Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кандаян, Многоточечные аппроксимации Паде бета-функции, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 189–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:21:40

Многоточечные аппроксимации Паде бета-функции

А. А. Кандаян

Изучаются многоточечные рациональные аппроксимации со свободными полюсами для бета-функции. Знаменатели аппроксимаций удовлетворяют соотношениям ортогональности с переменным весом относительно дискретной меры. Найдено предельное распределение нулей знаменателей. Дана теоретико-потенциальная интерпретация полученных результатов.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть D – область на комплексной плоскости, $f(z)$ – функция, голоморфная в области D . Задача о многоточечных аппроксимациях Паде функции f , т.е. о рациональных аппроксимациях со свободными полюсами (далее *задача Паде*), ставится следующим образом. Зафиксируем целое неотрицательное число n и набор $2n + 1$ различных точек $z_0, \dots, z_{2n}$ в области D . Требуется найти два многочлена $Q_n(z)$ и $P_n(z)$, степени которых не превосходят n , Q_n не равен тождественно нулю, и при этом функция

$$R_n(z) = Q_n(z)f(z) - P_n(z)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям – она обращается в нуль в указанных точках:

$$R_n(z) = 0, \quad z = z_0, \dots, z_{2n+1}. \quad (1)$$

Интерполяционное условие можно переписать следующим образом. Введем многочлен

$$w_n(z) = \prod_{k=0}^{2n} (z - z_k).$$

Тогда (1) равносильно условию голоморфности функции R_n/w_n в области D . При такой форме записи не обязательно предполагать, что точки z_k различные, т.е. изучать интерполяцию с учетом кратности. В частности, если все точки z_k совпадают, то мы приходим к аппроксимации Паде в данной точке.

Решение поставленной задачи всегда существует, поскольку она сводится к системе $2n + 1$ линейных однородных уравнений относительно $2n + 2$ неизвестных коэффициентов многочленов Q_n и P_n . Единственности решения (с точностью до нормировки), вообще говоря, нет. Свойство единственности решения (или более

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ 4466.2006.1).

сильное свойство нормальности соответствующих индексов, определение которого можно найти, например, в [1; с. 44]) зависит от функции f и весьма важно для приложений. В аналитической теории ставится вопрос об асимптотическом поведении аппроксимаций, когда $n \rightarrow \infty$, а точки интерполяции ведут себя заданным образом. В частности, важен вопрос о предельном распределении нулей многочленов Q_n . Впервые многоточечные аппроксимации Паде для достаточно общего класса функций рассматривались в работе [2], в работах [3] и [4] с помощью таких аппроксимаций были получены принципиально важные результаты о наилучших рациональных аппроксимациях аналитических функций.

В настоящей работе изучаются многоточечные аппроксимации интеграла Эйлера первого рода (или бета-функции)

$$f_\alpha(z) = B(\alpha, z) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha + z)}.$$

Здесь α – произвольный фиксированный комплексный параметр, не являющийся целым числом. В точках $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ имеет полюс. В точках $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ функция $f_\alpha(z)$ становится рациональной и задача Паде для функции $f_\alpha(z)$ с узлами (2) вырождается. Функция $f_\alpha(z)$ голоморфна в области

$$D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

В точках $z = -n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, она имеет простые полюсы. Таблицу узлов интерполяции определяем последовательностью многочленов

$$w_n(z) = \prod_{k=0}^{2n} (z - \beta - k), \quad (2)$$

т.е. рассматриваем ньютонову интерполяцию:

$$w_{n+1}(z) = w_n(z)(z - \beta - 2n - 1)(z - \beta - 2n - 2).$$

Здесь β – произвольный фиксированный комплексный параметр. В дальнейшем без ограничения общности считаем, что $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$.

В п. 2 мы установим свойство нормальности. В п. 3 покажем, что знаменатели аппроксимаций Q_n удовлетворяют соотношениям ортогональности с переменным весом относительно дискретной меры. В конце п. 3 обсудим соответствующие задачи равновесия теории логарифмического потенциала, принадлежащие Рахманову [5]. В п. 4 получим явный вид решения задачи Паде. В п. 5 исследуем асимптотическое поведение аппроксимаций, в частности, найдем предельное распределение нулей знаменателей.

