Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Гуревич, Разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных углах, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 178–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:49:26

УДК 517.956.22

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ДВУГРАННЫХ УГЛАХ

П. Л. Гуревич

В работе рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в двугранных и плоских углах, возникающие при изучении нелокальных задач в ограниченной области в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей. Изучаются фредгольмова и однозначная разрешимость указанных задач в соответствующих весовых пространствах. В качестве аппарата исследований применяются априорные оценки решений и формула Грина для нелокальных эллиптических задач.

Библиография: 15 названий.

При изучении эллиптических задач с нелокальными условиями наибольшие трудности возникают в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей (см. [1]–[4]). Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи некоторого множества, поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах (см. [5]–[7]). При получении априорных оценок решений и построении правого регуляризатора нелокальных задач в ограниченной области возникают модельные нелокальные краевые задачи в двугранных углах (см. [3], [4]). В настоящей работе предлагается подход к изучению нелокальных задач, основанный на использовании формулы Грина и сопряженных нелокальных задач. Такой подход позволяет снять дополнительные ограничения работы [3] на соответствующую “локальную” модельную задачу и получить необходимые и достаточные условия фредгольмовости нелокальных задач в плоских углах и однозначной разрешимости таких задач в двугранных углах. При этом в качестве сопряженных возникают нелокальные задачи трансмиссии, рассматривавшиеся в работах [8] (в случае ограниченной области с гладкой границей), [9] (в одномерном случае) и др.

В данной работе мы ограничимся для наглядности нелокальными возмущениями задачи Дирихле для оператора Лапласа.

1. Постановка нелокальных эллиптических краевых задач

1.1. Введем двугранный угол

$$\Omega = \{x = (y, z) : r > 0, b_1 < \varphi < b_2, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01030, а также гранта № Е00-1-195 Министерства образования РФ.

с границами

$$\Gamma_j = \{x = (y, z): r > 0, \varphi = b_j, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \quad j = 1, 2,$$

и ребром $M = \{x = (y, z): y = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Здесь $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$; r, φ – полярные координаты точки y ; $0 < b_1 < b_2 < 2\pi$. Рассмотрим нелокальную краевую задачу в двугранном угле Ω

$$\Delta U(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$U(x)|_{\Gamma_j} + a_j U(\mathcal{G}_j y, z)|_{\Gamma_j} = g_j(x), \quad x \in \Gamma_j. \quad (1.2)$$

Здесь и далее индекс j принимает значения $j = 1, 2$; $a_j \in \mathbb{C}$; $\mathcal{G}_j$ есть оператор поворота на угол φ_j и растяжения в χ_j раз в плоскости $\{y\}$. При этом $b_1 < b_1 + \varphi_1 = b_2 + \varphi_2 = b < b_2$, $0 < \chi_j$.

Введем пространство $H_a^l(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus M)$ по норме

$$\|w\|_{H_a^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} r^{2(a-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha w(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus M)$ – множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций с компактными носителями из $\overline{\Omega} \setminus M$; $a \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$ целое. Через $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на $\Gamma' = \{x = (y, z): r > 0, \varphi = b', z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $b_1 \leq b' \leq b_2$, с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')} = \inf \|w\|_{H_a^l(\Omega)}$, $w \in H_a^l(\Omega): w|_{\Gamma'} = \psi$. Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_\Omega: H_a^2(\Omega) \rightarrow H_a^0(\Omega, \Gamma) = H_a^0(\Omega) \times \prod_j H_a^{3/2}(\Gamma_j)$$

по формуле

$$\mathcal{L}_\Omega U = \{\Delta U, U(x)|_{\Gamma_j} + a_j U(\mathcal{G}_j y, z)|_{\Gamma_j}\}.$$

Обозначим через $W^l(Q)$, $l \geq 0$ целое, пространство Соболева функций, интегрируемых в квадрате вместе со всеми обобщенными производными вплоть до l -го порядка по Q , где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – область с липшицевой границей. Через $W^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на $(n-1)$ -мерном гладком многообразии $\Upsilon \subset \overline{Q}$.

ЛЕММА 1.1. Для любых $w \in W^l(Q)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место оценка

$$|\lambda|^{l-s} \|w\|_{W^s(Q)} \leq c(\|w\|_{W^l(Q)} + |\lambda|^l \|w\|_{L_2(Q)}). \quad (1.3)$$

Здесь $0 < s < l$; $c > 0$ не зависит от w , λ .

ЛЕММА 1.2. Для любых $w \in W^1(Q)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнена оценка

$$|\lambda|^{1/2} \|w|_\Upsilon\|_{L^2(\Upsilon)} \leq c(\|w\|_{W^1(Q)} + |\lambda| \|w\|_{L_2(Q)}). \quad (1.4)$$

Здесь $c > 0$ не зависит от w , λ .

Доказательство лемм 1.1, 1.2 содержится в [10, гл. 1]. Используя лемму 1.1 и свойства весовых пространств, в работе [2, § 1] был получен следующий результат.

ЛЕММА 1.3. Для любых $w \in H_a^l(\Omega)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено

$$|\lambda|^s \|w\|_{H_{a-s}^{l-s}(\Omega)} \leq c(\|w\|_{H_a^l(\Omega)} + |\lambda|^l \|w\|_{H_{a-l}^0(\Omega)}). \quad (1.5)$$

Здесь $0 < s < l$; $c > 0$ не зависит от w , λ .

1.2. Рассмотрим вспомогательную нелокальную краевую задачу в плоском угле:

$$\Delta u(y) - u(y) = f(y), \quad y \in K, \quad (1.6)$$

$$u(y)|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j} = g_j(y), \quad y \in \gamma_j, \quad (1.7)$$

где $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < b_1 < \varphi < b_2 < 2\pi\}$, $\gamma_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \varphi = b_j\}$.

