Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Неклюдов, Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 408–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:27:32

УДК 517.956.223

Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре

А. В. Неклюдов

В настоящей работе рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами вида $Lu = e^u$ в полубесконечном цилиндре, удовлетворяющее на боковой поверхности цилиндра однородному условию Неймана.

Библиография: 9 названий.

В настоящей работе рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами вида $Lu = e^u$ в полубесконечном цилиндре, удовлетворяющее на боковой поверхности цилиндра однородному условию Неймана. Ранее во многих работах рассматривалось уравнение Гаусса $\Delta u = e^u$. В [1], [2] было показано, что решение задачи Неймана для уравнения Гаусса в цилиндре стремится к $-\infty$ с линейной, либо логарифмической скоростью. В [3] изучались младшие члены асимптотики решений уравнения Гаусса в цилиндре. Поведение решений уравнения Гаусса в других неограниченных областях рассмотрено в [4], [5].

В n -мерном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \widehat{\Omega}$ рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = e^u, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbb{R}_x^n$, $\widehat{\Omega}$ – ограниченная область из $\mathbb{R}_x^{n-1}$, имеющая липшицеву границу; $a_{ij}(x)$ – измеримые функции в Ω , $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const} > 0.$$

На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, \infty) \times \partial \widehat{\Omega}$ задано краевое условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{\Gamma} \equiv \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{\nu} = (0, \nu_2, \dots, \nu_n)$ – единичная внешняя нормаль к Γ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Omega(a, b) &= \Omega \cap \{x : a < x_1 < b\}, & \Gamma(a, b) &= \Gamma \cap \{x : a < x_1 < b\}, \\ S_t &= \{x : x_1 = t, \hat{x} \in \widehat{\Omega}\}, \\ \nabla u &= \text{grad } u, & m_0 &= \text{mes}_{n-1} \widehat{\Omega}, & \bar{u}(t) &= m_0^{-1} \int_{\Omega(t, t+1)} u \, dx.\end{aligned}$$

Под решениями задачи (1), (2) в Ω будем понимать обобщенные решения, т.е. функции, принадлежащие $W_2^1(\Omega(0, t)) \cap L_\infty(\Omega(0, t))$ для всех $t > 0$ и удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Omega(0, t)} \sum_{i, j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = - \int_{\Omega(0, t)} e^u v \, dx \quad (3)$$

для всех функций $v \in W_2^1(\Omega(0, t))$ таких, что $v|_{S_0 \cup S_t} = 0$.

Для решения задачи (1), (2) стандартным образом [6] вводится понятие *потока* через сечение S_t :

$$P(t, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h^{-1} \int_{\Omega(t, t+h)} \sum_{j=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right) = \int_{S_t} \sum_{j=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\hat{x},$$

где последнее равенство справедливо для почти всех $t > 0$. Для потоков справедливо [6] соотношение

$$P(t_2, u) - P(t_1, u) = \int_{\Omega(t_1, t_2)} e^u \, dx, \quad (4)$$

$0 < t_1 < t_2$. Введем также обозначение

$$Q(t, u) = \int_t^{t+1} P(\tau, u) \, d\tau.$$

Докажем сначала вспомогательное техническое утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть возрастающая последовательность $a_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию

$$a_k \leq c_0 + c_1 k^\gamma a_{k+1}^\alpha,$$

$c_0, c_1, \alpha, \gamma = \text{const} > 0$, $\alpha < 1$. Тогда существует $b_0 = b_0(c_0, c_1, \alpha, \gamma)$ такое, что если $a_1 > b_0$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1 > 2c_0$. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots$ имеем $a_k \leq 2c_1 k^\gamma a_{k+1}^\alpha$,

$$a_{k+1} \geq c_2 a_k^{1+\lambda} k^{-\sigma}, \quad (5)$$

$c_2 = (2c_1)^{-1/\alpha}$, $\sigma = \gamma/\alpha$, $\lambda = 1/\alpha - 1 > 0$.

Пусть b_0 удовлетворяет условиям $b_0 > 2c_0$, $b_0 > 2$ и $b_0^{\lambda/2} c_2 \nu_0 > 2$, где $\nu_0 = \min_{k=1, 2, \dots} (2^{k\lambda/2} k^{-\sigma})$. Покажем по индукции, что из условия $a_1 > b_0$ следует, что $a_k > 2^k$ для всех $k = 1, 2, \dots$. При $k = 1$ имеем $a_1 > b_0 > 2$. Если $a_k > 2^k$ для некоторого k , то из (5) получаем

$$a_{k+1} > c_2 2^k b_0^{\lambda/2} 2^{k\lambda/2} k^{-\sigma} \geq 2^k c_2 b_0^{\lambda/2} \nu_0 > 2^{k+1},$$

что и доказывает лемму.

