Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 390–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:41:58

Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами

В. С. Монахов

Устанавливаются свойства конечной π -разрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами.

Библиография: 4 названия.

В работах Левчука, Лихарева [1] и Тютянова [2] установлено, что конечная простая группа с дополняемыми максимальными подгруппами изоморфна $L_2(7)$, $L_2(11)$ или $L_5(2)$. В этих группах максимальные подгруппы являются холловыми подгруппами. Поэтому вполне естественно возникает задача изучения конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова.

Конечная группа называется π -разрешимой [3], если ее главные факторы (т.е. факторы главного ряда) являются либо элементарными абелевыми p -группами для $p \in \pi$, либо π' -группами. Хорошо известно, что в каждой π -разрешимой группе индексы максимальных подгрупп являются либо примарными π -числами, либо π' -числами, см., например, теорему 1.8.1 [3].

Цель настоящей заметки – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Для конечной π -разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *главные π -факторы группы G изоморфны силовским подгруппам;*
- 2) *каждая максимальная подгруппа, индекс которой – π -число, является холловой подгруппой;*
- 3) *множество максимальных подгрупп группы G , индекс которых – π -число, совпадает с множеством p -дополнений для всех $p \in \pi$;*
- 4) *π -холлова подгруппа каждой нормальной p -подгруппы группы G является π -холловой подгруппой группы G .*

Напомним необходимые обозначения и определения. Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π' . Символом π обозначается также функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a . Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G : H) = \pi(|G : H|)$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф06МС-017).

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$.

Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$, а $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа группы G . Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A .

ЛЕММА 1. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то N является либо элементарной абелевой p -подгруппой для некоторого $p \in \pi$, либо π' -подгруппой;
- 2) если M – максимальная подгруппа группы G , то либо $|G : M| = p^m$ для некоторого $p \in \pi$ и натурального m , либо $\pi(G : M) \subseteq \pi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) непосредственно вытекает из определения π -разрешимой группы. Утверждение 2) – это теорема 1.8.1 [3].

ЛЕММА 2. Если G – группа и $O_\pi(G) = 1$, то $O_\pi(G/\Phi(G)) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $O_\pi(G) = 1$ и обозначим $O_\pi(G/\Phi(G)) = K/\Phi(G)$. Так как $\Phi(G)$ – π' -группа, то по теореме Шура–Цассенсауза (теорема 1.5.2 [3]) $K = K_\pi[\Phi(G)]$, где K_π – π -холлова подгруппа из K . Подгруппа K π' -разрешима, поэтому ввиду теоремы 1.8.2 [3] ее π -холловы подгруппы сопряжены. По лемме Фраттини $G = N_G(K_\pi)\Phi(G) = N_G(K_\pi)$. Но теперь $K_\pi \subseteq O_\pi(G) = 1$, $K = \Phi(G)$ и $O_\pi(G/\Phi(G)) = 1$.

ЛЕММА 3. Если G – неединичная π -разрешимая группа, не являющаяся π' -группой, то $\Phi(G/O_{\pi'}(G))$ – собственная подгруппа в $F(G/O_{\pi'}(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы $G/\Phi(G)$. По предыдущей лемме $N/\Phi(G)$ – π -подгруппа, а по свойствам π -разрешимых групп $N/\Phi(G)$ – p -подгруппа для некоторого $p \in \pi$. По теореме III.3.5 [4] подгруппа N нильпотентна и $\Phi(G) \subset N \subseteq F(G)$.

ЛЕММА 4. Пусть в группе G каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Если K – нормальная подгруппа группы G , то в фактор-группе G/K каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M/K – максимальная подгруппа фактор-группы G/K . Тогда M – максимальная подгруппа группы G . По условию M – холлова подгруппа группы G . По свойствам холловых подгрупп M/K – холлова подгруппа фактор-группы G/K .