Аналогично предыдущему вводятся пространства функций $H_a^l(K)$ и $H_a^{l-1/2}(\gamma')$, где $\gamma' = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \varphi = b'\}$, $b_1 \leq b' \leq b_2$. Введем пространство $E_a^l(K)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|w\|_{E_a^l(K)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_K r^{2a} (r^{2(|\alpha|-l)} + 1) |D_y^\alpha w(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Через $E_a^{l-1/2}(\gamma')$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на луче γ' с нормой

$$\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')} = \inf \|w\|_{E_a^l(K)}, \quad w \in E_a^l(K) : w|_{\gamma'} = \psi.$$

Конструктивные определения пространств $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$, $H_a^{l-1/2}(\gamma')$ и $E_a^{l-1/2}(\gamma')$, эквивалентные данным, см. в [6, § 1]. Установим одно свойство весовых пространств, которое потребуется ниже.

ЛЕММА 1.4. Для любой $\psi \in E_a^{l-1/2}(\gamma')$ имеет место оценка

$$\left(\int_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))} |\psi|^2 d\gamma \right)^{1/2} \leq c \|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')},$$

где $c > 0$ не зависит от ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [7, гл. 6, п. 1.3] следует, что норма $\|u\|_{E_a^l(K)}$ и норма

$$\left(\sum_{k=0}^l \int_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))} \sum_{j=0}^{l-k} (1+r)^{2(l-k-j)} \|(rD_r)^k u(r, \cdot)\|_{W^j(b_1, b_2)}^2 dr \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

эквивалентны; здесь $u(r, \varphi)$ есть функция $u(y)$, записанная в полярных координатах.

Выберем функцию $u \in E_a^l(K)$ так, что $u|_{\gamma'} = \psi$, $\|u\|_{E_a^l(K)} \leq 2\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}$. Поскольку $u(r, \varphi)|_{\varphi=b'} = \psi(r)$, в силу непрерывности операции взятия следа в пространствах Соболева имеем $|\psi(r)|^2 \leq k_1 \|u(r, \cdot)\|_{W^l(b_1, b_2)}^2$. Отсюда и из эквивалентности нормы $\|u\|_{E_a^l(K)}$ и нормы (1.8) получим

$$\int_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))} |\psi|^2 d\gamma \leq k_1 \int_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))} \|u(r, \cdot)\|_{W^l(b_1, b_2)}^2 dr \leq k_2 \|u\|_{E_a^l(K)}^2. \quad (1.9)$$

Из (1.9) и неравенства $\|u\|_{E_a^l(K)} \leq 2\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}$ следует утверждение леммы.

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_K: E_a^2(K) \rightarrow E_a^0(K, \gamma) = E_a^0(K) \times \prod_j E_a^{3/2}(\gamma_j)$$

по формуле

$$\mathcal{L}_K u = \{\Delta u - u, u(y)|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}\}.$$

1.3. Следуя работе [3], рассмотрим модельную аналитическую оператор-функцию

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda): W^2(b_1, b_2) \rightarrow W^0[b_1, b_2] = L_2(b_1, b_2) \times \mathbb{C}^2,$$

определенную по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\tilde{U} = \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2}\tilde{U}(\varphi) - \lambda^2\tilde{U}(\varphi), \quad \tilde{U}(\varphi)|_{\varphi=b_j} + a_j e^{i\lambda \ln \chi_j} \tilde{U}(\varphi + \varphi_j)|_{\varphi=b_j} \right\}.$$

Введем в гильбертовых пространствах $W^2(b_1, b_2)$ и $W^0[b_1, b_2]$ эквивалентные нормы, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ ($|\lambda| \geq 1$):

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}\|_{W^2(b_1, b_2)} &= (\|\tilde{U}\|_{W^2(b_1, b_2)}^2 + |\lambda|^4 \|\tilde{U}\|_{L_2(b_1, b_2)}^2)^{1/2}, \\ \|\{\tilde{F}, \tilde{G}_j\}\|_{W^0[b_1, b_2]} &= \left(\|\tilde{F}\|_{L_2(b_1, b_2)}^2 + \sum_j |\lambda|^3 |\tilde{G}_j|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.5. Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ фредгольмов, $\text{ind } \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = 0$; для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 1$ такое, что для $\lambda \in J_{h, q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda = h, |\text{Re } \lambda| \geq q_0\}$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda): W^0[b_1, b_2] \rightarrow W^2(b_1, b_2)$ и

$$\|\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}\|_{W^2(b_1, b_2)} \leq c \|\tilde{\Phi}\|_{W^0[b_1, b_2]} \quad (1.10)$$

для всех $\tilde{\Phi} \in W^0[b_1, b_2]$, где $c > 0$ не зависит от λ и $\tilde{\Phi}$; оператор-функция $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda): W^0[b_1, b_2] \rightarrow W^2(b_1, b_2)$ конечномероморфна.

ЛЕММА 1.6. Для любого $0 < \varepsilon < 1/\max |\ln \chi_j|$ существует $q > 1$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\text{Im } \lambda| \leq \varepsilon \ln |\text{Re } \lambda|, |\text{Re } \lambda| \geq q\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$; для каждого полюса λ_0 оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$ существует $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\text{Im } \lambda - \text{Im } \lambda_0| < \delta\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$.

Леммы 1.5, 1.6 доказаны в [3, § 2]. В [3, § 3] получен также следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$. Тогда для всех $u \in E_a^2(K)$ выполнена оценка

$$\|u\|_{E_a^2(K)} \leq c(\|\mathcal{L}_K u\|_{E_a^0(K, \gamma)} + \|u\|_{L_2(K \cap S)}), \quad (1.11)$$

где $S = \{y \in \mathbb{R}^2: 0 < R_1 < r < R_2\}$; $c > 0$ не зависит от u .