2. Свойство нормальности. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Задача Паде для бета-функции f_α имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Степень знаменателя Q_n с необходимостью равна n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся приемом, который применялся ранее к аппроксимациям Паде экспоненты [1], но вместо дифференциального оператора мы используем разностный оператор

$$(\Delta f)(z) = f(z + 1) - f(z).$$

Зафиксируем произвольное решение задачи. Рассмотрим функцию

$$\tilde{R}_n(z) = (\Delta^{n+1} R_n)(z).$$

Поскольку $\deg P_n \leq n$, то

$$\tilde{R}_n(z) = (\Delta^{n+1} (Q_n f_\alpha))(z).$$

В силу условий интерполяции (1), (2) имеем

$$\tilde{R}_n(z) = 0, \quad z = \beta + k, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

Справедлива формула Лейбница

$$(\Delta(Qf))(z) = f(z+1) \cdot (\Delta Q)(z) + Q(z) \cdot (\Delta f)(z).$$

Далее,

$$(\Delta f_\alpha)(z) = -f_{\alpha+1}(z).$$

Следовательно,

$$(\Delta(Q_n f_\alpha))(z) = (\mathcal{D}_\alpha Q_n)(z) \cdot f_{\alpha+1}(z),$$

где

$$(\mathcal{D}_\alpha Q_n)(z) = \frac{z}{\alpha} (\Delta Q_n)(z) - Q_n(z).$$

Таким образом, по индукции получаем

$$\tilde{R}_n(z) = \tilde{Q}_n(z) \cdot f_{\alpha+n+1}(z),$$

где

$$\tilde{Q}_n = \mathcal{D}_{\alpha+n} \cdots \mathcal{D}_{\alpha+1} \mathcal{D}_\alpha Q_n.$$

При этом через $\mathcal{D}_a$ мы обозначим следующий линейный оператор:

$$\mathcal{D}_a = \frac{z}{a} \Delta - I,$$

действующий в $(n+1)$ -мерном линейном пространстве $\mathbb{C}_n[z]$ многочленов степени не выше n . При этом параметр a принимает значения $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+n$. Здесь I — тождественный оператор. Из (3) следует, что

$$\tilde{Q}_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \beta - k)$$

(с точностью до нормировки).

Если мы покажем, что каждый из операторов $\mathcal{D}_{\alpha+k}$ обратим, то теорема будет доказана. Введем в линейном пространстве $\mathbb{C}_n[z]$ базис из факториальных многочленов

$$\nu_j(z) = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (z - \beta - k), \quad j = 0, \dots, n.$$

Напишем матрицу оператора $\mathcal{D}_a$ в этом базисе. Имеем

$$\mathcal{D}_a \nu_j = \frac{\beta + j - 1}{a} \nu_{j-1} + \frac{j - a}{a} \nu_j,$$

где формально полагаем $\nu_{-1} \equiv 0$. Таким образом

$$\mathcal{D}_a = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0-a & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & \beta+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1-a & \beta+n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-a \end{pmatrix}. \quad (4)$$

По условию задачи a не является целым числом, поскольку α не является целым. Следовательно, определитель

$$\det \mathcal{D}_a = \frac{1}{a^{n+1}} \prod_{k=0}^n (k-a)$$

отличен от нуля.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Матрицу (4) легко обратить. Тем самым, можно выписать явный вид коэффициентов многочлена Q_n .

3. Соотношения ортогональности. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Знаменатели аппроксимаций Паде бета-функции удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности с переменным весом:*

$$\int Q_n(x) x^k \frac{d\mu(x)}{w_n(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (5)$$

При этом многочлены $w_n(x)$ определены формулой (2), а μ – дискретная комплексная мера, имеющая в точках $z = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, массы

$$\mu_m = \frac{(1-\alpha)_m}{m!}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f_\alpha(z) = B(\alpha, z)$ мероморфна во всей комплексной плоскости. Она имеет простые полюсы в точках $z = -m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. При этом

$$\mu_m = \operatorname{res}_{z=-m} f_\alpha(z) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-m)} = \frac{(1-\alpha)_m}{m!},$$

где

$$(a)_m = a(a+1) \cdots (a+m-1)$$

– символ Похгаммера. Рассмотрим сумму главных частей этой функции

$$F_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m}{z+m}. \quad (6)$$

По формуле Стирлинга

$$\mu_m \sim C \cdot m^{-\alpha}, \quad m \rightarrow \infty,$$

где C – некоторая ненулевая постоянная, зависящая от α . Символ $\sim$, как обычно, означает, что отношение левой и правой частей стремится к единице. Следовательно, ряд (6) сходится к мероморфной функции, имеющей те же полюсы и вычеты, что функция f_α . (Напомним, что мы ограничились случаем $\operatorname{Re} \alpha > 0$.)