ЛЕММА 5. Пусть $K \leq A \leq G$ и K – нормальная подгруппа группы G . Если K – холлова подгруппа группы G , а A/K – холлова подгруппа фактор-группы G/K , то A – холлова подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|G : K| = |G : A||A : K|$ и K – холлова подгруппа в G , то $(|K|, |G : A|) = 1$. Из равенства $|G : A| = |G/K : A/K|$ и того факта, что A/K – холлова подгруппа фактор-группы G/K следует, что $(|A/K|, |G : A|) = 1$. Так как $|A| = |K||A/K|$, то $(|A|, |G : A|) = 1$ и A – холлова подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Проверим, что утверждения 1) и 2) эквивалентны. Допустим, что у π -разрешимой группы G все главные π -факторы изоморфны силовским подгруппам. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , индекс которой является π -числом. Так как группа G π -разрешима, по лемме 1 $|G : M| = p^a$, где p – простое число из π . По условию теоремы в группе G существуют нормальные подгруппы H и K такие, что $H \subseteq K$, K/H – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G , и K/H изоморфна силовской p -подгруппе группы G . Пусть P – силовская p -подгруппа из K . Ясно, что $K = [H]P$, $G = MP$ и $H \subseteq M$. Если $M \cap P = D$, то подгруппа D нормальна в M и нормальна в P , поскольку подгруппа P элементарная абелева как главный фактор группы G . Теперь D нормальна в G и DH/H нормальна в G/H . Но K/H – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/H , поэтому либо $K/H = DH/H$, либо $DH/H = 1$. Если $K/H = DH/H$, то $G = M$; противоречие. Если $DH/H = 1$, то $D \subseteq H$ и $M \cap P = 1$, т.е. M – холлова подгруппа группы G . Таким образом, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Предположим, что в π -разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа, индекс которой – π -число, является холловой подгруппой. Лемма 4 позволяет применить индукцию к порядку группы G . Можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$. По лемме 3 подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G – собственная подгруппа в подгруппе Фиттинга $F(G)$. Поэтому в $F(G)$ существует силовская p -подгруппа P для некоторого $p \in \pi$ такая, что $P \not\subseteq \Phi(G)$, и существует максимальная подгруппа M группы G , не содержащая подгруппу P . Так как $G = MP$, то $|G : M|$ – π -число. По условию теоремы подгруппа M должна быть холловой в группе G . Отсюда следует, что P – силовская p -подгруппа группы G , P – минимальная нормальная подгруппа в G и $P \cap M = 1$. По индукции у фактор-группы G/P главные π -факторы изоморфны силовским подгруппам. Так как подгруппа P является главным π -фактором группы G , то из утверждения 2) следует утверждение 1).

Ввиду 2) леммы 1 эквивалентность утверждений 2) и 3) очевидна.

Проверим, что из утверждения 4) следует утверждение 1). Допустим, что π -холлова подгруппа каждой нормальной πd -подгруппы является π -холловой подгруппой группы G . Пусть H/K – главный π -фактор группы G . Тогда H/K является минимальной нормальной подгруппой π -разрешимой группы G/K , причем H/K – π -подгруппа. Поэтому H/K будет p -подгруппой для некоторого $p \in \pi$. Так как H – нормальная pd -подгруппа группы, ее силовская p -подгруппа P будет силовской подгруппой группы G . Если $P \cap K \neq 1$, то K – нормальная pd -подгруппа группы G и опять по условию ее силовская подгруппа $P \cap K$ должна быть силовской подгруппой группы G . Но в этом случае $P \subseteq K$ и $H = K$, противоречие. Поэтому $P \cap K = 1$ и главный фактор H/K группы G изоморфен силовской подгруппе P . Таким образом, из утверждения 4) следует утверждение 1), а значит и утверждения 2) и 3).