Если для всех $u \in E_a^2(K)$ имеет место оценка (1.11), то на прямой $\text{Im } \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$.

Из теоремы 1.1 вытекает конечномерность ядра и замкнутость образа оператора $\mathcal{L}_K$. Для доказательства конечномерности коядра оператора $\mathcal{L}_K$ получим формулы Грина для нелокальных задач и изучим задачи, сопряженные к нелокальным краевым задачам относительно формулы Грина.

2. Формулы Грина для нелокальных эллиптических задач

2.1. Введем множество $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \varphi = b\}$ (напомним: $b = b_j + \varphi_j$). Множество γ является носителем нелокальных данных в задаче (1.6), (1.7). Обозначим

$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, b_1 < \varphi < b\}, \quad K_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, b < \varphi < b_2\}.$$

Пусть n_j есть нормаль к γ_j , направленная вне области K_j , n – нормаль к γ , направленная вне области K_2 . Будем обозначать через $(\cdot, \cdot)_{K_j}$, $(\cdot, \cdot)_{\gamma_j}$, $(\cdot, \cdot)_\gamma$ скалярные произведения в $L_2(K_j)$, $L_2(\gamma_j)$, $L_2(\gamma)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2.1. Для $u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ имеет место формула Грина

$$\begin{aligned} & \sum_j (\Delta u - u, v_j)_{K_j} + \sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} \\ & + \left(u|_\gamma, \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_\gamma - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma \right)_\gamma \\ & = \sum_j (u, \Delta v_j - v_j)_{K_j} + \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j}, v_j|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} + \left(\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\gamma, v_2|_\gamma - v_1|_\gamma \right)_\gamma, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathcal{G}_k^{-1}$ – оператор поворота на угол $-\varphi_k$ и растяжения в $1/\chi_k$ раз в плоскости $\{y\}$; индекс k здесь и далее принимает значения $k = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим $\Delta u - u$ на $\bar{v}_j$, проинтегрируем по K_j и воспользуемся дважды формулой интегрирования по частям; в результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{K_1} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_1 dx + \int_{\gamma_1} u|_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n_1} \Big|_{\gamma_1} d\gamma - \int_\gamma u|_\gamma \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} \Big|_\gamma d\gamma \\ & = \int_{K_1} u \cdot (\Delta \bar{v}_1 - \bar{v}_1) dy + \int_{\gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_{\gamma_1} \cdot \bar{v}_1|_{\gamma_1} d\gamma - \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\gamma \cdot \bar{v}_1|_\gamma d\gamma, \\ & \int_{K_2} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_2 dx + \int_\gamma u|_\gamma \cdot \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n} \Big|_\gamma d\gamma + \int_{\gamma_2} u|_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n_2} \Big|_{\gamma_2} d\gamma \\ & = \int_{K_2} u \cdot (\Delta \bar{v}_2 - \bar{v}_2) dy + \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\gamma \cdot \bar{v}_2|_\gamma d\gamma + \int_{\gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n_2} \Big|_{\gamma_2} \cdot \bar{v}_2|_{\gamma_2} d\gamma. \end{aligned}$$

Сложим последние два равенства:

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{K_j} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_j dx + \sum_j \int_{\gamma_j} u|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} d\gamma + \int_\gamma u|_\gamma \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n} \Big|_\gamma - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n} \Big|_\gamma \right) d\gamma \\ & = \sum_j \int_{K_j} u \cdot (\Delta \bar{v}_j - \bar{v}_j) dx + \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \cdot \bar{v}_j|_{\gamma_j} d\gamma + \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\gamma \cdot (\bar{v}_2|_\gamma - \bar{v}_1|_\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} u|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} d\gamma &= \int_{\gamma_j} (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}) \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} d\gamma - \int_{\gamma_j} a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} d\gamma \\ &= \int_{\gamma_j} (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}) \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} d\gamma - \int_{\gamma} u|_{\gamma} \cdot a_j \chi_j^{-1} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j} (\mathcal{G}_j^{-1} y)|_{\gamma} d\gamma, \end{aligned}$$

где $\mathcal{G}_j^{-1}$ – оператор поворота на угол $-\varphi_j$ и растяжения в $1/\chi_j$ раз в плоскости $\{y\}$. Отсюда и из (2.2) следует формула (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Формула (2.1) распространяется по непрерывности на случай $u \in E_a^2(K)$, $v_j \in E_{-a+2}^2(K)$. Действительно, $C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$ плотно в $E_a^2(K)$, $C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$ плотно в $E_{-a+2}^2(K_j)$, поэтому найдутся последовательности $\{u_p\}_{p=1}^\infty \subset C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$ и $\{v_{jq}\}_{q=1}^\infty \subset C_0^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, сходящиеся к u и v в $E_a^2(K)$ и $E_{-a+2}^2(K_j)$ соответственно. При этом для функций u_p и v_{jq} справедлива формула Грина (2.1). Переходя к пределу при $p, q \rightarrow \infty$, получаем формулу Грина для функций u и v (переход к пределу возможен в силу неравенства Коши–Буняковского и леммы 1.4).

