &= f_{i,k-1} \wedge g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1}, & f_{i0} &= f_i u_i, & g'_{i0} &= g'_i v_i, \\ f_{ik} &= f_{i,k-1} - \beta_{ik}, & g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k} &= g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1} - \beta_{ki}. \end{aligned}$$

Тогда при $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n \beta_{i1} + \sum_{i=1}^n f_{i1} = \sum_{i=1}^n \beta_{i1} + \sum_{i=1}^n g'_{i1}, \\ f_i u_i &= \beta_{i1} + f_{i1}, & g'_j v_j &= \beta_{j1} + g'_{j1}, \\ \text{coz } f_{i1} \cap \text{coz } g'_{i1} &= \emptyset \quad \text{для } i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим шаг $k > 1$, $k \leq n$, в предположении, что

$$\begin{aligned} s &= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \beta_{il} + \sum_{i=1}^n f_{i,k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \beta_{il} + \sum_{i=1}^n g'_{i,k-1}, \\ f_i u_i &= \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{il} + f_{i,k-1}, & g'_j v_j &= \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{((j-l) \bmod n)+1,l} + g'_{j,k-1}, \\ \text{coz } f_{i,k-1} \cap \text{coz } g'_{((i+p-2) \bmod n)+1,k-1} &= \emptyset \end{aligned}$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $p \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} s &= \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^n \beta_{il} + \sum_{i=1}^n f_{ik} = \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^n \beta_{il} + \sum_{i=1}^n g'_{ik}, \\ f_i u_i &= \sum_{l=1}^k \beta_{il} + f_{ik}, & g'_j v_j &= \sum_{l=1}^k \beta_{((j-l) \bmod n)+1,l} + g'_{jk}, \\ \text{coz } f_{ik} \cap \text{coz } g'_{((i+k-1) \bmod n)+1,k} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \{1, \dots, k-1\}$ и $j = ((i + p - 1) \bmod n) + 1$ имеем

$$\text{coz } f_{ik} = \text{coz}(f_{i,k-1} - (f_{i,k-1} \wedge g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1})) \subseteq \text{coz } f_{i,k-1},$$

аналогично

$$\text{coz } g'_{jk} \subseteq \text{coz } g'_{j,k-1}.$$

В силу предположения $\text{coz } f_{ik} \cap \text{coz } g'_{jk} = \emptyset$. Значит,

$$\text{coz } f_{ik} \cap \text{coz } g'_{((i+p-2) \bmod n)+1,k} = \emptyset \quad \text{для всех } p \in \{1, \dots, k\}.$$

При $k = n$ имеем $\text{coz } f_{in} \cap \text{coz } g'_{jn} = \emptyset$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ или

$$\text{coz } \sum_{i=1}^n f_{in} \cap \text{coz } \sum_{j=1}^n g'_{jn} = \emptyset.$$

Откуда для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_{in} &= \sum_{i=1}^n g'_{in} = 0, & s &= \sum_{i,j=1,\dots,n} \beta_{ij}, \\ f_i u_i &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}, & g'_j v_j &= \sum_{i=1}^n \beta_{((i+j-1) \bmod n)+1,j} = \sum_{i=1}^n \beta_{ij}. \end{aligned}$$

Далее доказательство леммы в точности повторяет концовку доказательства леммы 1 (с учетом замены знака $\vee$ на $+$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть K – некоторое ядро полуполя $U(X)$. Тогда отношение $\sim_K$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$, склеивающей ядро K .

