Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, Об одном неравенстве для универсального спектра интегральных средних, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 139–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:49:13

Об одном неравенстве для универсального спектра интегральных средних

И. Р. Каюмов

Пусть S – класс функций, аналитических и однолистных в единичном круге, нормированных стандартным образом: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и пусть

$$B(t) = \sup\{\beta_f(t) : f \in S\}$$

– универсальный спектр интегральных средних, введенный Макаровым в [1]. Здесь

$$\beta_f(t) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\ln \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^t d\theta}{|\ln(1-r)|}$$

– спектр интегральных средних конформного отображения f . Универсальный спектр $B(t)$ отвечает за граничное поведение конформных отображений в круге, в частности, за метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых, а также за искажение мер Хаусдорфа борелевских множеств на окружности при конформных отображениях круга (см., например, [2]–[4]).

Хорошо известно, что $B(t)$ является выпуклой функцией переменного t . Карлесоном и Макаровым показано [5], что

$$B(t) = |t| - 1$$

при $t \leq t_0$ для некоторого $t_0 \leq -2$ (далее будем считать, что t_0 является максимальным из возможных). Фенг и МакГрегор в работе [6] установили равенство

$$B(t) = 3t - 1 \quad \text{при} \quad t \geq \frac{2}{5}.$$

Легко видеть, что из неравенства Гёльдера для интегралов следует, что

$$\frac{B(p)}{|p|} \leq \frac{B(q)}{|q|} \quad \text{при} \quad |p| \leq |q|, \quad pq > 0.$$

Основная цель данной работы – доказательство другого, в некотором смысле обратного, неравенства:

$$\frac{B(q)}{|q|} - \frac{B(p)}{|p|} \leq \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} \quad \text{при} \quad |p| \leq |q|, \quad pq > 0. \quad (1)$$

Доказательство основано на неравенстве, связывающем L_p - и L_q -нормы полиномов, доказанном Зигмундом и Сеге в [7] (а по-существу, ранее, в более общем виде Никольским в [8]).

Введем подклассы класса S :

$$\begin{aligned} S(n, 1) &= \{f \in S : f' - \text{полином степени } n\}, \\ S(n, -1) &= \{f \in S : 1/f' - \text{полином степени } n\}. \end{aligned}$$

Определим новую величину, связанную с граничным поведением конформных отображений:

$$\Gamma(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t),$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00381).

где

$$\gamma_n(t) = \sup \left\{ \frac{1}{\ln n} \ln \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^t d\theta : f \in S(n, 1) \right\}$$

в случае, когда $t \geq 0$,

$$\gamma_n(t) = \sup \left\{ \frac{1}{\ln n} \ln \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^t d\theta : f \in S(n, -1) \right\}$$

в случае отрицательного t . Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Имеем $\Gamma(t) = B(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем подробно случай $t > 0$. Сначала покажем, что $B(t) \leq \Gamma(t)$. Для этого зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$. Из определения универсального спектра следует, что найдется однолиственная функция $f \in S$ такая, что

$$\beta_f(t) > B(t) - \varepsilon. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что найдется последовательность натуральных чисел n_k такая, что

$$\beta_f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \int_0^{2\pi} |f'(r_k e^{i\theta})|^t d\theta}{\ln(1/(1-r_k))},$$

где $r_k = 1 - 5 \ln n_k / n_k$. Пусть a_j – тейлоровские коэффициенты $f(z)$. В силу хорошо известной теоремы Де Бранжа [9] имеет место оценка $|a_j| \leq j$. Покажем, что полином $p(z) = \sum_{j=1}^{n_k+1} a_j r_k^j z^j$ однолиствен в круге $|z| < 1$ начиная, с некоторого k . Для этого возьмем произвольные точки z_1 и z_2 на окружности $|z| = 1$. Далее имеем

$$\begin{aligned} |p(z_1) - p(z_2)| &> |f(r_k z_1) - f(r_k z_2)| - \left| \sum_{j=n_k+2}^{\infty} a_j r_k^j (z_1^j - z_2^j) \right| \\ &\geq \frac{1-r_k}{1+r_k} |z_1 - z_2| - |z_1 - z_2| \left| \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j^2 r_k^j \right|. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы использовали одну из теорем искажения [10]:

$$\frac{|f(rz_1) - f(rz_2)|}{|z_1 - z_2|} \geq \frac{(1-r)}{(1+r)},$$

а также упоминавшееся выше неравенство де Бранжа $|a_j| \leq j$.