Проверим, что из утверждения 1) следует утверждение 4). Допустим, что у π -разрешимой группы G все главные π -факторы изоморфны силовским подгруппам. Пусть H – произвольная нормальная πd -подгруппа группы G и K – максимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в качестве собственной подгруппы в подгруппе H . Тогда H/K – главный фактор группы G . По индукции π -холлова подгруппа K_π будет π -холловой подгруппой группы G . Если H/K – π' -подгруппа, то из того, что индекс подгруппы K в H есть π' -число, следует, что K_π будет

π -холловой подгруппой группы H . Если H/K – π -подгруппа, то по условию H/K изоморфна некоторой силовской p -подгруппе группы G , $p \in \pi$, поэтому силовская p -подгруппа H_p из H будет силовской в G и $H_\pi = H_p K_\pi$ – π -холлова подгруппа группы G . Таким образом, из утверждения 1) следует утверждение 4). Теорема доказана.

При $\pi = \pi(G)$ непосредственно из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для конечной разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *главные факторы группы G изоморфны силовским подгруппам;*
- 2) *каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой;*
- 3) *множество максимальных подгрупп группы G совпадает с множеством p -дополнений для всех $p \in \pi$;*
- 4) *каждая нормальная подгруппа группы G является холловой.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть в конечной разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) *группа G дисперсивна и каждая силовская подгруппа элементарная абелева;*
- 2) *подгруппа Фраттини группы G единична, а подгруппа Фиттинга является холловой подгруппой, и все силовские подгруппы из подгруппы Фиттинга являются минимальными нормальными подгруппами группы G ;*
- 3) *если $|F(G)| = p_1^{a_1} \cdots p_t^{a_t}$, $p_1, \dots, p_t$ – различные простые числа, то производная длина группы G не превышает числа*

$$\min\{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, \dots, t\}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) непосредственно вытекают из 1) и 4) следствия 1. Докажем утверждение 3). Пусть $|F(G)| = p_1^{a_1} \cdots p_t^{a_t}$, $p_1, \dots, p_t$ – различные простые числа. В группе G все силовские подгруппы элементарные абелевы. Разрешимым группам с абелевыми силовскими подгруппами посвящен § VI.14 [4]. Поэтому все утверждения этого пункта, касающиеся A -групп (разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами), справедливы для разрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами. В частности, по теоремам Хуперта (теорема VI.14.18 [4] и теорема 31 [4; с. 760]) производная длина группы G не превышает числа $1 + d$, где d – максимум числа образующих силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга $F(G)$. Поскольку силовские подгруппы в группе G элементарные абелевы, $d = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, t\}$. С другой стороны, по утверждению 1) следствия 1 главный ряд группы G имеет длину $|\pi(G)|$, поэтому производная длина группы G не превышает $|\pi(G)|$. Отсюда следует, что производная длина группы G не превышает числа

$$\min\{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, \dots, t\}\}.$$

Следствие 2 доказано полностью.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Тогда и только тогда в конечной сверхразрешимой группе каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой, когда каждая силовская подгруппа имеет простой порядок. В частности, сверхразрешимая группа с холловыми максимальными подгруппами метациклична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Хупперта (см., например, теорема VI.9.2 [4]) группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Поэтому, если в сверхразрешимой группе G каждая силовская подгруппа имеет простой порядок, то все максимальные подгруппы группы G являются холловыми подгруппами.

Пусть в сверхразрешимой группе G каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой. По 3) следствия 1 множество максимальных подгрупп группы G совпадает с множеством p -дополнений для всех $p \in \pi$. Поэтому каждая силовская подгруппа имеет простой порядок.

По теореме Цассенхауза (теорема IV.2.11 [4]) группа с циклическими силовскими подгруппами содержит нормальную циклическую холлову подгруппу, фактор-группа по которой циклическая. Поэтому сверхразрешимая группа с холловыми максимальными подгруппами метациклична.

Остается открытым вопрос: *каковы неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Левчук, А. Г. Лихарев, “Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами”, *Сиб. матем. журн.*, **47:4** (2006), 798–810.
- [2] В. Н. Тютянов, “Конечные группы с дополняемыми подгруппами”, *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **6** (2006), 178–183.
- [3] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964.
- [4] B. Huppert, *Endliche Gruppen*, I, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

E-mail: monakhov@gsu.by

Поступило

08.10.2007

Исправленный вариант

18.12.2007