2.2. Будем обозначать через $(\cdot, \cdot)_{\beta_1}$, $(\cdot, \cdot)_{\beta_2}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ скалярные произведения в $L_2(b_1, b)$, $L_2(b, b_2)$, $\mathbb{C}$ соответственно. Аналогично теореме 2.1 доказывается

ТЕОРЕМА 2.2. Для любых $\tilde{U} \in C^\infty([b_1, b_2])$, $\tilde{V}_1 \in C^\infty([b_1, b])$, $\tilde{V}_2 \in C^\infty([b, b_2])$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место формула Грина с параметром λ :

$$\begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \tilde{U} - \lambda^2 \tilde{U}, \tilde{V}_j \right)_{\beta_j} + \sum_j \left(\tilde{U}|_{\varphi=b_j} + a_j e^{i\lambda \ln \chi_j} \tilde{U}(\varphi + \varphi_j)|_{\varphi=b_j}, (-1)^j \frac{d\tilde{V}_j}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b_j} \right)_{\mathbb{C}} \\ &\quad + \left(\tilde{U}|_{\varphi=b}, \frac{d\tilde{V}_1}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b} - \frac{d\tilde{V}_2}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b} - \sum_k (-1)^k \bar{a}_k e^{-i\bar{\lambda} \ln \chi_k} \frac{d\tilde{V}_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b} \right)_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_j \left(\tilde{U}, \frac{d^2}{d\varphi^2} \tilde{V}_j - \bar{\lambda}^2 \tilde{V}_j \right)_{\beta_j} + \sum_j \left((-1)^j \frac{d\tilde{U}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b_j}, \tilde{V}_j|_{\varphi=b_j} \right)_{\mathbb{C}} \\ &\quad + \left(-\frac{d\tilde{U}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b}, \tilde{V}_2|_{\varphi=b} - \tilde{V}_1|_{\varphi=b} \right)_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Формула (2.3) распространяется по непрерывности на случай $\tilde{U} \in W^2(b_1, b_2)$, $\tilde{V}_1 \in W^2(b_1, b)$, $\tilde{V}_2 \in W^2(b, b_2)$ (см. замечание 2.2 [11, гл. 2]).

3. Постановка нелокальных эллиптических задач трансмиссии

3.1. Формула (2.1) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (1.6), (1.7):

$$\Delta v_j(y) - v_j(y) = f_j(y), \quad y \in K_j, \quad (3.1)$$

$$v_j|_{\gamma_j} = g_j(y), \quad y \in \gamma_j,$$

$$v_2|_{\gamma} - v_1|_{\gamma} = h_1(y), \quad \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_{\gamma} = h_2(y), \quad y \in \gamma. \quad (3.2)$$

Задачу (3.1), (3.2) назовем *нелокальной задачей трансмиссии* в плоском угле K .

Положим

$$\mathcal{E}_{-a+2}^0(K, \gamma) = E_{-a+2}^0(K) \times \prod_j E_{-a+2}^{3/2}(\gamma_j) \times \prod_\nu E_{-a+2}^{3/2-\nu}(\gamma);$$

здесь и далее $\nu = 0, 1$. Обозначим также

$$\mathcal{E}_{-a+2}^2(K) = \bigoplus_j E_{-a+2}^2(K_j).$$

Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{M}_K: \mathcal{E}_{-a+2}^2(K) \rightarrow \mathcal{E}_{-a+2}^0(K, \gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{M}_K v = \left\{ w - v, v_j|_{\gamma_j}, v_2|_\gamma - v_1|_\gamma, \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_\gamma - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma \right\}.$$

Здесь и далее v_j есть сужение функции $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$ на K_j , $w \equiv \Delta v_j$ при $y \in K_j$. (Отметим, что мы не можем считать $w \equiv \Delta v$ при $y \in K$, так как функция $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$ может иметь “разрыв” на γ .)

ЛЕММА 3.1. *Для любых $g_j \in E_{-a+2}^{3/2}(\gamma_j)$ и $h_\nu \in E_{-a+2}^{3/2-\nu}(\gamma)$ существует функция $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$, удовлетворяющая условиям (3.2) и такая, что*

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)} \leq c \left(\sum_j \|g_j\|_{E_{-a+2}^{3/2}(\gamma_j)} + \sum_\nu \|h_\nu\|_{E_{-a+2}^{3/2-\nu}(\gamma)} \right),$$

где $c > 0$ не зависит от g_j и h_ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1' [6] существуют $w_j \in E_{-a+2}^2(K_j)$ такие, что

$$w_j|_{\gamma_j} = g_j(y), \quad y \in \gamma_j, \quad (3.3)$$

$$\|w_j\|_{E_{-a+2}^2(K_j)} \leq k_1 \|g_j\|_{E_{-a+2}^{3/2}(\gamma_j)}. \quad (3.4)$$

Повторяя доказательство леммы 3.1' [6], построим $\hat{w}_2 \in E_{-a+2}^2(K_2)$ такую, что

$$\hat{w}_2|_\gamma = h_1(y), \quad \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial n} \Big|_\gamma = h_2(y) + \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial w_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma, \quad y \in \gamma, \quad (3.5)$$

$$\|\hat{w}_2\|_{E_{-a+2}^2(K_2)} \leq k_2 \left(\|h_1\|_{E_{-a+2}^{3/2}(\gamma)} + \left\| h_2 + \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial w_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma \right\|_{E_{-a+2}^{1/2}(\gamma)} \right). \quad (3.6)$$

Введем функции $\zeta, \zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| < \varepsilon/2$, $\zeta_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| > \varepsilon$; $\zeta(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| < \varepsilon/2$, $\zeta(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| > \varepsilon$. Здесь $\varepsilon = \min_j \{|b - b_j|\}/4$. Функции ζ, ζ_j являются мультипликаторами в пространствах $E_{-a+2}^2(K_j)$. Отсюда и из (3.3)–(3.6) следует, что функция v такая, что $v = v_1 = \zeta_1 w_1$ при $y \in K_1$, $v = v_2 = \zeta_2 w_2 + \zeta \hat{w}_2$ при $y \in K_2$, удовлетворяет условиям леммы.

