Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Чистяков, Абелевы группы как UA -модули над своим кольцом эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 934–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:51:49

Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов

Д. С. Чистяков

Пусть V – модуль над кольцом R . Модуль V называется модулем с однозначным сложением (UA-модулем), если не существует нового сложения на множестве V без изменения действия R на V . В работе найдены абелевы группы, являющиеся UA-модулями над своим кольцом эндоморфизмов.

Библиография: 6 названий.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей и V, W – унитарные левые R -модули. Множество

$$M_R(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f(rx) = rf(x), r \in R, x \in V\}$$

будем называть *множеством R -однородных отображений*. Модуль V называется *модулем с однозначным сложением* (UA-модулем), если невозможно задать новое сложение на множестве V , не изменяя при этом действия кольца R на V . В работе [1] получены два результата, на которые мы будем часто ссылаться в дальнейшем. Приведем здесь их формулировки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. Пусть V и W – левые R -модули, $f \in M_R(V, W)$ – R -однородная биекция. Тогда новое сложение $+_f$ на множестве V можно задать следующим образом:

$$x +_f y = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

СЛЕДСТВИЕ В. R -модуль V является модулем с однозначным сложением тогда и только тогда, когда все взаимно однозначные отображения из $M_R(V, W)$ являются изоморфизмами модулей V и W для любого R -модуля W .

Основные факты, относящиеся к модулям с однозначным сложением над произвольным кольцом, можно найти в работе [1]. Работа [2] посвящена изучению R -модулей V таких, что $M_R(V, V) = E_R(V)$. Книги [3] и [4] служат признанным руководством по теории абелевых групп.

В работе под словом “группа” понимается абелева группа, все кольца ассоциативные с единицей, все модули левые унитарные. Через $r(A)$, $o(x)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $E(A)$ обозначены соответственно ранг группы без кручения A , порядок элемента x , множество натуральных чисел, кольцо целых чисел, кольцо рациональных чисел, кольцо эндоморфизмов группы A .

Перед изложением основных результатов мы приведем некоторые определения, которые будут использоваться в работе.

Подмножество A некоторого R -модуля называется *сильно R -замкнутым*, если для любых $r \in R$, $a \in A$ справедливо, что $ra \in A$. Непустое подмножество A левого R -модуля V называется *сильно R -сервантным*, если $0 \neq rv \in A$ влечет $v \in A$ для всех $r \in R$, $v \in V$.

Пусть A и B – группы без кручения. Говорят, что A *квазисодержится* в B , если $nA \subseteq B$ для некоторого натурального числа n . Будем говорить, что A *квазиравна* B ($A \doteq B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т.е. если $nA \subseteq B$, $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$). Квазиравенство $A \doteq \bigoplus_{i \in I} A_i$ называется *квазиразложением* или *квазипрямым разложением* группы A . Подгруппы A_i называются *квазислагаемыми* группы A . Группа A называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями. Группа A называется *жесткой*, если $E(A) \subseteq \mathbb{Q}$.

Пусть A – группа без кручения. Группу A естественным образом можно вложить в $\mathbb{Q}$ -пространство $\mathbb{Q} \otimes A$, которое является делимой оболочкой группы A (элемент $a \in A$ отождествляется с элементом $1 \otimes a \in \mathbb{Q} \otimes A$). Каждый эндоморфизм $\alpha \in E(A)$ группы A единственным образом продолжается до линейного преобразования $1 \otimes \alpha$ $\mathbb{Q}$ -пространства $\mathbb{Q} \otimes A$. Можно считать, что кольцо $E(A)$ содержится в $\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes A)$. Таким образом,

$$E(A) = \{\alpha \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes A) \mid \alpha A \subseteq A\}.$$

$\mathbb{Q}$ -Алгебра $\mathbb{Q} \otimes E(A)$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов* группы A . Кольцо квазиэндоморфизмов группы без кручения A обозначим $\mathcal{E}(A)$.