С учетом леммы 4 это предложение доказывается аналогично предложению 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение

$$\vartheta^+: \text{Con } C^+(X) \mapsto \text{Con } U(X), \quad \vartheta^+(\rho) = \rho|_{U(X)},$$

является гомоморфизмом. Действительно, доказательство этого факта повторяет аналогичное рассуждение теоремы 2 с учетом замены (3.2) на

$$f\rho \frac{u_1+f}{2} \tau \frac{u_2+f}{2} \rho \cdots \tau \frac{u_n+f}{2} \rho \frac{g+f}{2} \rho \frac{g+u_1}{2} \tau \frac{g+u_2}{2} \rho \cdots \tau \frac{g+u_n}{2} \rho g.$$

Отметим также, что отображение

$$\zeta^+: \text{Con } U^\vee(X) \hookrightarrow \text{Con } C^+(X), \quad \zeta^+(\rho) = \sim_{\ker \rho},$$

сохраняет композицию $\circ$ конгруэнций.

ЛЕММА 5. Конгруэнция $\rho \in \text{Con } U(X)$ продолжается на $C^+(X)$ тогда и только тогда, когда $K = \ker \rho$ обладает свойством

$$\forall k_1, \dots, k_n \in K \quad \forall f_1, \dots, f_n \in C^+(X) \quad \left(\sum_{i=1}^n f_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n f_i k_i \in K \right). \quad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конгруэнция $\rho \in \text{Con } U(X)$ с ядром K обладает свойством $(*)$. Покажем, что конгруэнция $\sim_K$ является продолжением ρ на $C^+(X)$.

Возьмем $f, g \in U(X)$ такие, что $f \sim_K g$. По лемме 4 для некоторых $g_1, \dots, g_n \in C^+(X)$ и $k_1, \dots, k_n \in K$ имеем $g = g_1 + \dots + g_n$,

$$f = \sum_{i=1}^n g_i k_i = g \sum_{i=1}^n (g_i g^{-1}) k_i = g k, \quad \text{где} \quad k = \sum_{i=1}^n (g_i g^{-1}) k_i \in K.$$

Откуда, $f \rho g$ и $\sim_K \cap (U(X) \times U(X)) \subseteq \rho$. По предложению 9 верно обратное включение. Значит, $\sim_K \cap (U(X) \times U(X)) = \rho$ и $\sim_K$ продолжает ρ на $C^+(X)$.

Обратно, пусть конгруэнция ρ продолжаема. Тогда конгруэнция $\sim_K$ является ее продолжением как минимальная конгруэнция, склеивающая ядро $K = [1]_\rho$.

Рассмотрим всевозможные наборы $k_1, \dots, k_n \in K$ и $f_1, \dots, f_n \in C^+(X)$ с условием $f_1 + \dots + f_n = 1$. Обозначим

$$f = \sum_{i=1}^n f_i k_i \in U(X).$$

По лемме 4 $f \sim_K 1$. Следовательно, $f \rho 1$ и $f \in K$.

ЛЕММА 6. Если ядра $K_1, \dots, K_n$ конгруэнций, заданных на $U(X)$, обладают свойством $(*)$, то $K_1 \cdots K_n$ обладает этим же свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение леммы для двух ядер K, H . Пусть они обладают свойством $(*)$. Тогда

$$\begin{aligned} \forall k_1, \dots, k_n \in K \quad \forall f_1, \dots, f_n \in C^+(X) \quad & \left(\sum_{i=1}^n f_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n f_i k_i \in K \right), \\ \forall h_1, \dots, h_n \in H \quad \forall g_1, \dots, g_n \in C^+(X) \quad & \left(\sum_{i=1}^n g_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n g_i h_i \in H \right). \end{aligned}$$

Возьмем $k_i \in K, h_i \in H$ и $s_i \in C^+(X)$ с $s_1 + \dots + s_n = 1$. Для них

$$\sum_{i=1}^n s_i k_i h_i = \sum_{i,j} \frac{(s_i h_i)(k_i s_j h_j)}{s_1 h_1 + \dots + s_n h_n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{s_i h_i}{s_1 h_1 + \dots + s_n h_n} k_i \right) \sum_{j=1}^n s_j h_j,$$

причем

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i h_i}{s_1 h_1 + \dots + s_n h_n} = 1.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i h_i}{s_1 h_1 + \dots + s_n h_n} k_i \in K, \quad \sum_{j=1}^n s_j h_j \in H, \quad \sum_{i=1}^n s_i (k_i h_i) \in KH.$$

Предположим по индукции, что ядро $K_1 \cdots K_{n-1}$ полуполя $U(X)$ обладает свойством $(*)$. Тогда по доказанному и $(K_1 \cdots K_{n-1})K_n$ обладает свойством $(*)$.