Следующая лемма устанавливает свойства ограниченности сверху решений задачи (1), (2) в Ω и является основной при изучении поведения решений.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω . Тогда

1) для всех $\beta \geq 0$

$$\int_{\Omega} e^{(\beta+1)u} dx < \infty;$$

2) для всех $t \geq 1$

$$\sup_{\Omega(0,t)} u \leq \sup_{\Omega(0,1)} u;$$

3) существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первое утверждение леммы при $\beta > 0$. Зафиксируем $t > 1$, $\kappa > 0$. Положим в интегральном тождестве (3) $v = e^{\beta u} \theta$, где $0 \leq \theta = \theta(x_1) \in C_0^\infty[0, t + \kappa]$, $\theta = 1$ при $1 \leq x_1 \leq t$, $(\theta')^2 \leq c_0 \kappa^{-2} \theta$ при $t \leq x_1 \leq t + \kappa$; $(\theta')^2 \leq c_0 \theta$ при $0 \leq x_1 \leq 1$; c_0 не зависит от t , κ . Используя эллиптичность уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega(0,t+\kappa)} e^{\beta u} |\nabla u|^2 \theta dx + \int_{\Omega(1,t)} e^{(\beta+1)u} dx \\ & \leq c_1 \left(\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega(t,t+\kappa)} e^{\beta u} |\nabla u| \theta^{1/2} dx + \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} |\nabla u| \theta^{1/2} dx \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega(0,t+\kappa)} e^{\beta u} |\nabla u|^2 \theta dx + \int_{\Omega(1,t)} e^{(\beta+1)u} dx \\ & \leq \frac{\beta}{2} \int_{\Omega(t,t+\kappa) \cup \Omega(0,1)} e^{\beta u} |\nabla u|^2 \theta dx + \frac{c_1^2}{2\beta\kappa^2} \int_{\Omega(t,t+\kappa)} e^{\beta u} dx + \frac{c_1^2}{2\beta} \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} dx, \\ & \int_{\Omega(1,t)} e^{(\beta+1)u} dx \leq \frac{c_2}{\beta} \left(\frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega(t,t+\kappa)} e^{\beta u} dx + \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} dx \right), \end{aligned}$$

c_2 не зависит от t , κ , β . Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{\Omega(1,t)} e^{(\beta+1)u} dx \leq \frac{c_3}{\beta\kappa^\delta} \left(\int_{\Omega(t,t+\kappa)} e^{(\beta+1)u} dx \right)^\alpha + \frac{c_2}{\beta} \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} dx, \quad (7)$$

где $0 < \alpha = \beta/(\beta+1) < 1$, $\delta = 2 - (\beta+1)^{-1} > 0$.

Зафиксируем $t_1 > 1$, $k = 2, 3, \dots$. Применим неравенство (7) при $t = t_k = t_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j^{-2}$, $\kappa = k^{-2}$:

$$\int_{\Omega(1,t_k)} e^{(\beta+1)u} dx \leq \frac{c_3 k^{2\delta}}{\beta} \left(\int_{\Omega(t_k, t_k + k^{-2})} e^{(\beta+1)u} dx \right)^\alpha + \frac{c_2}{\beta} \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} dx.$$

Применяя к последовательности $a_k = \int_{\Omega(1,t_k)} e^{(\beta+1)u} dx$ лемму 1, получим, что для некоторого $b_0 = b_0(\beta, \Omega, L, u) > 0$ из неравенства $\int_{\Omega(1,t_1)} e^{(\beta+1)u} dx > b_0$ следует, что

$\int_{\Omega(1,t_1+2)} e^{(\beta+1)u} dx = \infty$. Это противоречит ограниченности $u(x)$ в любом ограниченном цилиндре из Ω . Таким образом, для любого $t_1 > 1$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega(1,t_1)} e^{(\beta+1)u} dx \leq b_0 < \infty,$$

что и доказывает первое утверждение леммы при $\beta > 0$. Тогда, устремив в неравенстве (7) t к ∞ при $\kappa = 1$, получим

$$\|e^u\|_{L_{\beta+1}(\Omega(1,t))} \leq \left(\frac{c_2}{\beta} \|e^u\|_{L_\beta(\Omega(0,1))}^\beta \right)^{1/(\beta+1)}.$$

Устремив β к ∞ , получим, что при всех $t > 1$

$$\sup_{\Omega(1,t)} e^u \leq \sup_{\Omega(0,1)} e^u,$$

что и доказывает второе утверждение леммы.

Оценивая интеграл по $\Omega(t, t + \kappa)$ в (6) так же, как и выше, получим при $\beta > 0$

$$\int_{\Omega(1,t)} e^{(\beta+1)u} dx \leq \frac{c_3}{\beta \kappa^\delta} \left(\int_{\Omega(t,t+\kappa)} e^{(\beta+1)u} dx \right)^\alpha + c_1 \int_{\Omega(0,1)} e^{\beta u} |\nabla u| \theta^{1/2} dx;$$

далее устремляя t к ∞ , а затем β к 0, получим, что

$$\int_{\Omega(1,\infty)} e^u dx \leq c_1 \int_{\Omega(0,1)} |\nabla u| \theta^{1/2} dx < \infty.$$

Таким образом, первое утверждение леммы доказано и при $\beta = 0$. Отсюда с учетом (4) сразу следует третье утверждение леммы. Таким образом лемма 2 полностью доказана.