Псевдоцоклем группы без кручения A называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами (*рф-подгруппами*). Псевдоцокль группы без кручения A обозначим $\text{Soc } A$. Группа называется *неприводимой*, если она не обладает собственными *рф*-подгруппами.

Группа без кручения называется *вполне разложимой* (*почти вполне разложимой*), если она является прямой (квазипрямой) суммой групп ранга 1. Группа без кручения A называется *сепарабельной*, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A .

Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка его подмодулей дистрибутивна. Ненулевой модуль, совпадающий с любым своим ненулевым подмодулем, называется *неприводимым* или *простым*. Модуль называется *цепным*, если решетка его подмодулей образует цепь.

В работе рассматривается задача описания тех абелевых групп, которые являются модулями с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов, в классах сепарабельных групп без кручения, периодических групп, почти вполне разложимых и сильно неразложимых групп без кручения конечного ранга.

ТЕОРЕМА 1. *Если V – дистрибутивный R -модуль, то для любого R -модуля W справедливо равенство*

$$M_R(V, W) = \text{Hom}_R(V, W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – дистрибутивный левый R -модуль, W – некоторый R -модуль и $f \in M_R(V, W)$, $x, y \in V$. Согласно [5; лемма 1.3] существуют $u, v \in R$

такие, что

$$1 = u + v, \quad ux \in Ry, \quad vy \in Rx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} uf(x+y) &= f(ux+uy) = f(\varphi y+uy) = f((\varphi+u)y) = (\varphi+u)f(y) \\ &= \varphi f(y) + uf(y) = uf(x) + uf(y) \end{aligned}$$

для некоторого $\varphi \in R$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} vf(x+y) &= f(vx+vy) = f(vx+\psi x) = f((v+\psi)x) = (v+\psi)f(x) \\ &= vf(x) + \psi f(x) = vf(x) + vf(y) \end{aligned}$$

для некоторого $\psi \in R$. Складывая данные равенства, получим

$$(u+v)f(x+y) = (u+v)f(x) + (u+v)f(y).$$

Таким образом,

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Следовательно, $f \in \text{Hom}_R(V, W)$ и $M_R(V, W) \subseteq \text{Hom}_R(V, W)$. Обратное включение всегда имеет место. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и следствия В получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любой дистрибутивный R -модуль является модулем с однозначным сложением над кольцом R .*

Дистрибутивными являются все неприводимые и цепные модули, поэтому следующие два следствия не нуждаются в доказательстве.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любой неприводимый R -модуль является модулем с однозначным сложением над кольцом R .*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Любой цепной R -модуль является модулем с однозначным сложением над кольцом R .*

В работе [5] Туганбаев показал, что над дедекиндовым кольцом всякий периодический модуль эндодистрибутивен. Учитывая дедекиндовость кольца целых чисел и тот факт, что абелевы группы это в точности $\mathbb{Z}$ -модули, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. *Периодические абелевы группы являются UA-модулями над своим кольцом эндоморфизмов.*

ЛЕММА 6. *Пусть A – группа, B – $E(A)$ -модуль и $f \in M_{E(A)}(A, B)$ – биекция, $a \in A$. Тогда, если $o(a) = n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $o(f(a)) = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in A$, $o(x) = m < \infty$, $f(x) = y$. Предположим, что $o(y) = \infty$. Тогда

$$mx = mf^{-1}(y) = f^{-1}(my) = 0, \quad f^{-1}(m^2y) = 0,$$

что противоречит инъективности отображения f . Покажем теперь, что $o(y) = m$. В самом деле,

$$mf^{-1}(y) = 0, \quad f^{-1}(my) = 0.$$

Следовательно,

$$my = 0, \quad m \mid o(y).$$

Предположим, что $o(y) = n = km$, $k \neq 1$. Тогда $nf(x) = ny$, $f(nx) = 0$, откуда $nx = 0$, $n \mid o(x)$. Таким образом, $n = m$, $o(x) = o(y)$.