ЛЕММА 7. Любая главная конгруэнция на $U(X)$ продолжается на $C^+(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана главная конгруэнция ρ на $U(X)$ с ядром $\ker(\varphi)$. Непосредственно из условия (2.1) следует, что конгруэнция ρ_0 является пересечением продолжаемой идеальной конгруэнции $\gamma((\varphi - 1)C(X))$ и конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$ с ядром $\ker^\vee(\varphi)$. Вторая конгруэнция также продолжаема на $C^+(X)$ в силу леммы 3, предложения 8 и теоремы 1.

Значит, конгруэнция ρ продолжаема на $C^+(X)$ как пересечение продолжаемых конгруэнций.

ТЕОРЕМА 3. Любая конгруэнция $\rho \in \text{Con } U(X)$ продолжается на полукольцо $C^+(X)$ до конгруэнции $\sim_K$ для $K = [1]_\rho$; при этом $[1]_{\sim_K} = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана конгруэнция $\rho \in \text{Con } U(X)$ с ядром $K = [1]_\rho$. Покажем выполнимость свойства (*) для K .

Возьмем произвольные $k_1, \dots, k_n \in K$ и рассмотрим композицию $\rho' = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_n$ главных конгруэнций ρ_i , порожденных парами $(k_i, 1)$. Очевидно, что $[1]_{\rho'} \subseteq K$. По леммам 7 и 6 ядро конгруэнции $[1]_{\rho'} = [1]_{\rho_1} [1]_{\rho_2} \dots [1]_{\rho_n}$ обладает свойством (*). Учитывая включение $[1]_{\rho'} \subseteq K$, для данного набора $k_1, \dots, k_n \in K$ получаем

$$\forall f_1, \dots, f_n \in C^+(X) \quad \left(\sum_{i=1}^n f_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n f_i k_i \in K \right).$$

Произвол в выборе k_i позволяет заключить, что K обладает свойством (*). По лемме 5 конгруэнция ρ продолжаема на $C^+(X)$.

По предложению 9 $K = [1]_\rho \subseteq [1]_{\sim_K}$. Если $f \in [1]_{\sim_K}$, то по лемме 4 $f = \sum_{i=1}^n g_i k_i$ для подходящих $k_i \in K$ и $g_i \in C^+(X)$ с условием $g_1 + \dots + g_n = 1$. Тогда по лемме 5 $f \in K$. Следовательно, $K = [1]_{\sim_K}$. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для любого ядра K полуполя $U(X)$ справедливы утверждения

- 1) если K – $\vee$ -ядро, то $\sim_K \subseteq \vee_K$;
- 2) если $2 \in K$, то K является $\vee$ -ядром и $\sim_K = \vee_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 1, леммы 3, предложений 8 и 9.