Докажем лемму, дающую оценку интеграла Дирихле решения задачи Неймана для линейного эллиптического уравнения в цилиндре. Она является уточнением некоторых результатов [6].

ЛЕММА 3. Пусть u – решение уравнения $Lu = f$ в $\Omega(k_1 - N, k_2 + N)$, удовлетворяющее на $\Gamma(k_1 - N, k_2 + N)$ однородному условию Неймана (2), где $k_1, k_2, N \in \mathbb{N}$, $N \leq k_1 < k_2$. Пусть также выполнены следующие условия:

- 1) $P(t, u)$ является неубывающей функцией переменной t ;
- 2) в $\Omega(k_1 - N, k_2 + N)$ справедливо неравенство $fu \geq -q$, $q = \text{const} \geq 0$;
- 3) $\bar{u}(t) \leq 0$ для всех $t \in (k_1 - N, k_2 + N - 1)$ (это условие не требуется, если $P(t, u) \equiv \text{const}$).

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(k_1, k_2)} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq e^{-AN} \int_{\Omega(k_1 - N, k_2 + N)} |\nabla u|^2 dx + c_0(k_2 - k_1) \left(\sup_{k_1 - N \leq t \leq k_2 + N} P^2(t, u) + q \right), \end{aligned}$$

где постоянные $A > 0$, $c_0 > 0$ зависят только от области Ω и постоянных эллиптичности оператора L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $k_1 - N + 1 \leq a < b \leq k_2 + N - 1$. Рассмотрим непрерывную срезающую функцию $\Phi = \Phi(x_1)$, равную 1 при $a \leq x_1 \leq b$, равную 0 при $x_1 \leq a - 1$ и $x_1 \geq b + 1$ и линейную при $a - 1 \leq x_1 \leq a$ и $b \leq x_1 \leq b + 1$. Полагая в интегральном тождестве для u пробную функцию $v = u\Phi$ и используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(a,b)} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq c_1 \left(\int_{\Omega(b,b+1)} - \int_{\Omega(a-1,a)} \right) \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx - c_1 \int_{\Omega(a-1,b+1)} f u \Phi dx \\ & \leq c_2 \int_{\Omega(a-1,b+1) \setminus \Omega(a,b)} |\nabla u|^2 dx + c_1 (Q(b, u) \bar{u}(b) - Q(a-1, u) \bar{u}(a-1)) + c_3 (b-a)q. \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (8), используя возрастание $Q(t, u)$ и неположительность $\bar{u}(t)$:

$$\begin{aligned} & Q(b, u) \bar{u}(b) - Q(a-1, u) \bar{u}(a-1) \\ & = (Q(b, u) - Q(a-1, u)) \bar{u}(b) + (\bar{u}(b) - \bar{u}(a-1)) Q(a-1, u) \\ & \leq c_4 \left((b-a) \int_{\Omega(a-1,b+1)} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \cdot |Q(a-1, u)| \\ & \leq \frac{1}{2c_1} \int_{\Omega(a-1,b+1)} |\nabla u|^2 dx + c_5 (b-a) Q^2(a-1, u). \end{aligned}$$

Тогда из (8) получаем

$$\int_{\Omega(a,b)} |\nabla u|^2 dx \leq c_6 \left(\int_{\Omega(a-1,b+1) \setminus \Omega(a,b)} |\nabla u|^2 dx + (b-a)(Q^2(a-1, u) + q) \right).$$

Отсюда

$$\int_{\Omega(a,b)} |\nabla u|^2 dx \leq e^{-A} \left(\int_{\Omega(a-1,b+1)} |\nabla u|^2 dx + (b-a)(M+q) \right), \quad (9)$$

где $e^{-A} = c_6(1+c_6)^{-1}$; $M = \sup_{k_1-N \leq t \leq k_2+N} P^2(t, u)$; постоянные $c_k > 0$ не зависят от k_1, k_2, a, b, q, M . Применяя оценку (9) при $a = k_1, b = k_2$, затем при $a = k_1 - 1, b = k_2 + 1$ и т.д., получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(k_1,k_2)} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq e^{-A} \left(\int_{\Omega(k_1-1,k_2+1)} |\nabla u|^2 dx + (k_2 - k_1)(M+q) \right) \\ & \leq e^{-2A} \left(\int_{\Omega(k_1-2,k_2+2)} |\nabla u|^2 dx + (k_2 - k_1 + 2)(M+q) \right) + e^{-A} (k_2 - k_1)(M+q) \\ & \leq \dots \leq e^{-AN} \int_{\Omega(k_1-N,k_2+N)} |\nabla u|^2 dx + c_7 (k_2 - k_1)(M+q). \end{aligned}$$

Таким образом лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующая оценка интеграла Дирихле решения задачи (1), (2).