Пусть $x \in A$, $o(x) = \infty$, $f(x) = y$. Предположим, что $o(y) = m < \infty$. Тогда

$$mf(x) = f(mx) = 0, \quad f(m^2x) = 0.$$

Снова получаем противоречие с инъективностью отображения f . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Сепарабельные абелевы группы без кручения являются модулями с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – группа без кручения и элементы $x, y \in G$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, то для любого $E(G)$ -модуля W и биекции $f \in M_{E(G)}(G, W)$ выполняется

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Действительно, найдутся $r, s \in \mathbb{Z}$ такие, что $rx = sy$. Тогда

$$\begin{aligned} rf(x + y) &= f(rx + ry) = f(sy + ry) = f((s + r)y) = (s + r)f(y) \\ &= sf(y) + rf(y) = f(sy) + rf(y) = f(rx) + rf(y) = rf(x) + rf(y). \end{aligned}$$

Согласно лемме 6 аддитивная группа $E(G)$ -модуля W является группой без кручения. Поэтому $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Пусть G – сепарабельная группа без кручения, $x, y \in G$. Тогда $x, y \in G_0$, где

$$G_0 = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$$

– некоторое вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга группы G ,

$$r(G_i) = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad G = G_0 \oplus G^*.$$

Предположим,

$$x = g_1 + \cdots + g_n, \quad y = h_1 + \cdots + h_n,$$

где $g_i, h_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$.

Если $e_i: G \rightarrow G_i$, $i = 1, \dots, n$, $e^*: G \rightarrow G^*$ – проекции, соответствующие разложениям $G = G_0 \oplus G^*$ и $G_0 = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$, то для $E(G)$ -модуля W и биекции $f \in M_{E(G)}(G, W)$ имеем

$$\begin{aligned} f(x + y) &= (e_1 + \cdots + e_n + e^*)f(x + y) \\ &= e_1f(g_1 + \cdots + g_n + h_1 + \cdots + h_n) + \cdots \\ &\quad + e_nf(g_1 + \cdots + g_n + h_1 + \cdots + h_n) + e^*f(x + y) \\ &= f(e_1(g_1 + \cdots + g_n + h_1 + \cdots + h_n)) + \cdots \\ &\quad + f(e_n(g_1 + \cdots + g_n + h_1 + \cdots + h_n)) + f(e^*(x + y)) \\ &= f(g_1 + h_1) + \cdots + f(g_n + h_n) \\ &= f(g_1) + \cdots + f(g_n) + f(h_1) + \cdots + f(h_n). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 & (e_1 + \cdots + e_n + e^*)f(g_1 + \cdots + g_n) \\
 &= e_1f(g_1 + \cdots + g_n) + \cdots + e_nf(g_1 + \cdots + g_n) + e^*f(g_1 + \cdots + g_n) \\
 &= f(g_1) + \cdots + f(g_n), \\
 & (e_1 + \cdots + e_n + e^*)f(h_1 + \cdots + h_n) \\
 &= e_1f(h_1 + \cdots + h_n) + \cdots + e_nf(h_1 + \cdots + h_n) + e^*f(h_1 + \cdots + h_n) \\
 &= f(h_1) + \cdots + f(h_n).
 \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Применяя следствие В, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга и $G = \text{Soc } G$. Группа G является UA -модулем над своим кольцом эндоморфизмов тогда и только тогда, когда G неприводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть группа G – UA -модуль над кольцом $E(G)$, A – минимальная рфи-подгруппа группы G ($A \neq 0, G$) и $\varphi(g) = a$ для некоторых $\varphi \in E(G)$, $g \in G$, $a \in A$. Известно, что кольцо $\mathcal{E}(G)$ является телом (см., например, [4; следствие 5.14]), тогда $\varphi^{-1} \in \mathcal{E}(G)$. Кроме того, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $m\varphi^{-1} \in E(G)$. Значит, $mg = m\varphi^{-1}a \in A$. Откуда $g \in A$. Следовательно, подмножество A сильно $E(G)$ -сервантно и сильно $E(G)$ -замкнуто в G . Построим $E(G)$ -биекцию $f: G \rightarrow G$ по следующему правилу:

$$f(g) = \begin{cases} g, & g \in A, \\ -g, & g \in G \setminus A. \end{cases}$$

Пусть $0 \neq a \in A$, $b \in G \setminus A$. Тогда

$$f(a + b) = -a - b \neq a - b = f(a) + f(b).$$

Таким образом,

$$f \in M_{E(G)}(G, G) \setminus \text{End}_{E(G)}(G).$$

На множестве G зададим новое сложение $+_1$ (предложение А) по правилу

$$x +_1 y = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

Тогда

$$a +_1 b = f^{-1}(a - b) = -a + b,$$

откуда следует $+ \neq +_1$. Группа G не является UA -модулем над кольцом $E(G)$.

Достаточность. Пусть группа G неприводима. Тогда ранг группы G как модуля над своим кольцом эндоморфизмов равен 1. Из [2; теорема 3.5] следует, что $M_{E(G)}(G, G) = \text{End}_{E(G)}(G)$. Остается применить [1; теорема 3.2]. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения конечного ранга являются UA -модулями над своим кольцом эндоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – почти вполне разложимая группа конечного ранга и $G \doteq \bigoplus_{i=1}^n A_i$ – ее квазипрямое разложение ($r(A_i) = 1$ для каждого $i = 1, \dots, n$).

Если $x, y \in G$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, то для любого $E(G)$ -модуля W и биекции $f \in M_{E(G)}(G, W)$ справедливо $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (см. доказательство теоремы 7). Рассмотрим ситуацию, когда x и y линейно независимы над $\mathbb{Z}$.

Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$. Тогда $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ – полная ортогональная система идемпотентных эндоморфизмов (проекций) группы A , соответствующая разложению $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$. Из [4; лемма 5.1] следует, что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(A)$. Поэтому все e_i являются квазиэндоморфизмами группы G и индуцируют прямое разложение кольца $\mathcal{E}(G)$ в сумму левых идеалов: $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G)e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}(G)e_n$. Идемпотенты e_i называются *квазипроекциями* группы G . По [4; предложение 5.2] имеем взаимно однозначное соответствие

$$G \doteq e_1 G \oplus \dots \oplus e_n G \rightarrow \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G)e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}(G)e_n$$

между квазиразложением группы G и разложением кольца $\mathcal{E}(G)$ в прямую сумму левых идеалов.

Пусть $x, y \in G$, тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $kx, ky \in A$ и $ke_i \in E(G)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Пусть $kx = x_1 + \dots + x_n$, $ky = y_1 + \dots + y_n$, где $x_i, y_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$.

Для $E(G)$ -модуля W и биекции $f \in M_{E(G)}(G, W)$ имеем

$$\begin{aligned} k^2 f(x + y) &= k(e_1 + \dots + e_n) f(kx + ky) \\ &= ke_1 f(x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n) + \dots \\ &\quad + ke_n f(x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n) \\ &= f(ke_1(x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n)) + \dots \\ &\quad + f(ke_n(x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n)) \\ &= f(kx_1 + ky_1) + \dots + f(kx_n + ky_n) \\ &= f(kx_1) + \dots + f(kx_n) + f(ky_1) + \dots + f(ky_n). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} k^2(e_1 + \dots + e_n) f(x) &= k(e_1 + \dots + e_n) f(x_1 + \dots + x_n) \\ &= ke_1 f(x_1 + \dots + x_n) + \dots + ke_n f(x_1 + \dots + x_n) \\ &= f(kx_1) + \dots + f(kx_n), \\ k^2(e_1 + \dots + e_n) f(y) &= k(e_1 + \dots + e_n) f(y_1 + \dots + y_n) \\ &= ke_1 f(y_1 + \dots + y_n) + \dots + ke_n f(y_1 + \dots + y_n) \\ &= f(ky_1) + \dots + f(ky_n). \end{aligned}$$

Откуда

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

По следствию В заключаем, что группа G является модулем с однозначным сложением над кольцом $E(G)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – абелева группа без кручения ранга 2. Следующие условия эквивалентны:

- а) группа G – UA -модуль над своим кольцом эндоморфизмов;
 б) группа G не является жесткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б). Допустим противное. Пусть G – жесткая группа и $r(G) = 2$. Тогда ранг группы G как модуля над своим кольцом эндоморфизмов равен 2 и $M_{E(G)}(G, G) \neq \text{End}_{E(G)}(G)$ [2; теорема 3.5]. Из работы [1; теорема 3.2] следует, что группа G не является UA -модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть группа G не является жесткой и $r(G) = 2$. Тогда согласно работе [6; § 3] в зависимости от множества $\Omega(G)$ всех различных типов элементов группы G имеют место следующие случаи:

- 1) $|\Omega(G)| = 1$, G – сильно неразложимая группа и $\mathcal{E}(G)$ – квадратичное поле алгебраических чисел;
- 2) $|\Omega(G)| = 1$, $G = A \oplus B$, где $t(A) = t(B)$ и $r(A) = r(B) = 1$;
- 3) $|\Omega(G)| = 2$, G – сильно неразложимая группа и

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ q & s \end{pmatrix} \mid s, q \in \mathbb{Q} \right\};$$

- 4) $|\Omega(G)| = 2$, $G = A \oplus B$, где $t(A) < t(B)$ и $r(A) = r(B) = 1$;
- 5) $|\Omega(G)| = 3$ и для некоторого $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ имеет место цепь включений

$$kG \subseteq A \oplus B \subseteq G,$$

причем тип $t(A)$ несравним с типом $t(B)$, $r(A) = r(B) = 1$.

В первом случае группа G неприводима, а следовательно, по теореме 8 она является модулем с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов.

В случаях 2) и 4) группа G является вполне разложимой и поэтому сепарабельной. Применив теорему 7, получим требуемое утверждение.

В случае 5) группа G является почти вполне разложимой и по теореме 9 группа G – UA -модуль над своим кольцом эндоморфизмов.

Далее рассматриваем случай 3).

Пусть G – сильно неразложимая группа такая, что $|\Omega(G)| = 2$,

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ q & s \end{pmatrix} \mid s, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

и $\{a, b\}$ – максимальная линейно независимая система элементов группы G . Рассмотрим идеал

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Так как аддитивная группа кольца $\mathcal{E}(G)$ есть делимая оболочка аддитивной группы кольца $E(G)$, то $E(G) \cap S \neq 0$. То есть существует число $r \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ -r & r \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \in E(G).$$

Для $E(G)$ -модуля W , биекции $f \in M_{E(G)}(G, W)$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 f(ma + nb) &= f(\varphi_1(ma + nb)) = f(qma) = qf(ma) = \varphi f(ma), \\ \varphi_2 f(ma + nb) &= f(\varphi_2(ma + nb)) = f(qnb) = qf(nb) = \varphi f(nb). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, и используя инъективность φ , заключаем, что

$$f(ma + nb) = f(ma) + f(nb),$$

т.е. $f \in \text{Hom}_{E(G)}(G, W)$. Применяя следствие В, получаем, что G – UA-модуль над кольцом $E(G)$. Теорема доказана.

Автор благодарит О.В. Любимцева за постановку задачи описания абелевых групп как UA-модулей над своим кольцом эндоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. van der Merwe, “Unique addition modules”, *Comm. Algebra*, **27**:9 (1999), 4103–4115.
- [2] J. Hausen, J. A. Johnson, “Centralizer near-rings that are rings”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **59**:2 (1995), 173–183.
- [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [4] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов*, Томск. гос. ун-т, Томск, 2002.
- [5] А. А. Туганбаев, “Дистрибутивные кольца и эндодистрибутивные модули”, *Укр. матем. журн.*, **38**:1 (1986), 63–67.
- [6] D. M. Arnold, *Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings*, Lecture Notes in Math., **931**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

Д. С. Чистяков

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: chistyakovds@yandex.ru

Поступило

05.11.2010

Исправленный вариант

24.01.2011