3.2. Обозначим

$$\mathcal{W}^2(b_1, b_2) = W^2(b_1, b) \oplus W^2(b, b_2).$$

Аналогично разделу 1 для задачи (3.1), (3.2) рассмотрим модельную оператор-функцию $\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda): \mathcal{W}^2(b_1, b_2) \rightarrow \mathcal{W}^0[b_1, b_2] = L_2(b_1, b_2) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, определенную по формуле

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)\widetilde{V} = & \left\{ \widetilde{W}(\varphi) - \lambda^2 \widetilde{V}(\varphi), \widetilde{V}_j(\varphi)|_{\varphi=b_j}, \widetilde{V}_2(\varphi)|_{\varphi=b} - \widetilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b}, \right. \\ & \left. \frac{d\widetilde{V}_1}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b} - \frac{d\widetilde{V}_2}{d\varphi} \Big|_{\varphi=b} - \sum_k (-1)^k \widetilde{a}_k e^{-i\lambda \ln \chi_k} \frac{d\widetilde{V}_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{V}_j$ есть сужение функции $\widetilde{V} \in \mathcal{W}^2(b_1, b_2)$ на K_j , $\widetilde{W}(\varphi) \equiv (d^2/d\varphi^2)\widetilde{V}_1(\varphi)$ при $\varphi \in (b_1, b)$, $\widetilde{W}(\varphi) \equiv (d^2/d\varphi^2)\widetilde{V}_2(\varphi)$ при $\varphi \in (b, b_2)$. Установим некоторые свойства оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)$. Введем в гильбертовых пространствах $\mathcal{W}^2(b_1, b_2)$ и $\mathcal{W}^0[b_1, b_2]$ эквивалентные нормы, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq 1$:

$$\begin{aligned} |||\widetilde{V}|||_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)} &= (||\widetilde{V}||_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)}^2 + |\lambda|^4 ||\widetilde{V}||_{L_2(b_1, b_2)}^2)^{1/2}, \\ |||\{\widetilde{F}, \widetilde{G}_j, \widetilde{H}_\nu\}|||_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]} &= \left(||\widetilde{F}||_{L_2(b_1, b_2)}^2 + \sum_j |\lambda|^3 |\widetilde{G}_j|^2 + \sum_\nu |\lambda|^{3-2\nu} |\widetilde{H}_\nu|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ фредгольмов, $\text{ind } \widetilde{\mathcal{M}}(\lambda) = 0$; для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 1$ такое, что для $\lambda \in J_{h, q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda = h, |\text{Re } \lambda| \geq q_0\}$ оператор $\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda): \mathcal{W}^0[b_1, b_2] \rightarrow \mathcal{W}^2(b_1, b_2)$ и

$$|||\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)\widetilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)} \leq c |||\widetilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]} \quad (3.7)$$

для всех $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{W}^0[b_1, b_2]$, где $c > 0$ не зависит от λ и $\widetilde{\Phi}$; оператор-функция $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda): \mathcal{W}^0[b_1, b_2] \rightarrow \mathcal{W}^2(b_1, b_2)$ конечномероморфна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $a_j = 0$, т.е. когда отсутствуют операторы, соответствующие нелокальным членам, обозначим $\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_0(\lambda)$. Следуя схеме, разработанной Аграновичем и Вишиком в работе [10], можно показать, что существуют такие $0 < \varepsilon_1 < \pi/2$ и $q_1 > 1$, что при

$$\lambda \in Q_{\varepsilon_1, q_1} = \{\lambda: |\lambda| \geq q_1, |\arg \lambda| \leq \varepsilon_1\} \cup \{\lambda: |\lambda| \geq q_1, |\arg \lambda - \pi| \leq \varepsilon_1\}$$

существует обратный оператор $\widetilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)$; при этом справедлива оценка

$$|||\widetilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)\widetilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)} \leq k_1 |||\widetilde{\Phi}|||_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]} \quad (3.8)$$

для всех $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{W}^0[b_1, b_2]$, где $k_1 > 0$ не зависит от λ и $\widetilde{\Phi}$.

Введем оператор $\mathcal{M}_t(\lambda) = \widetilde{\mathcal{M}}_0(\lambda) + t(\widetilde{\mathcal{M}}(\lambda) - \widetilde{\mathcal{M}}_0(\lambda))$, $0 \leq t \leq 1$. Докажем, что для любого $h \in \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что при $\lambda \in J_{h, q_0}$ и $0 \leq t \leq 1$

$$k_2 |||\mathcal{M}_t(\lambda)\widetilde{V}|||_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]} \leq |||\widetilde{V}|||_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)} \leq k_3 |||\mathcal{M}_t(\lambda)\widetilde{V}|||_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]} \quad (3.9)$$

для всех $\tilde{V} \in \mathcal{W}^2(b_1, b_2)$, где $k_2, k_3 > 0$ не зависят от λ, t и V .

Обозначим $\tilde{\mathcal{M}}_t(\lambda)\tilde{V} = \tilde{\Phi}$. Тогда $\tilde{\mathcal{M}}_0(\lambda)\tilde{V} = \tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}$, где

$$\tilde{\Psi} = \left(0, 0, 0, 0, t \sum_k (-1)^k \bar{a}_k e^{-i\lambda \ln \chi_k} \frac{d\tilde{V}_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b}\right).$$

В силу (3.8)

$$\|\tilde{V}\|_{\mathcal{W}^2(b_1, b_2)} \leq k_1 \|\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}\|_{\mathcal{W}^0[b_1, b_2]}. \quad (3.10)$$