ЛЕММА 4. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω . Тогда для любого $t \geq 0$

$$\int_{\Omega(t, t+1)} |\nabla u|^2 dx \leq c_0,$$

$c_0 = \text{const} > 0$ не зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что для всех $t \geq 1$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega(0, t)} |\nabla u|^2 dx \leq c_1 t^4. \quad (10)$$

Рассмотрим следующую задачу: $LV = e^u$ в Ω , $\partial V / \partial \mu|_{\Gamma} = 0$, $V|_{x_1=0} = 0$. В силу леммы 2 функция e^u ограничена в Ω , поэтому существует [7] решение $V(x)$, удовлетворяющее при $t \geq 1$ оценке

$$\int_{\Omega(0, t)} |\nabla V|^2 dx \leq c_2 t^3.$$

Отсюда [6] с учетом леммы 2 получаем при $p > n/2$

$$\sup_{S_t} V^2 \leq c_3 \left(\int_{\Omega(t-1, t+1)} V^2 dx + \left(\int_{\Omega(t-1, t+1)} e^{pu} dx \right)^{2/p} \right) \leq c_4 t^4. \quad (11)$$

Функция $U = u - V$ является решением уравнения $LU = 0$ в Ω и удовлетворяет на Γ однородному условию Неймана. Согласно принципу трихотомии решений задачи Неймана в цилиндре [8] U может при $x_1 \rightarrow \infty$ вести себя одним из трех способов: осциллировать на любом сечении S_t , причем верхняя и нижняя грани на S_t стремятся к $\pm\infty$ с экспоненциальной скоростью; вести себя как линейная функция от x_1 ; стремиться к константе с экспоненциальной скоростью. В данном случае в силу ограниченности u сверху и оценки (11) первая возможность исключается, поэтому при $t \geq 1$ справедлива оценка $\sup_{S_t} |U| \leq c_5 t$; с учетом (11) отсюда получаем $\sup_{S_t} |u| \leq c_6 t^2$. Далее полагая в (3) $v = u\theta$, где $\theta(x_1)$ – гладкая срезающая функция, стандартным образом получаем оценку

$$\int_{\Omega(0, t)} |\nabla u|^2 dx \leq c_7 \left(\int_{\Omega(t, t+1)} u^2 dx - \int_{\Omega(0, t+1)} e^u u \theta dx \right) + c_8 \leq c_1 t^4,$$

где c_k не зависят от $t \geq 1$. Таким образом, справедлива оценка (10).

Используя лемму 2 и выпуклость показательной функции, получаем для $t \geq t_0 = \text{const}$ оценку $1 > m_0^{-1} \int_{\Omega(t, t+1)} e^u dx \geq \exp\{\bar{u}(t)\}$. Тогда с учетом (4) получаем, что для $u(x)$ в $\Omega(t_0, +\infty)$ выполнены все условия леммы 3 (где $q = e^{-1}$). Применяя лемму 3 при $k_1 = t \geq 2t_0$, $k_2 = t+1$, $N = [t/2]$ – целая часть $t/2$, с учетом оценки (10) и леммы 2 получим

$$\int_{\Omega(t, t+1)} |\nabla u|^2 dx \leq e^{-A[t/2]} \int_{\Omega(t/2, 3t/2+1)} |\nabla u|^2 dx + c_9 \left(\sup_{t \geq 0} P^2(t, u) + 1 \right) \leq c_{10}.$$

Отсюда и из (10) следует утверждение леммы 4.

Следующая лемма существенно уточняет оценку решения $u(x)$ сверху.

ЛЕММА 5. Пусть $u(x)$ – удовлетворяет (1), (2) в Ω . Тогда в Ω выполняется неравенство

$$u(x) \leq c_0 - \ln x_1,$$

где c_0 не зависит от x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя выпуклость показательной функции, с учетом леммы 2 получаем для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\exp \left\{ (m_0 k)^{-1} \int_{\Omega(1, k+1)} u \, dx \right\} \leq (m_0 k)^{-1} \int_{\Omega(1, k+1)} e^u \, dx \leq c_1 k^{-1},$$

откуда

$$(m_0 k)^{-1} \int_{\Omega(1, k+1)} u \, dx \leq c_2 - \ln k,$$

где c_2 не зависит от k . Тогда существует $k_0 = 1, 2, \dots, k$ такое, что $\bar{u}(k_0) \leq c_2 - \ln k$. Оценивая отклонение решения от среднего значения [6], с учетом лемм 2 и 4 получим, что

$$\sup_{\Omega(k_0, k_0+1)} |u - \bar{u}(k_0)|^2 \leq c_3 \left(\int_{\Omega(k_0-1, k_0+2)} |\nabla u|^2 \, dx + \left(\int_{\Omega(k_0-1, k_0+2)} e^{pu} \, dx \right)^{2/p} \right) \leq c_4,$$

$p > n/2$. Отсюда получаем, что $u(x) \leq c_5 - \ln k$ в $\Omega(k_0, k_0 + 1)$. Используя утверждение 2) леммы 2 для области $\Omega(k_0, \infty)$, получаем утверждение леммы 5.