Покажем, что $f_\alpha = F_\alpha$, т.е.

$$f_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m}{z+m}. \quad (7)$$

Воспользуемся гипергеометрической функцией Гаусса

$$F(a, b, c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!}, \quad |z| < 1.$$

С другой стороны, рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma; z) = \int_0^1 \frac{t^\alpha (1-t)^\beta}{(1-zt)^\gamma} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty),$$

где $\operatorname{Re} \alpha > -1$ и $\operatorname{Re} \beta > -1$. Хорошо известно следующее интегральное представление гипергеометрической функции:

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma; z) = B(\alpha+1, \beta+1) F(\alpha+1, \gamma; \alpha+\beta+2; z).$$

Равенство верно и при $z = 1$, если соответствующие ряд и интеграл сходятся. Тогда имеем

$$\begin{aligned} F_\alpha(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z} \frac{(1-\alpha)_m (z)_m}{(z+1)_m} \frac{1}{m!} = \frac{1}{z} F(1-\alpha, z; z+1; 1) \\ &= \frac{1}{z} \frac{\Phi(-\alpha, z+\alpha-1; z; 1)}{B(1-\alpha, z+\alpha)} = \frac{1}{z} \frac{B(1-\alpha, \alpha)}{B(1-\alpha, z+\alpha)} = B(\alpha, z), \end{aligned} \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

Равенства (8) справедливы, например, при $0 < z < 1$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда по принципу аналитического продолжения формула (7) верна для всех $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ и $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Используя определение меры μ формулу (7) можно переписать в виде интеграла типа Коши

$$f_\alpha(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in D.$$

Пусть γ – произвольный простой замкнутый спрямляемый контур, лежащий в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и содержащий внутри себя все нули многочлена w_n . Контур обходим по часовой стрелке. Тогда в силу интерполяционных условий и по интегральной теореме Коши следующий интеграл равен нулю:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R_n(z)}{w_n(z)} z^k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Q_n(z) f_\alpha(z)}{w_n(z)} z^k dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P_n(z)}{w_n(z)} z^k dz = 0$$

для любого целого числа k . С другой стороны, поскольку

$$\frac{P_n(z)}{w_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_n(z)}{w_n(z)} z^k dz = \operatorname{res}_{z=\infty} \left\{ \frac{P_n(z)}{w_n(z)} z^k \right\} = 0,$$

если только $k = 0, \dots, n-1$. Далее, применяя теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_n(z) f_{\alpha}(z)}{w_n(z)} z^k dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_n(z)}{w_n(z)} z^k dz \int \frac{d\mu(x)}{z-x} \\ &= \int d\mu(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q_n(z) z^k}{w_n(z)} \frac{dz}{z-x} = \int \frac{Q_n(x) x^k}{w_n(x)} d\mu(x). \end{aligned}$$

Откуда и следуют соотношения ортогональности (5).

Теорема доказана.

Обсудим полученные соотношения ортогональности с позиции теории потенциала. Если $0 < \alpha < 1$, то μ – положительная бесконечная мера. При $\alpha = 1$ мера μ вырождается в δ -функцию, сосредоточенную в нуле. Если $1 < \alpha < 2$, то μ – конечная знакопеременная мера: масса в точке $z = 0$ положительная, остальные массы отрицательные и т.д. Для комплексных значений параметра α мера μ , вообще говоря, комплексная. Переменный вес $1/w_n(x)$ также, вообще говоря, комплексный. Он становится положительным (знакопостоянным) лишь при $\beta > 0$. Мера μ похожа на распределение Кравчука (см. [6; с. 48–50]). Однако многочлены Q_n не являются ранее изучавшимися многочленами Кравчука. Они удовлетворяют соотношениям ортогональности с переменным весом.

Как отмечалось выше, в работе [5] Рахманов применил задачи равновесия теории логарифмического потенциала к изучению асимптотического поведения дискретных ортогональных многочленов. Позже этим методом был решен еще ряд интересных задач [7]. Мы хотим провести исследования аппроксимаций Паде для любых допустимых комплексных значений параметров α и β , поэтому мы не можем воспользоваться напрямую методом теории потенциала. Тем не менее, результаты Рахманова подсказывают, какой ответ имеет наша задача.

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Если ν – произвольная положительная борелевская мера на комплексной плоскости, то $\|\nu\|$ – вариация меры, S_{ν} – носитель меры, а

$$V^{\nu}(z) = \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\nu(\zeta)$$

– ее логарифмический потенциал. (Здесь $\log$ – натуральный логарифм.)