Для доказательства однолиственности полинома p осталось показать, что

$$\frac{1-r_k}{2} - \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j^2 r_k^j > 0,$$

начиная с некоторого k . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1-r_k}{2} - \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j^2 r_k^j &= 5 \frac{\ln n_k}{n_k} - \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j^2 \left(1 - 5 \frac{\ln n_k}{n_k} \right)^j \\ &\geq 5 \frac{\ln n_k}{n_k} - \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j^2 n_k^{-5j/n_k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее выражение будет, очевидно, строго положительно, начиная с некоторого k . Итак, $p(z)/r_k \in S(n_k, 1)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\gamma_{n_k}(t) &\geq \frac{1}{\ln n_k} \ln \int_0^{2\pi} |p'(e^{i\theta})|^t d\theta \geq \frac{1}{\ln n_k} \ln \int_0^{2\pi} |p'(r_k e^{i\theta})|^t d\theta \\ &= \frac{1}{\ln n_k} \ln \int_0^{2\pi} \left| f'(r_k e^{i\theta}) - \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j a_j r_k^{j-1} e^{i(j-1)\theta} \right|^t d\theta.\end{aligned}$$

В силу положительности (3)

$$\left| \sum_{j=n_k+2}^{\infty} j a_j r_k^{j-1} e^{i(j-1)\theta} \right| \leq 5 \frac{\ln n_k}{n_k}.$$

Поэтому

$$\Gamma(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n_k} \ln \int_0^{2\pi} |f'(r_k e^{i\theta})|^t d\theta = \beta_f(t).$$

Теперь из (2) следует, что $\Gamma(t) \geq B(t) - \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, заключаем, что $\Gamma(t) \geq B(t)$. Эти же рассуждения с небольшими изменениями показывают, что $\Gamma(t) \geq B(t)$ и при отрицательных значениях t .

Покажем теперь, что $\Gamma(t) \leq B(t)$. Для этого нам понадобится один результат из работы Карлесона и Джонса [3], который утверждает, что

$$B(t) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\ln \sup_{f \in S} \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})|^t d\theta}{|\ln(1-r)|}. \quad (4)$$

Пусть полином $p_n(z)$ максимизирует величину

$$\frac{1}{\ln n} \ln \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^t d\theta$$

в классе $S(n, 1)$, т.е.

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{\ln n} \ln \int_0^{2\pi} |p'_n(e^{i\theta})|^t d\theta.$$

Существование такого полинома гарантируется компактностью класса S . Из равенства (4) следует, что

$$B(t) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \int_0^{2\pi} |p'_n((1-1/n)e^{i\theta})|^t d\theta}{\ln n}. \quad (5)$$

Из однолиственности полинома p_n следует, что $p'_n(z) \neq 0$ в круге $|z| < 1$, что влечет существование чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ таких, что $|z_j| \leq 1$ для всех j и

$$p'_n(z) = \prod_{j=1}^n (1 + z_j z).$$

Из легко проверяемого неравенства

$$\left| \frac{1+z}{1+rz} \right| \leq \frac{2}{1+r}, \quad |z| \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

следует, что

$$\begin{aligned}|p'_n(e^{i\theta})| &\leq \left| p'_n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) \right| \prod_{j=1}^n \frac{2}{2 - 1/n} \\ &= \frac{1}{(1 - 1/(2n))^n} \left| p'_n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) \right| \leq 2 \left| p'\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) \right|.\end{aligned}$$

Подставляя последнее неравенство в (5), получаем

$$\begin{aligned} B(t) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{-t} \int_0^{2\pi} |p'_n(e^{i\theta})|^t d\theta}{\ln n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \int_0^{2\pi} |p'_n(e^{i\theta})|^t d\theta}{\ln n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t) = \Gamma(t). \end{aligned}$$

Схема доказательства в случае отрицательных t почти идентична случаю $t > 0$ и мы на ней не останавливаемся.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что p и q – вещественные числа одного знака и $|p| \leq |q|$. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{B(q)}{|q|} - \frac{B(p)}{|p|} \leq \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы снова разберем подробно лишь случай $t > 0$. Для произвольных полиномов g степени n в (5) показано, что существуют числа $C_{p,q}$, зависящие только от p и q такие, что при $0 < p < q$ имеет место неравенство

$$\left(\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q} \leq C_{p,q} n^{1/p-1/q} \left(\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}. \quad (7)$$