Положим $\varepsilon = \min_j \{|b - b_j|\}/4$ и выберем $q_0 \geq q_1$ так, чтобы $J_{h, q_0} \subset Q_{\varepsilon_1, q_1}$. Тогда, используя неравенства (1.3), (1.4), получим

$$\begin{aligned} I_1 &= |\lambda|^{1/2} \left| \bar{a}_1 e^{-i\lambda \ln \chi_1} \frac{d\tilde{V}_1}{d\varphi}(\varphi - \varphi_1)|_{\varphi=b} \right| \\ &\leq k_4 \left\{ \left\| \frac{d\tilde{V}_1}{d\varphi} \right\|_{W^1(b_1, b_1+\varepsilon/2)} + |\lambda| \left\| \frac{d\tilde{V}_1}{d\varphi} \right\|_{L^2(b_1, b_1+\varepsilon/2)} \right\} \leq k_5 \|\tilde{V}_1\|_{W^2(b_1, b_1+\varepsilon/2)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть q_1 настолько велико, что в области Q_{ε_1, q_1} имеет место теорема 4.1 [10, гл. 1]. Тогда из неравенства (3.11) и теоремы 4.1 [10, гл. 1] при помощи формулы Лейбница и интерполяционного неравенства (1.3) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq k_5 \|\zeta_1 \tilde{V}_1\|_{W^2(b_1, b_1+\varepsilon/2)} \leq k_6 \left(\left\| \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2 \right) (\zeta_1 \tilde{V}_1) \right\|_{L_2(b_1, b)} + |\lambda|^{3/2} |\tilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b_1} \right) \\ &\leq k_7 \left(\left\| \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2 \right) \tilde{V}_1 \right\|_{L_2(b_1, b)} + |\lambda|^{-1} \|\tilde{V}_1\|_{W^2(b_1, b)} + |\lambda|^{3/2} |\tilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b_1} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где ζ_1 та же, что и в доказательстве леммы 3.1. Аналогично (3.11), (3.12) оценивается $I_2 = |\lambda|^{1/2} \left| \bar{a}_2 e^{-i\lambda \ln \chi_2} (d\tilde{V}_2/d\varphi)(\varphi - \varphi_2)|_{\varphi=b} \right|$:

$$I_2 \leq k_8 \left(\left\| \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2 \right) \tilde{V}_2 \right\|_{L_2(b, b_2)} + |\lambda|^{-1} \|\tilde{V}_2\|_{W^2(b, b_2)} + |\lambda|^{3/2} |\tilde{V}_2(\varphi)|_{\varphi=b_2} \right). \quad (3.13)$$

Считая, что q_0 достаточно велико, из (3.10), (3.12), (3.13) получим правую часть неравенства (3.9). Левая часть неравенства (3.9) очевидна. Применяя стандартный метод продолжения по параметру t (см. доказательство теоремы 7.1 [12, гл. 2, § 7]), в силу неравенства (3.9) и существования обратного оператора $\tilde{\mathcal{M}}_0^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in Q_{\varepsilon_1, q_1}$ убеждаемся в том, что для $\lambda \in J_{h, q_0}$ оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ также имеет ограниченный обратный и при этом выполняется неравенство (3.7). Используя теорему 16.4 [13] об устойчивости индекса фредгольмова оператора по отношению к компактным возмущениям, нетрудно показать, что оператор $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$ фредгольмов для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\text{ind } \tilde{\mathcal{M}}(\lambda) = 0$. Отсюда, из существования $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in J_{h, q_0}$ и теоремы 1 [14] заключаем, что оператор-функция $\tilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$ конечномероморфна.

Аналогично лемме 2.2 [3] при помощи (3.10)–(3.13) доказываем

ЛЕММА 3.3. Для любого $0 < \varepsilon < 1/\max |\ln \chi_j|$ существует $q > 1$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} \lambda| \leq \varepsilon \ln |\operatorname{Re} \lambda|, |\operatorname{Re} \lambda| \geq q\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$; для каждого полюса λ_0 оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$ существует $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\operatorname{Im} \lambda - \operatorname{Im} \lambda_0| < \delta\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$.

3.3. Рассмотрим для функций v_j вспомогательную систему двух уравнений

$$\Delta v_j(y) = \hat{f}_j(y), \quad y \in K_j, \quad (3.14)$$

с краевыми условиями и нелокальными условиями трансмиссии (3.2). Введем пространство

$$\mathcal{H}_{-a+2}^0(K, \gamma) = H_{-a+2}^0(K) \times \prod_j H_{-a+2}^{3/2}(\gamma_j) \times \prod_\nu H_{-a+2}^{3/2-\nu}(\gamma).$$

Обозначим также $\mathcal{H}_{-a+2}^2(K) = \bigoplus_j H_{-a+2}^2(K_j)$.

Аналогично теореме 2.1 [3] из леммы 3.2 получим следующий результат.

ЛЕММА 3.4. Пусть прямая $\operatorname{Im} \lambda = -a + 1$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$. Тогда нелокальная задача трансмиссии (3.14), (3.2) имеет единственное решение $v \in \mathcal{H}_{-a+2}^2(K)$ для любой правой части $\{\hat{f}, g_j, h_\nu\} \in \mathcal{H}_{-a+2}^0(K, \gamma)$ и выполнена оценка

$$\|v\|_{\mathcal{H}_{-a+2}^2(K)} \leq c \|\{\hat{f}, g_j, h_\nu\}\|_{\mathcal{H}_{-a+2}^0(K, \gamma)},$$

где $c > 0$ не зависит от $\{\hat{f}, g_j, h_\nu\}$; $v(y) \equiv v_j(y)$, $\hat{f}(y) \equiv \hat{f}_j(y)$ при $y \in K_j$.

Лемма 3.4 понадобится в разделе 4 при выводе априорных оценок решений задачи (3.1), (3.2).

4. Априорные оценки решений нелокальных эллиптических задач

4.1. Введем множество

$$\Gamma = \{x = (y, z): r > 0, \varphi = b, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Множество Γ является носителем нелокальных данных в задаче (1.1), (1.2). Обозначим

$$\Omega_1 = \{x = (y, z): r > 0, b_1 < \varphi < b, z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$

$$\Omega_2 = \{x = (y, z): r > 0, b < \varphi < b_2, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Пусть n_j есть нормаль к Γ_j , направленная вне области Ω_j , n — нормаль к Γ , направленная вне области Ω_2 . Положим $d_1 = \min\{1, \chi_j^{-1}\}/2$, $d_2 = 2 \max\{1, \chi_j^{-1}\}$;

$$\Omega_j^p = \Omega_j \cap \{x = (y, z): r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p}, |z| < 2^{-p-1}\},$$

$$\Omega^p = \Omega \cap \{x = (y, z): r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p}, |z| < 2^{-p-1}\},$$

где $p = 0, \dots, 3$; $0 < r_1 < r_2$.