Дальнейшее изучение поведения решений задачи (1), (2) основано на оценке среднего значения решения линейного эллиптического уравнения через его поток.

ЛЕММА 6. Пусть $u(x)$ – решение уравнения $Lu = f$ в Ω , удовлетворяющее на Γ однородным условиям Неймана; поток решения $P(t, u) \leq 0$ является неубывающей функцией от t . Тогда при $t \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} C_0 \left(\int_0^t P(\tau, u) \, d\tau - \int_{\Omega(t, t+1) \cup \Omega(0, 1)} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega(0, t)} |f| \, dx - t \int_{\Omega(t, t+1)} |f| \, dx \right) - c_0 \\ \leq \bar{u}(t) - \bar{u}(0) \\ \leq C_1 \left(\int_0^t P(\tau, u) \, d\tau + \int_{\Omega(t, t+1) \cup \Omega(0, 1)} |\nabla u|^2 \, dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega(0, t)} |f| \, dx + t \int_{\Omega(t, t+1)} |f| \, dx \right) + c_0, \end{aligned}$$

где $C_0, C_1 > 0$ не зависят от t, u , а $c_0 > 0$ не зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V(x)$ – решение уравнения $LV = 0$ в Ω , удовлетворяющее однородным условиям Неймана на Γ и условиям $V|_{S_0} = 0$; $c_1 x_1 \leq V(x) \leq c_2 x_1$ при $x_1 \geq 1$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ [9]. Используя стандартные оценки, получим

$$\int_{\Omega(0, t)} |\nabla V|^2 \, dx \leq c_3 \int_{\Omega(t, t+1)} V^2 \, dx \leq c_4 t^2.$$

Применяя лемму 3 к функции V и учитывая, что $P(t, V) \equiv P_0 = \text{const}$, получим, что

$$\int_{\Omega(t, t+1)} |\nabla V|^2 dx \leq c_5(t^2 \exp\{-At\}) + P_0^2 \leq c_6, \quad (12)$$

где $A > 0$. Из оценки [7]

$$\int_{\Omega(0, t)} |\nabla V|^2 dx \leq c_6 \left(\int_{\Omega(t, t+1)} |\nabla V|^2 dx + P_0 \bar{V}(t) \right)$$

получаем, что $P_0 \geq 0$. Так как [6] при $P_0 = 0$ решение, удовлетворяющее (12), ограничено в Ω , то $P_0 > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $P_0 = 1$.

Используя интегральные тождества для функций u и V , получим

$$\int_{\Omega(t, t+1)} \sum_{i=1}^n a_{i1} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} u - \frac{\partial u}{\partial x_i} V \right) dx = \int_{\Omega(0, 1)} \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial V}{\partial x_i} u dx - \int_{\Omega(0, t+1)} fV\Phi dx,$$

где $\Phi = \Phi(x_1)$ – срезающая функция, равная 1 при $1 \leq x_1 \leq t$, равная 0 при $x_1 \leq 0$ и $x_1 \geq t+1$ и линейная при $0 \leq x_1 \leq 1$ и $t \leq x_1 \leq t+1$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) - \bar{u}(0) &= \int_{\Omega(t, t+1)} \sum_{i=1}^n a_{i1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} (V - \bar{V}(t)) - \frac{\partial V}{\partial x_i} (u - \bar{u}(t)) \right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega(0, 1)} \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial V}{\partial x_i} (u - \bar{u}(0)) dx + Q(t, u) \bar{V}(t) - \int_{\Omega(0, t+1)} fV\Phi dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство Пуанкаре и оценку (12), получаем, что

$$\bar{u}(t) - \bar{u}(0) = Q(t, u) \bar{V}(t) - \int_{\Omega(0, t+1)} fV\Phi dx + I(t), \quad (13)$$

где $|I(t)| \leq c_7 \int_{\Omega(t, t+1) \cup \Omega(0, 1)} |\nabla u|^2 dx$, c_7 не зависит от t , u .

Так как в силу (4) $P'(t, u) = \int_{S_t} f d\hat{x}$ для п.в. $t \geq 0$, то

$$\int_{\Omega(0, t)} fV dx = \int_{\Omega(0, t)} f(V - \hat{V}(x_1)) dx + \int_0^t \hat{V}(\tau) P'(\tau, u) d\tau, \quad (14)$$

где $\hat{V}(t) = m_0^{-1} \int_{S_t} V d\hat{x}$.