Рассмотрим масштабированные многочлены $w_n(nx)$. В пределе нули этих многочленов равномерно распределены на отрезке $[0, 2]$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^{2n+1}}{w_n(nz)} \right|^{1/n} = \exp\{V^{\mu_e}(z)\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2],$$

где μ_e – классическая мера Лебега на отрезке $[0, 2]$:

$$d\mu_e(x) = dx, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Таким образом, внешним полем в задаче равновесия служит потенциал меры $-\mu_e$ (от слова “external”):

$$\varphi = -V^{\mu_e}.$$

Далее, если мера ортогональности положительна, то многочлен Q_n имеет ровно n простых нулей на промежутке $(-\infty, 0]$. Из сказанного выше следует, что можно ожидать существования предельного распределения нулей масштабированных многочленов $Q_n(nz)$. Обозначим соответствующую предельную меру через λ . Это вероятностная мера на промежутке $(-\infty, 0]$. По теореме Чебышева–Маркова–Стилтьеса между двумя соседними точками сосредоточения массы меры μ лежит не более одного нуля многочлена Q_n . После масштабирования получаем точки

$$-\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

которые в пределе при $n \rightarrow \infty$ равномерно распределены на промежутке $(-\infty, 0]$. Предельное распределение есть классическая мера Лебега на этом промежутке:

$$d\mu_c(x) = dx, \quad -\infty < x \leq 0.$$

Из сказанного выше следует, что мера μ_c (от слова “constraint”) служит ограничением для меры λ :

$$\lambda \leq \mu_c \quad (9)$$

в том смысле, что разность $\mu_c - \lambda$ – положительная мера.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче равновесия Рахманова в теории логарифмического потенциала. Среди всех вероятностных мер на промежутке $(-\infty, 0]$ ищется мера λ , удовлетворяющая ограничению (9) и условиям равновесия:

$$\begin{aligned} 2V^\lambda(x) + \varphi(x) &\geq w, \quad \text{если } x \in S_{\mu_c - \lambda}, \\ &\leq w, \quad \text{если } x \in S_\lambda, \end{aligned}$$

где w – некоторая постоянная равновесия.

Такая мера существует и единственна. Она определяет слабую (логарифмическую) асимптотику масштабированных многочленов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n Q_n(nz)|^{1/n} = \exp\{-V^\lambda(z)\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Здесь C_n – нормировочная постоянная такая, что многочлены $C_n Q_n(nz)$ имеют единичный старший коэффициент.

В следующем пункте опираясь на соотношения ортогональности мы найдем явный вид многочленов Q_n (формулу Родрига). Далее, применяя метод перевала, получим в явном виде слабую асимптотику этих многочленов для любых допустимых комплексных значений параметров α и β . Покажем, что асимптотика определяется мерой λ , удовлетворяющей задаче равновесия Рахманова.

4. Формула Родрига. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для знаменателей аппроксимаций Паде бета-функции справедлива формула Родрига*

$$\frac{Q_n(x)g_a(x)}{w_n(x)} = \frac{1}{n!} \Delta^n \left\{ \frac{g_{a-n}(x)}{w_n^*(x)} \right\}, \quad (10)$$

где

$$g_a(x) = \frac{\Gamma(1-a-x)}{\Gamma(1-x)} \quad u \quad w_n^*(x) = \prod_{k=n}^{2n} (x - \beta - k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что, во-первых, формула (10) определяет некоторый многочлен Q_n степени n и, во-вторых, что этот многочлен удовлетворяет соотношениям ортогональности (5).

Обозначим

$$w_n^{(m)}(x) = \prod_{k=n-m}^{2n} (x - \beta - k), \quad m = 0, \dots, n.$$

Пусть $Q(x)$ – произвольный многочлен степени m . Покажем, что

$$\Delta \left\{ \frac{Q(x)g_a(x)}{w_n^{(m)}(x)} \right\} = \frac{\tilde{Q}(x)g_{a+1}(x)}{w_n^{(m+1)}(x)}, \quad (11)$$

где $\tilde{Q}(x)$ – некоторый многочлен степени $m+1$. Тогда из (11) по индукции будет следовать первое утверждение.