2) Пусть ядро K содержит функцию-константу $2 = 1 + 1$. Фактор-полукольцо $C^+(X)/\sim_K$ идемпотентно. Поэтому следующее отношение $\leq$ является отношением порядка на нем: $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ для произвольных $a, b \in C^+(X)/\sim_K$. Пусть $k, l \in K$. Возьмем $u \in U(X)$, для которой $k \leq u \leq l$. Тогда $u = k + f$, $l = u + g$ для некоторых $f, g \in C^+(X)$. Значит, $[u]_{\sim_K} = [k + f]_{\sim_K} = [k]_{\sim_K} + [f]_{\sim_K} = [1]_{\sim_K} + [f]_{\sim_K}$ и $[1]_{\sim_K} = [l]_{\sim_K} = [u]_{\sim_K} + [g]_{\sim_K}$. Откуда $[1]_{\sim_K} \leq [u]_{\sim_K} \leq [1]_{\sim_K}$, или $[1]_{\sim_K} = [u]_{\sim_K}$. По теореме 3 $u \in K$. Кроме того, $k \leq k \vee l \leq k + l$, где $[k + l]_{\sim_K} = [k]_{\sim_K} + [l]_{\sim_K} = [1]_{\sim_K} + [1]_{\sim_K} = [1]_{\sim_K}$. Поэтому $k \vee l \in K$. По предложению 3 K будет $\vee$ -ядром.

Возьмем произвольные $f, g \in K$ такие, что $f \rho_K g$. Тогда $gk \leq f \leq gl$ для некоторых $k, l \in K$. Аналогично только что проведенному рассуждению заключаем, что $[g]_{\sim_K} = [f]_{\sim_K}$, т.е. $f \sim_K g$. Откуда $\rho_K \subseteq \sim_K$. В силу утверждения 1 получаем равенство $\sim_K = \vee_K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть X – произвольное псевдокомпактное пространство, т.е. все функции из $C(X)$ ограниченные. Тогда любая конгруэнция на полуполе $U(X)$ имеет вид $\gamma(I)$ для единственного идеала I кольца $C(X)$. Легко видеть, что соответствующая конгруэнция $\gamma(I)$ на полукольце $C^+(X)$ будет наибольшей конгруэнцией

на $C^+(X)$ продолжающей ее ограничение на $U(X)$. Поскольку в $\text{Con } U(X)$ верны равенства $\gamma(I \cap J) = \gamma(I) \cap \gamma(J)$ и $\gamma(I + J) = \gamma(I) \circ \gamma(J) = \gamma(I) \vee \gamma(J)$ для любых идеалов I, J кольца $C(X)$, решетка $\text{Con } U(X)$ является ретрактом решетки $\text{Con } C^+(X)$. Кроме того, отношение равенства $\mathbf{0}$ служит единственной конгруэнцией на $U(X)$, однозначно продолжаемой как на полукольцо $C^+(X)$ и/или на полукольцо $C^\vee(X)$. В связи со сказанным и теоремой 2 возникает естественный вопрос: всегда ли решетка $\text{Con } U(X)$ является ретрактом решетки $\text{Con } C^+(X)$?

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Авторами получены новые характеристики F - и P -пространств, определения и свойства которых можно найти в [4]. А именно, топологическое пространство X является F -пространством (соответственно P -пространством) тогда и только тогда, когда $\text{Con } U(X) = \text{Con } U^\vee(X)$ (соответственно $\text{Con } C^+(X) = \text{Con } C^\vee(X)$). Кроме того, изучено строение максимальных и предмаксимальных конгруэнций на полуполях $U^\vee(X)$ и полукольцах $C^\vee(X)$ соответственно. Перечисленные результаты анонсированы в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. А. Семёнова, “Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4:2** (1998), 493–510.
- [2] В. А. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*, Наука, М., 1994.
- [3] J. S. Golan, *The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **54**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1992.
- [4] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Grad. Texts in Math., **43**, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] И. А. Семёнова, “Максимальные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6:1** (2000), 305–310.
- [6] Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков, “Решетки конгруэнций на полукольцах непрерывных функций”, *Труды Международной конференции “Алгебра и ее приложения”*, Сиб. федерал. ун-т, Красноярск, 2007, 31–32.

Е. М. Вечтомов

Вятский государственный гуманитарный университет, г. Киров

E-mail: vecht@mail.ru

Поступило

02.10.2007

Исправленный вариант

19.11.2008

Д. В. Чупраков

Вятский государственный гуманитарный университет

E-mail: chupdiv@yandex.ru