Обозначим

$$\mathcal{W}^2(\Omega^p) = \bigoplus_j W^2(\Omega_j^p).$$

Пусть V_j есть сужение $V \in \mathcal{W}^2(\Omega^p)$ на Ω_j^p .

ЛЕММА 4.1. Для всех $V \in \mathcal{W}^2(\Omega^0)$ и $|\lambda| \geq 1$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|V\|_{\mathcal{W}^2(\Omega^3)} \leq & c \left(\sum_j \|\Delta V_j\|_{W^2(\Omega_j^0)} + \sum_j \|V_j|_{\Gamma_j}\|_{W^{3/2}(\Gamma_j \cap \bar{\Omega}^0)} \right. \\ & + \|V_2|_{\Gamma} - V_1|_{\Gamma}\|_{W^{3/2}(\Gamma \cap \bar{\Omega}^0)} \\ & + \left\| \frac{\partial V_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial V_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial V_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y, z) \Big|_{\Gamma} \right\|_{W^{1/2}(\Gamma \cap \bar{\Omega}^0)} \\ & \left. + |\lambda|^{-1} \|V\|_{\mathcal{W}^2(\Omega^0)} + |\lambda| \|V\|_{L_2(\Omega^0)} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $c > 0$ не зависит от λ и V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 [15] следует априорная оценка

$$\begin{aligned} \|V\|_{\mathcal{W}^2(\Omega^3)} \leq & k_1 \left(\sum_j \|\Delta V_j\|_{W^2(\Omega_j^2)} + \sum_j \|V_j|_{\Gamma_j}\|_{W^{3/2}(\Gamma_j \cap \bar{\Omega}^2)} \right. \\ & \left. + \|V_2|_{\Gamma} - V_1|_{\Gamma}\|_{W^{3/2}(\Gamma \cap \bar{\Omega}^2)} + \left\| \frac{\partial V_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial V_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right\|_{W^{1/2}(\Gamma \cap \bar{\Omega}^2)} + \|V\|_{L_2(\Omega^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим

$$W = \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial(\zeta_k V_k)}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y, z),$$

где ζ_k те же, что и в доказательстве леммы 3.1. Очевидно,

$$W|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}^2} = \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial V_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y, z)|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}^2}. \quad (4.3)$$

Применяя теорему 5.1 [11, гл. 2], формулу Лейбница и неравенство (1.3), получим

$$\begin{aligned} \|W|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}^2}\|_{W^{1/2}(\Gamma \cap \bar{\Omega}^2)} & \leq k_2 \sum_k \|\zeta_k V_k\|_{W^2(\Omega_k^1)} \\ & \leq k_3 \sum_k \{ \|\Delta V_k\|_{L_2(\Omega_k^0)} + \|V_k|_{\Gamma_k}\|_{W^{3/2}(\Gamma_k \cap \bar{\Omega}_k^0)} + |\lambda|^{-1} \|V_k\|_{W^2(\Omega_k^0)} + |\lambda| \|V_k\|_{L_2(\Omega_k^0)} \}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.2)–(4.4) следует неравенство (4.1).

ЛЕММА 4.2. Пусть $v_j \in W_{\text{loc}}^2(\bar{K}_j \setminus \{0\})$ – решение нелокальной задачи трансмиссии (3.14), (3.2) такое, что $v \in H_{-a}^0(K)$, а $\{\hat{f}, g_j, h_\nu\} \in \mathcal{H}_{-a+2}^0(K, \gamma)$. Тогда $v \in \mathcal{H}_{-a+2}^2(K)$, при этом

$$\|v\|_{\mathcal{H}_{-a+2}^2(K)} \leq c(\|\{\hat{f}, g_j, h_\nu\}\|_{\mathcal{H}_{-a+2}^0(K, \gamma)} + \|v\|_{H_{-a}^0(K)}), \quad (4.5)$$

где $c > 0$ не зависит от v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 3.2 [3] доказательство леммы 4.2 следует из леммы 3.1 и аналога леммы 4.1 при $n = 2$.

4.2. Пусть

$$\begin{aligned} K_j^{ps} &= K_j \cap \{r_1 d_1^{3-p} \cdot 2^s < r < r_2 d_2^{3-p} \cdot 2^s\}, \\ K^{ps} &= K \cap \{r_1 d_1^{3-p} \cdot 2^s < r < r_2 d_2^{3-p} \cdot 2^s\}, \end{aligned}$$

где $0 < r_1 < r_2$; $s \geq 1$; $p = 0, \dots, 3$.

Обозначим

$$\mathcal{W}^2(K^{ps}) = \bigoplus_j W^2(K_j^{ps}).$$

Пусть v_j есть сужение $v \in \mathcal{W}^2(K^{ps})$ на K_j^{ps} .