Используя оценку [6] для $\sup |V - \hat{V}(x_1)|$ через норму L_2 , неравенство Пуанкаре и оценку (12), получим

$$\left| \int_{\Omega(0, t)} f(V - \hat{V}(x_1)) dx \right| \leq c_8 \int_{\Omega(0, t)} |f| dx. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$c_1 \int_0^t \tau P'(\tau, u) d\tau - c_9 \leq \int_0^t \hat{V}(\tau) P'(\tau, u) d\tau \leq c_2 \int_0^t \tau P'(\tau, u) d\tau + c_9,$$

$c_9 > 0$ не зависит от t . Отсюда

$$\begin{aligned} -c_1 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + c_1 P(t, u)t - c_9 &\leq \int_0^t \widehat{V}(\tau) P'(\tau, u) d\tau \\ &\leq -c_2 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + c_2 P(t, u)t + c_9. \end{aligned}$$

Тогда из (12)–(14) получаем

$$\begin{aligned} c_2 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + Q(t, u)\overline{V}(t) - c_2 P(t, u)t \\ - c_8 \int_{\Omega(0, t)} |f| dx - c_2 t \int_{\Omega(t, t+1)} |f| dx - |I(t)| - c_9 \\ \leq \overline{u}(t) - \overline{u}(0) \\ \leq c_1 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + Q(t, u)\overline{V}(t) - c_1 P(t, u)t \\ + c_8 \int_{\Omega(0, t)} |f| dx + c_1 t \int_{\Omega(t, t+1)} |f| dx + |I(t)| + c_9. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что при получении оценки (16) не использовалось предположение о неположительности $P(t, u)$. Так как

$$\begin{aligned} Q(t, u)\overline{V}(t) - c_1 P(t, u)t &\leq c_1 t(Q(t, u) - P(t, u)) \leq c_1 t \int_{\Omega(t, t+1)} |f| dx, \\ Q(t, u)\overline{V}(t) - c_2 P(t, u)t &\geq c_2 t(Q(t, u) - P(t, u)) + c_2 Q(t, u) \\ &\geq -c_2 \left(|P(0, u)| + \int_{\Omega(0, t+1)} |f| dx \right), \end{aligned}$$

из (16) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 7. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω . Тогда $P(t, u) < 0$ для всех $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P(t_0, u) \geq 0$ для некоторого $t_0 \geq 0$. Тогда в силу (4) $P(t, u) > 0$ для всех $t > t_0$ и $P_0 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, u) > 0$. Тогда из оценки (16), учитывая леммы 2, 4 и 5, получаем

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &\geq c_2 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + Q(t, u)\overline{V}(t) - c_2 P(t, u)t - c_0 \\ &\geq c_2 \int_0^t P(\tau, u) d\tau + (c_1 - c_2)tP(t, u) - c_0 \sim c_1 P_0 t > 0, \end{aligned}$$

что противоречит лемме 5. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Не существует решения $u(x)$ задачи (1), (2) в Ω , удовлетворяющего условию $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, u) = 0$ и одному из условий

$$\overline{u}(t) < -2 \ln t - M_1 \quad \text{для всех } t > t_0 = \text{const} > 0 \quad (17)$$

либо

$$\bar{u}(t) > -2 \ln t + N_1 \quad \text{для всех } t > t_0 = \text{const} > 0, \quad (18)$$

где M_1 и N_1 – положительные постоянные, зависящие от области Ω и оператора L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2, 4, 5 вытекает, что

$$\int_{\Omega(0,t)} e^u dx + t \int_{\Omega(t,t+1)} e^u dx + \int_{\Omega(t,t+1)} |\nabla u|^2 dx \leq c_1, \quad (19)$$

где c_1 не зависит от t .

Пусть при $t > t_0$ выполнено условие (17). Тогда в силу ограниченности отклонения $u(x)$ в области $\Omega(t, t+1)$ от $\bar{u}(t)$ получаем, что в $\Omega(t_0, +\infty)$ выполнено неравенство $e^{u(x)} \leq e^{-M_1+c_0} x_1^{-2}$, $c_0 = \text{const}$. Тогда при $t > t_0$ имеем в силу (4)

$$P(t, u) = - \int_{\Omega(t, +\infty)} e^u dx \geq - \frac{m_0 e^{-M_1+c_0}}{t}.$$

Применяя лемму 6 в области $\Omega(t_0, +\infty)$ и учитывая (19), получаем

$$\bar{u}(t) - \bar{u}(t_0) \geq C_0 \int_{t_0}^t P(\tau, u) d\tau - c_2 \geq -C_0 m_0 e^{-M_1+c_0} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) - c_2,$$

что для достаточно больших t противоречит оценке (17) в случае $C_0 m_0 e^{-M_1+c_0} < 2$.