Имеем

$$\Delta \left\{ \frac{Q(x)g_a(x)}{w_n^{(m)}(x)} \right\} = Q(x) \cdot \Delta \left\{ \frac{g_a(x)}{w_n^{(m)}(x)} \right\} + (\Delta Q)(x) \cdot \frac{g_a(x+1)}{w_n^{(m)}(x+1)}. \quad (12)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Delta \left\{ \frac{g_a(x)}{w_n^{(m)}(x)} \right\} &= \frac{\Gamma(-a-x)}{\Gamma(-x)} \frac{1}{(x-\beta-n+m+1) \cdots (x-\beta-2n+1)} \\ &\quad - \frac{\Gamma(1-a-x)}{\Gamma(1-x)} \frac{1}{(x-\beta-n+m) \cdots (x-\beta-2n)} \\ &= \frac{\Gamma(-a-x)}{\Gamma(1-x)} \frac{1}{(x-\beta-n+m+1) \cdots (x-\beta-2n)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(-x)} (x-\beta-2n) - \frac{\Gamma(1-a-x)}{\Gamma(-a-x)} (x-\beta-n+m+1) \right\} \\ &= \frac{g_{a+1}(x)}{w_n^{(m+1)}(x)} \{-x(x-\beta-2n) - (-a-x)(x-\beta-n+m+1)\}. \end{aligned}$$

В скобках стоит многочлен первой степени. Обозначим его $B_1(x)$. Тогда первое слагаемое в правой части равенства (12) имеет вид

$$Q(x)B_1(x) \frac{g_{a+1}(x)}{w_n^{(m+1)}(x)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{g_a(x+1)}{w_n^{(m)}(x+1)} &= \frac{\Gamma(-a-x)}{\Gamma(-x)} \frac{1}{(x-\beta-n+m+1) \cdots (x-\beta-2n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(-a-x)}{\Gamma(1-x)} \frac{1}{(x-\beta-n+m+1) \cdots (x-\beta-2n)} \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(-x)} (x-\beta-2n) \\ &= \frac{g_{a+1}(x)}{w_n^{(m+1)}(x)} (-x)(-x-\beta-2n). \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (12) имеет вид

$$(\Delta Q)(x)B_2(x)\frac{g_{a+1}(x)}{w_n^{(m+1)}(x)},$$

где

$$B_2(x) = -x(x - \beta - 2n)$$

– многочлен второй степени. Итак, справедлива формула (11) с многочленом

$$\tilde{Q} = QB_1 + \Delta Q \cdot B_2$$

степени $m + 1$. Легко видеть, что Q_n имеет степень ровно n .

Проверим соотношения ортогональности (5). Рассмотрим интеграл

$$J = \int Q_n(x)x^k \frac{d\mu(x)}{w_n(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)x^k}{w_n(x)} \Big|_{x=-m} \cdot \mu_m.$$

Заметим, что

$$\mu_m = \frac{g_\alpha(-m)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Тогда

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)x^k}{w_n(x)} \frac{g_\alpha(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \Big|_{x=-m} = \frac{\tilde{J}}{\Gamma(1-\alpha)n!},$$

где

$$\tilde{J} = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^n \left\{ \frac{g_{\alpha-n}(x)}{w_n^*(x)} \right\} x^k \Big|_{x=-m}.$$

Применим к этой сумме n раз преобразование Абеля (суммирование по частям). Для двух произвольных функций g и h имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (\Delta g)(x)h(x) \Big|_{x=-m} &= [g(1) - g(0)]h(0) + [g(0) - g(-1)]h(-1) \\ &\quad + [g(-1) - g(-2)]h(-2) + \dots \\ &= g(1)h(0) - g(0)[h(0) - h(-1)] - g(-1)[h(-1) - h(-2)] - \dots \\ &= g(1)h(0) - \sum_{m=0}^{\infty} g(x)(\Delta h)(x-1) \Big|_{x=-m}. \end{aligned}$$

В нашем случае $g(1) = 0$, так как $g_\alpha(1) = 0$. Тогда по индукции получаем

$$\tilde{J} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha-n}(x)}{w_n^*(x)} \Delta^n (x-n)^k \Big|_{x=-m} = 0,$$

поскольку $\Delta^n x^k \equiv 0$ при $k = 0, \dots, n-1$.

Теорема доказана.

5. Асимптотика знаменателей. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для знаменателей аппроксимаций Паде бета-функции справедливы следующие утверждения.

1) Равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ существует предел

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n Q_n(nz)|^{1/n}, \quad (13)$$

где

$$|C_n|^{-1/n} \sim n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

2) Существует вероятностная мера λ на промежутке $(-\infty, 0]$ такая, что

$$-\log \Phi = V^\lambda.$$

Мера λ служит предельной мерой распределения нулей масштабированных многочленов $Q_n(nz)$.