По определению

$$\Gamma(q) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in S(n,1)} \frac{1}{\ln n} \ln \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^q d\theta.$$

Поскольку f' – полином степени n , в силу (7)

$$\Gamma(q) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in S(n,1)} \frac{1}{\ln n} \ln \left\{ n^{q/p-1} C_{p,q} \left(\int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{q/p} \right\} = \frac{q}{p} - 1 + \frac{q}{p} \Gamma(p),$$

откуда

$$\frac{\Gamma(q)}{q} - \frac{\Gamma(p)}{p} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

что в силу теоремы 1 доказывает теорему 2 в случае положительных p и q . Оставшийся случай доказывается аналогично.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае когда p и q не превосходят t_0 или лежат в интервале $[2/5, +\infty)$, вышеупомянутые результаты Карлесона, Макарова, Фенга и МакГрегора показывают, что неравенство в (6) заменяется равенством.

Приведем одно следствие неравенства (1). Макаровым ([4], [11]) доказано, что для любой функции $f \in S$, любого измеримого по Борелю множества $A \subset \partial\mathbb{D}$ и любого $s > 0$ справедливо неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{s \dim A}{B(-s) + s + 1 - \dim A}, \quad (8)$$

где $\dim A$ – хаусдорфова размерность множества A .

Если $\dim A = 1$, то в неравенстве (8) выбор $s = 0$ максимизирует правую часть этого неравенства и дает наилучшую оценку $\dim f(A) \geq 1$, доказанную Макаровым [4]. При $\dim A < 1$ параметр s нужно выбирать строго положительным, поскольку $B(s) = cs^2 + O(s^3)$ при малых t (см. [11]).

Предположим теперь, что хаусдорфова размерность A достаточно мала. Тогда из неравенства (8) легко следует неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{\dim A}{(B(-s) + 1)/s + 1} + \frac{\dim^2 A}{s((B(-s) + 1)/s + 1)^2} + O(\dim^3 A). \quad (9)$$

Полагая $s = |t_0|$ и пользуясь асимптотическим неравенством (9), Карлесон и Макаров [5] доказали неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{\dim A}{2} + \frac{\dim^2 A}{4|t_0|} + O(\dim^3 A). \quad (10)$$

Возникает естественный вопрос: можно ли улучшить оценку (10) выбирая другой параметр s в неравенстве (9)?

Оказывается, что неравенство (10) является оптимальным с точки зрения неравенств (8) и (9). Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для достаточно малых $\dim A$ имеет место соотношение

$$\max_{s>0} \frac{s \dim A}{B(-s) + s + 1 - \dim A} = \frac{\dim A}{2} + \frac{\dim^2 A}{4|t_0|} + O(\dim^3 A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что параметр s в (9) нужно выбрать таким образом, чтобы функция $(B(-x) + 1)/x$ была минимальна в точке s . Из теоремы 2 следует, что функция $(B(-x) + 1)/x$ не возрастает при $x > 0$. Следовательно, нужно выбрать $s \geq |t_0|$. В этом случае $B(-s) = |s| - 1$ и несложный анализ неравенства (9) показывает, что оптимальным является параметр $s = |t_0|$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Г. Макаров, *Алгебра и анализ*, **10:2** (1998), 1–62. [2] Н. Hedenmalm, I. Kayumov, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135:7** (2007), 2235–2248. [3] L. Carleson, P. W. Jones, *Duke Math. J.*, **66:2** (1992), 169–206. [4] N. G. Makarov, *Ark. Mat.*, **25:1** (1987), 41–89. [5] L. Carleson, N. G. Makarov, *Ark. Mat.*, **32:1** (1994), 33–62. [6] J. Feng, T. H. MacGregor, *J. Anal. Math.*, **29:1** (1976), 203–231. [7] G. Szegő, A. Zygmund, *J. Anal. Math.*, **3:1** (1954), 225–244. [8] С. М. Никольский, *Докл. АН СССР*, **76** (1951), 785–788. [9] L. A. de Branges, *Acta Math.*, **154:1–2** (1985), 137–152. [10] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962. [11] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

И. Р. Каюмов

НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета

Поступило
10.10.2007