Аналогично, если для всех $t > t_0 = \text{const} > 0$ выполнено условие (18), то в области $\Omega(t_0, +\infty)$ имеем $e^u \geq e^{N_1-c_0} x_1^{-2}$,

$$P(t, u) \leq - \frac{m_0 e^{N_1-c_0}}{t},$$

$$\bar{u}(t) - \bar{u}(t_0) \leq C_1 \int_{t_0}^t P(\tau, u) d\tau + c_2 \leq -C_1 m_0 e^{N_1-c_0} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) + c_2,$$

что противоречит (18), если $C_1 m_0 e^{N_1-c_0} > 2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω , причем для некоторых $a, b > 1$ выполнены условия

$$\bar{u}(a) = -2 \ln a - M_2, \quad \bar{u}(b) = -2 \ln b - M_2, \quad \bar{u}(t) < -2 \ln t - M_2$$

при $a < t < b$, где $M_2 = \text{const} > 0$ удовлетворяет условию $M_2 \geq M_0$, M_0 – некоторая положительная постоянная, зависящая от области Ω и оператора L . Тогда при $a < t < b$ справедливо неравенство $\bar{u}(t) > -2 \ln t - M_3$, где постоянная $M_3 > 0$ не зависит от a, b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $e^{u(x)} \leq e^{-M_2+c_0} x_1^{-2}$ в $\Omega(a, b)$, при $a < t < b$ получаем

$$P(t, u) = P(a, u) + \int_{\Omega(a,t)} e^u dx \leq P(a, u) + \frac{m_0 e^{-M_2+c_0}}{a}. \quad (20)$$

Пусть $c_1 > 0$ – постоянная из (19), $\alpha_0 = e^{c_1}$, $M_0 > 0$ удовлетворяет условию $\alpha_0 C_0 m_0 e^{-M_0+c_0} \leq 1/2$, где C_0 – та же постоянная, что и в лемме 6; $M_2 \geq M_0$. Предположим, что $P(a, u) > -2m_0 e^{-M_2+c_0}/a$. Тогда

$$P(t, u) > - \frac{2m_0 e^{-M_2+c_0}}{t} > - \frac{2\alpha_0 m_0 e^{-M_2+c_0}}{t}$$

при $a < t < a_1 \leq b$. Предположим, что $\alpha_0 a < a_1$. Из леммы 6 получаем, что

$$\begin{aligned}\bar{u}(\alpha_0 a) &\geq \bar{u}(a) - 2\alpha_0 C_0 m_0 e^{-M_2+c_0} \ln \alpha_0 - c_1 \\ &= -2 \ln a - M_2 - 2\alpha_0 C_0 m_0 e^{-M_2+c_0} \ln \alpha_0 - c_1 \\ &= -2 \ln(\alpha_0 a) - M_2 + 2(1 - \alpha_0 C_0 m_0 e^{-M_2+c_0}) \ln \alpha_0 - c_1 \geq -2 \ln(\alpha_0 a) - M_2,\end{aligned}$$

что противоречит условиям леммы. Таким образом, из условия

$$P(a, u) > -\frac{2m_0 e^{-M_2+c_0}}{a}$$

следует, что либо $b \leq \alpha_0 a$, либо

$$P(t_0, u) \leq -\frac{2\alpha_0 m_0 e^{-M_2+c_0}}{t_0}$$

для некоторого $t_0 \in (a, \alpha_0 a)$. Во втором случае имеем

$$P(t_0, u) \leq -\frac{2\alpha_0 m_0 e^{-M_2+c_0}}{t_0} < -\frac{2m_0 e^{-M_2+c_0}}{a} < P(a, u),$$

что невозможно при $t_0 > a$. Итак, неравенство $P(a, u) > -2m_0 e^{-M_2+c_0}/a$ возможно только в случае $b \leq \alpha_0 a$.

Предположим, что $P(a, u) \leq -2m_0 e^{-M_2+c_0}/a$. Тогда из (20) получаем, что

$$P(t, u) \leq -\frac{m_0 e^{-M_2+c_0}}{a}$$

при $a < t < b$. Отсюда по лемме 6 получаем, что

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) \leq -\frac{C_1 m_0 e^{-M_2+c_0}(b-a)}{a} + c_1,$$

что противоречит условиям леммы, если $b/a > \alpha_1$, где $\alpha_1 = \text{const} > 0$ не зависит от a, b .

Таким образом из условий леммы вытекает, что $b/a \leq \alpha$, где $\alpha = \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$. Отсюда при $a < t < b \leq \alpha a$ получаем

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &\geq \sup_{\Omega(t, t+1)} u - c_0 \geq \bar{u}(b) - c_0 = -2 \ln b - M_2 - c_0 \\ &\geq -2 \ln a - 2 \ln \alpha - M_2 - c_0 > -2 \ln t - 2 \ln \alpha - M_2 - c_0,\end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 10. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω , причем для некоторых $a, b > 0$ выполнены условия

$$\bar{u}(a) = -2 \ln a + N_2, \quad \bar{u}(b) = -2 \ln b + N_2, \quad \bar{u}(t) > -2 \ln t + N_2$$