3) Мера λ абсолютно непрерывная. Ее плотность определяется формулой

$$\lambda'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{1}{4} < x < 0, \\ \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1-2x-2x^2}{2x\sqrt{x(x-2)}}, & \text{если } -\infty < x < -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

4) Мера λ

а) подчинена ограничению

$$\lambda \leq \mu_c, \quad (15)$$

где μ_c – мера Лебега на промежутке $(-\infty, 0]$;

б) удовлетворяет условиям равновесия

$$\begin{aligned} 2V^\lambda - V^{\mu_c} &\leq 0 \quad \text{на } S_\lambda, \\ &= 0 \quad \text{на } S_{\mu_c - \lambda}, \end{aligned}$$

где μ_c – мера Лебега на отрезке $[0, 2]$; при этом

$$S_\lambda = (-\infty, 0], \quad S_{\mu_c - \lambda} = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

В частности, на промежутке $(-\infty, -1/4]$ потенциал $V^{2\lambda - \mu_c}$ постоянен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предыдущем пункте мы определили многочлен Q_n формулой Родрига (10) и, тем самым, зафиксировали некоторую стандартизованную нормировку этих многочленов. А именно, старший коэффициент многочлена Q_n равен

$$\frac{(\alpha + 1)_n}{n!}.$$

Коэффициенты (14) подобраны так, чтобы многочлены

$$Q_n^*(x) = C_n Q_n(nx)$$

имели единичный старший коэффициент. Перепишем формулу Родрига (10) по интегральной формуле Коши

$$\frac{Q_n(x)g_\alpha(x)}{w_n(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_{\alpha-n}(\xi)}{w_n^*(\xi)} \frac{d\xi}{u_n(\xi-x)},$$

где

$$u_n(z) = \prod_{k=0}^n (z-k),$$

а γ – произвольный простой замкнутый спрямляемый контур, содержащий внутри себя точки

$$\xi = x + k, \quad k = 0, \dots, n,$$

и такой, что все полюсы подынтегральной функции, а именно,

$$\begin{aligned} \xi &= \beta + k, & k &= n, \dots, 2n, \\ \xi &= 1 - \alpha + n + m, & m &\in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

лежат вне этого контура. Тогда

$$\frac{Q_n^*(x)g_\alpha(nx)}{w_n(nx)} = \frac{nC_n}{2\pi i} \int_{\gamma^*} \frac{g_{\alpha-n}(n\xi)}{w_n^*(n\xi)} \frac{d\xi}{u_n(n(\xi-n))}. \quad (16)$$

Пусть для определенности фиксированная точка x лежит в верхней полуплоскости. Тогда в качестве контура γ^* при всех достаточно больших n можно взять произвольный простой замкнутый контур, охватывающий отрезок $[x, x+1]$ и также лежащий в верхней полуплоскости.

Дальнейшие рассуждения проводятся по следующей схеме. Во-первых, мы находим равномерную асимптотику подынтегральной функции, подставляем ее под знак интеграла. Затем применяем метод перевала к полученному интегралу. Этим методом можно найти равномерную асимптотику многочленов Q_n^* . Но поскольку нас интересует лишь их слабая (логарифмическая) асимптотика, то в процессе вычислений мы будем опускать несущественные для слабой асимптотики множители (константы и степенные функции).

Итак, исследуем асимптотическое поведение подынтегральной функции. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n^*(n\xi)}{n^{n+1}} \right|^{1/n} = \exp\{-V^{\mu^*}(\xi)\}, \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus [1, 2],$$

где μ^* – мера Лебега на отрезке $[1, 2]$. Далее,

$$V^{\mu^*}(\xi) = \operatorname{Re} \mathcal{V}^{\mu^*}(\xi),$$

где

$$\mathcal{V}^{\mu^*}(\xi) = - \int_1^2 \log(\xi - t) dt$$

– комплексный потенциал. Фиксируем главную ветвь логарифма при $\xi > 2$, затем аналитически продолжаем ее в верхнюю полуплоскость. Имеем

$$\mathcal{V}^{\mu^*}(\xi) = (\xi - t) \log(\xi - t)|_1^2 + \int_1^2 dt = (\xi - 2) \log(\xi - 2) - (\xi - 1) \log(\xi - 1) + 1.$$

Аналогично,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n(nz)}{n^{n+1}} \right|^{1/n} = \exp\{-V^{\mu_0}(z)\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1],$$

где μ_0 – мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. При этом

$$V^{\mu_0}(z) = \operatorname{Re} \mathcal{V}^{\mu_0}(z),$$

где

$$\mathcal{V}^{\mu_0}(z) = - \int_0^1 \log(z-t) dt = (z-1) \log(z-1) - z \log z + 1.$$

При $z > 1$ фиксируем главные ветви логарифмов. По формуле Стирлинга

$$\frac{1}{n} \log |\Gamma(1-n\xi)| \sim \operatorname{Re}\{-\xi[\log(-\xi) + \log n - 1]\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\arg(-\xi) \in (-\pi, 0)$, когда ξ лежит в верхней полуплоскости. Аналогично,

$$\frac{1}{n} \log |\Gamma(1-\alpha + n(1-\xi))| \sim \operatorname{Re}\{(1-\xi)[\log(1-\xi) + \log n - 1]\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\arg(1-\xi) \in (-\pi, 0)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \log |g_{\alpha-n}(n\xi)| - \log \frac{n}{e} \right\} &= \operatorname{Re}\{(1-\xi) \log(1-\xi) + \xi \log(-\xi)\} \\ &= \operatorname{Re}\{(1-\xi) \log(\xi-1) + \xi \log \xi\}, \end{aligned}$$

где берутся главные ветви логарифма при $\xi > 1$. Отбрасывая, как было сказано выше, несущественные множители, приходим к следующему интегралу с точностью до нормировки многочленов Q_n :

$$J_n(x) = \int_{\gamma^*} \exp\{-nS(\xi, x)\} d\xi, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} -S(\xi, x) &= (1-\xi) \log(\xi-1) + \xi \log \xi + (\xi-2) \log(\xi-2) \\ &\quad - (\xi-1) \log(\xi-1) + (\xi-x-1) \log(\xi-x-1) - (\xi-x) \log(\xi-x). \end{aligned}$$

Ветви логарифмов выделяем, как и выше. Исследуем асимптотическое поведение интеграла (17) для $x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 2]$. Контур γ^* лежит в той же области и охватывает отрезок $[x, x+1]$. Заметим, что подынтегральная функция в (17) однозначная. Найдем критические точки функции S из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} S(\xi, x) = 0.$$

Получим

$$-2 \log(\xi-1) + \log \xi + \log(\xi-2) + \log(\xi-x-1) - \log(\xi-x) = 0$$

или

$$\frac{\xi(\xi-2)(\xi-x-1)}{(\xi-1)^2(\xi-x)} = 1,$$

что равносильно квадратному уравнению

$$\xi^2 - \xi - x = 0.$$

Итак, мы получили две критические точки. Одну из них обозначим

$$\xi_*(x) = \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}.$$

При этом ветвь корня выделяем в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ условием

$$\sqrt{1+4x} > 0 \quad \text{при} \quad x > -\frac{1}{4}.$$

Очевидно, что именно эта критическая точка дает основной вклад в асимптотику интеграла (17). Таким образом, существует предел

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |J_n(x)|^{1/n}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 2],$$

где

$$-\log \Psi(x) = \operatorname{Re} S_*(x), \quad (18)$$

и

$$S_*(x) = S(\xi_*(x), x).$$

Покажем, что функция (18) есть логарифмический потенциал некоторого заряда. Вычислим производную

$$-f(x) = \frac{d}{dx} S_*(x) = \frac{\partial}{\partial x} S(\xi, x) \Big|_{\xi=\xi_*}.$$

Откуда

$$f(x) = \log \frac{\xi_* - x}{\xi_* - x - 1} = \log \frac{2x - 1 - \sqrt{1+4x}}{2x + 1 - \sqrt{1+4x}}. \quad (19)$$

Покажем, что функция $f(x)$ является преобразованием Коши некоторого заряда ν на промежутке $(-\infty, 2]$, т.е. $f = E_\nu$, где

$$E_\nu(x) = \int_{-\infty}^2 \frac{d\nu(t)}{x-t}.$$

Отсюда будет следовать, что

$$-\log \Psi(x) = V^\nu(x) + 1. \quad (20)$$

Постоянная интегрирования находится из асимптотики функции (19) на бесконечности. Для нахождения заряда ν воспользуемся формулами Сохоцкого:

$$\nu'(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f(x + i \cdot 0), \quad -\infty < x < 2.$$