при $a < t < b$, где $N_2 = \text{const} > 0$ удовлетворяет условию $N_2 \geq N_0$, N_0 – некоторая положительная постоянная, зависящая от области Ω и оператора L . Тогда при $a < t < b$ справедливо неравенство $\bar{u}(t) < -2 \ln t + N_3$, где постоянная N_3 не зависит от a, b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $b > 3a$. Так как в $\Omega(a, b)$ справедливо неравенство $e^{u(x)} \geq e^{N_2 - c_0} x_1^{-2}$, с учетом леммы 7 получим при $a < t < 2a$ оценку

$$P(t, u) \leq P(2a, u) = P(3a, u) - \int_{\Omega(2a, 3a)} e^u dx \leq -\frac{m_0 e^{N_2 - c_0}}{6a}.$$

Тогда из леммы 6 получаем, что

$$\bar{u}(2a) \leq \bar{u}(a) - \frac{C_1 m_0 e^{N_2 - c_0}}{6} + c_1 = -2 \ln(2a) + N_2 - \frac{C_1 m_0 e^{N_2 - c_0}}{6} + c_1 + 2 \ln 2,$$

что противоречит условиям леммы в случае, если $-C_1 m_0 e^{N_0 - c_0} / 6 + c_1 + 2 \ln 2 < 0$ и $N_2 \geq N_0$. Таким образом, имеет место случай $b \leq 3a$. Тогда при $a < t < b \leq 3a$ получаем

$$\bar{u}(t) \leq \sup_{\Omega(t, t+1)} u \leq \sup_{\Omega(a, a+1)} u \leq \bar{u}(a) + c_0 = -2 \ln a + N_2 + c_0 \leq -2 \ln t + N_2 + c_0 + 2 \ln 3.$$

Лемма доказана.

Таким образом получаем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2) в Ω . Тогда $u(x)$ ведет себя одним из двух возможных способов:

- 1) $Ax_1 \leq u(x) \leq Bx_1$ при $x_1 \geq t_0 = \text{const} > 0$, где постоянные $A, B < 0$ не зависят от x_1 ;
- 2) $-2 \ln x_1 - M \leq u(x) \leq -2 \ln x_1 + N$ при $x_1 \geq t_0$, где постоянные $M, N > 0$ не зависят от x_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае если $P_0 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, u) < 0$ из леммы 6 с учетом (19) непосредственно следует, что решение $u(x)$ имеет поведение 1). В случае $P_0 = 0$ положим $M_2 = \max\{M_0, M_1\}$, $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$, где $M_0, M_1, N_0, N_1 > 0$ – постоянные из лемм 8–10. Тогда согласно лемме 8 либо решение $u(x)$ удовлетворяет при $t \geq t_0 = \text{const} > 0$ неравенству $\bar{u}(x) \geq -2 \ln t - M_2$, либо существуют последовательности $a_k, b_k \rightarrow \infty$, $a_k < b_k$, такие, что

$$\bar{u}(a_k) = -2 \ln a_k - M_2, \quad \bar{u}(b_k) = -2 \ln b_k - M_2, \quad \bar{u}(t) < -2 \ln t - M_2$$

при $a_k < t < b_k$. Тогда по лемме 9 $\bar{u}(t) > -2 \ln t - M_3$ при $a_k < t < b_k$. Используя ограниченность отклонения $u(x)$ от $\bar{u}(t)$ в $\Omega(t, t+1)$, получим нижнюю оценку 2) для $u(x)$. Аналогично, используя леммы 8 и 10, получаем верхнюю оценку 2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, “Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений”, Международный семинар “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (пятнадцатая сессия совместных заседаний семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества 19–22 января 1993 года), УМН, 48:4 (1993), 184–185.
- [2] O. Oleinik, *Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996.

- [3] А. И. Насруллаев, “Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения $\Delta u - e^u = 0$ в полубесконечном цилиндре”, *УМН*, **50**:3 (1995), 161–162.
- [4] О. А. Олейник, “Об уравнении $\Delta u + k(x)e^u = 0$ ”, *УМН*, **33**:2 (1978), 203–204.
- [5] А. И. Насруллаев, “Об одном классе нелинейных уравнений в неограниченных областях”, Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 95-летию со дня рождения И. Г. Петровского (совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества; восемнадцатая сессия, 25–29 апреля 1996 года), *УМН*, **51**:5 (1996), 160–161.
- [6] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112**:4 (1980), 588–610.
- [7] А. В. Неклюдов, “О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **16** (1991), 191–217.
- [8] Е. М. Ландис, А. И. Ибрагимов, “Задачи Неймана в неограниченных областях”, *Докл. РАН*, **343**:1 (1995), 17–18.
- [9] С. С. Лахтуров, “Об асимптотике решений второй краевой задачи в неограниченных областях”, *УМН*, **35**:4 (1980), 195–196.

А. В. Неклюдов

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило

10.10.2007