Рассмотрим три случая. Пусть сперва $0 < x < 2$. Тогда под знаком логарифма в (19) стоит отрицательное число. Его аргумент равен π . Следовательно,

$$\nu'(x) = -1, \quad 0 < x < 2.$$

Другими словами, ограничение заряда ν на отрезок $[0, 2]$ есть отрицательная мера $-\mu_e$, где μ_e – мера Лебега на этом отрезке. Если $-1/4 < x < 0$, то под знаком логарифма снова стоит отрицательное число, но теперь его аргумент равен $-\pi$. Следовательно,

$$\nu'(x) = 1, \quad -\frac{1}{4} < x < 0.$$

Другими словами, ограничение заряда ν на отрезок $[-1/4, 0]$ есть положительная мера Лебега на этом отрезке. Пусть теперь $-\infty < x < -1/4$. Тогда под знаком логарифма стоит комплексное число. Вычисляя его аргумент, получаем

$$\nu'(x) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2x^2 + 2x + 1}{2x\sqrt{x(x-2)}}, \quad -\infty < x < -\frac{1}{4}.$$

Итак, ограничение заряда ν на промежуток $(-\infty, 0]$ есть некоторая положительная мера λ . Окончательно, $\nu = \lambda - \mu_e$, т.е.

$$-\log \Psi = V^\lambda - V^{\mu_e} + 1.$$

Для того, чтобы получить асимптотику многочленов $Q_n^*(x)$, исследуем асимптотическое поведение величин в левой части равенства (16). Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n(nx)}{n^{2n+1}} \right|^{1/n} = \exp\{-V^{\mu_e}(x)\}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus [0, 2].$$

Далее, по формуле Стирлинга

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_\alpha(nx)|^{1/n} = 1, \quad x \in \mathbb{C}_+.$$

Следовательно,

$$-\log \Phi = -\log \Psi + V^{\mu_e} - 1 = V^\lambda.$$

Мы доказали существование предела (13) в верхней полуплоскости и, таким образом, нашли предельное распределение нулей многочленов Q_n^* . Следовательно, равенство (13) справедливо в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Мера λ – вероятностная, поскольку

$$E_{\lambda - \mu_e}(x) \sim -\frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Носителем этой меры служит промежуток $(-\infty, 0]$. Поскольку $\lambda' \leq 1$, мера λ удовлетворяет ограничению (15). Проверим условия равновесия. Докажем, что потенциал $V^{2\lambda - \mu_e}$ постоянен на промежутке $(-\infty, -1/4]$. Для этого достаточно доказать, что производная этого потенциала вдоль вещественной оси существует и равна нулю. Из формул Сохоцкого следует, что

$$\frac{d}{dx} V^{2\lambda - \mu_e}(x) = -\operatorname{Re} E_{2\lambda - \mu_e}(x + i \cdot 0) = -\log \left\{ \left| \frac{2x - 1 - \sqrt{1 + 4x}}{2x + 1 - \sqrt{1 + 4x}} \right|^2 \frac{x}{x - 2} \right\}. \quad (21)$$

Если $x < -1/4$, то корень квадратный будет чисто мнимым числом:

$$\sqrt{1+4x} = i\sqrt{|1+4x|}.$$

Следовательно, выражение под знаком логарифма равно

$$\frac{(2x-1)^2 - 1 - 4x}{(2x+1)^2 - 1 - 4x} \frac{x}{x-2} = \frac{4x^2 - 8x}{4x^2} \frac{x}{x-2} = 1.$$

Тем самым,

$$\frac{d}{dx} V^{2\lambda-\mu_e}(x) = 0, \quad -\infty < x < -\frac{1}{4},$$

и, значит,

$$V^{2\lambda-\mu_e}(x) = w, \quad -\infty < x \leq -\frac{1}{4},$$

где w – некоторая постоянная. На промежутке $[-1/4, 0)$ функция, стоящая под знаком логарифма в (21), непрерывна. Она принимает значение 1 в точке $x = -1/4$ и предельное значение $+\infty$ в точке $x = 0$. На интервале $(-1/4, 0)$ значение 1 она не принимает. Следовательно,

$$\frac{d}{dx} V^{2\lambda-\mu_e}(x) < 0, \quad -\frac{1}{4} < x < 0,$$

т.е. потенциал $V^{2\lambda-\mu_e}$ монотонно убывает на отрезке $[-1/4, 0]$. Тем самым,

$$V^{2\lambda-\mu_e} \leq w$$

на этом отрезке. Очевидно, что $w = 0$, поскольку потенциал $V^{2\lambda-\mu_e}$ равен нулю на бесконечности.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [2] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105**:4 (1978), 512–524.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134**:3 (1987), 306–352.
- [4] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72.
- [5] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124.
- [6] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [7] P. D. Dragnev, E. B. Saff, “Constained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable”, *J. Anal. Math.*, **72** (1997), 223–259.

А. А. Кандаян

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: arthurmm@mail.ru

Поступило

22.10.2007

Исправленный вариант

23.01.2008