ЛЕММА 4.3. Пусть $s \geq 1$. Предположим, что $v \in \mathcal{W}^2(K^{0s})$,

$$\begin{aligned} v_j|_{\gamma_j} &= 0, \quad y \in \gamma_j \cap \overline{K_j^{0s}}, \quad v_2|_{\gamma} - v_1|_{\gamma} = 0, \quad y \in \gamma \cap K^{0s}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_{\gamma} &= 0, \quad y \in \gamma \cap K^{0s}. \end{aligned}$$

Тогда для $|\lambda| \geq 1$

$$\begin{aligned} 2^{s(-a+2)} \|v\|_{\mathcal{W}^2(K^{3s})} &\leq c \left(2^{s(-a+2)} \sum_j \|\Delta v_j - v_j\|_{L_2(K_j^{0s})} + |\lambda|^{-1} 2^{s(-a+2)} \|v\|_{\mathcal{W}^2(K^{0s})} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda| 2^{s(-a)} \|v\|_{L_2(K^{0s})} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $c > 0$ не зависит от v , λ и s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 3.3 [3] лемма 4.3 доказывается путем подстановки функции $V(y, z) = e^{i \cdot 2^s(\theta, z)} v(y)$, $\theta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $|\theta| = 1$, в неравенство (4.1), последующей замены переменных $y' = 2^s y$ и умножения обеих частей полученного неравенства на $2^{s(-a)}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $v_j \in W_{\text{loc}}^2(\overline{K_j} \setminus \{0\})$ – решение задачи (3.1), (3.2) такое, что $v \in E_{-a}^0(K)$, $\{f, g_j, h_\nu\} \in \mathcal{E}_{-a+2}^0(K, \gamma)$. Тогда $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$, при этом

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)} \leq c(\|f, g_j, h_\nu\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^0(K, \gamma)} + \|v\|_{E_{-a}^0(K)}), \quad (4.7)$$

где $c > 0$ не зависит от v ; $v(y) \equiv v_j(y)$, $f(y) \equiv f_j(y)$ при $y \in K_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно лемме 3.1 достаточно рассмотреть случай $\{g_j, h_\nu\} = 0$. Пусть $r_1 = d_1, r_2 = d_2$. Тогда

$$\begin{aligned} K_j^{ps} &= K_j \cap \{d_1^{4-p} \cdot 2^s < r < d_2^{4-p} \cdot 2^s\}, \\ K^{ps} &= K \cap \{d_1^{4-p} \cdot 2^s < r < d_2^{4-p} \cdot 2^s\}, \end{aligned}$$

где $s \geq 1; p = 0, \dots, 3$. Обозначим также $K_j^{30} = K_j \cap \{r < d_2\}$. Введем функции $\psi, \hat{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(r) = 1$ при $r < d_2$, $\psi(r) = 0$ при $r > 2d_2$; $\hat{\psi}(r) = 1$ при $r < 2d_2^2$, $\hat{\psi}(r) = 0$ при $r > 3d_2^2$.

По лемме 4.2

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K_j^{30})} \leq k_1 \|\psi v\|_{\mathcal{H}_{-a+2}^2(K)} \leq k_2 \left(\sum_j \|\Delta(\psi v_j)\|_{H_{-a+2}^0(K_j)} + \|\psi v\|_{H_{-a}^0(K)} \right). \quad (4.8)$$

Оценим $\|\Delta(\psi v_j)\|_{H_{-a+2}^0(K_j)}$. Используя формулу Лейбница и ограничение на носители функций $\psi, \hat{\psi}$, получим

$$\begin{aligned} \|\Delta(\psi v_j)\|_{H_{-a+2}^0(K_j)} &\leq \|\Delta(\psi v_j) - \psi v_j\|_{H_{-a+2}^0(K_j)} + \|\psi v_j\|_{H_{-a+2}^0(K_j)} \\ &\leq k_3 (\|\Delta v_j - v_j\|_{E_{-a+2}^0(K_j)} + \|\hat{\psi} v_j\|_{H_{-a+1}^1(K_j)}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Неравенства (4.8), (4.9) и интерполяционное неравенство (1.5) дают

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K^{30})} \leq k_4 \left(\sum_j \|f_j\|_{E_{-a+2}^0(K_j)} + |\lambda|^{-1} \|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)} + |\lambda| \|v\|_{E_{-a}^0(K)} \right). \quad (4.10)$$

2) В силу леммы 4.3 при $s \geq 1$

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K^{3s})} \leq k_5 \left(\sum_j \|f_j\|_{E_{-a+2}^0(K_j^{0s})} + |\lambda|^{-1} \|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K^{0s})} + |\lambda| \|v\|_{E_{-a}^0(K^{0s})} \right). \quad (4.11)$$

Складывая (4.10) и (4.11) для $s \geq 1$, при достаточно больших $|\lambda|$ получим (4.7).

Аналогично теореме 3.1 [3.1] из лемм 3.1, 3.4 и 4.3 выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = -a + 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$. Тогда для $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$ выполнена оценка

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)} \leq c (\|\mathcal{M}_K v\|_{\mathcal{E}_{-a+2}^0(K, \gamma)} + \|v\|_{L_2(K \cap S')}), \quad (4.12)$$

где $S' = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < R'_1 < r < R'_2\}$; $c > 0$ не зависит от v .

Обратно, если для всех $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$ имеет место оценка (4.12), то на прямой $\text{Im } \lambda = -a + 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$.

Из теоремы 4.2 следует, что $\mathcal{M}_K$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ. Отметим, что это утверждение не следует из оценки (4.7) (справедливой, даже если на прямой $\text{Im } \lambda = -a + 1$ есть полюсы $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$), так как вложение $\mathcal{E}_{-a+2}^2(K) \subset E_{-a}^0(K)$ непрерывно, но не компактно.

Далее будет установлена связь между ядрами операторов $\mathcal{M}_K$ и $\mathcal{L}_K^*$ ($\mathcal{L}_K^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}_K$). Для изучения оператора $\mathcal{L}_K^*$ нам понадобится утверждение об априорных оценках и гладкости решений одной вспомогательной задачи. Сформулируем это утверждение в следующем пункте.

4.3. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathcal{L}: W^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{3/2}(\mathbb{R}^1),$$

действующий по формуле

$$\mathcal{L}U = (\Delta U, U|_{x_2=0}, U|_{x_2=0}).$$

Отметим, что задача, соответствующая оператору $\mathcal{L}$, носит искусственный характер: это не краевая задача (так как решение U ищется во всем $\mathbb{R}^2$) и не задача трансмиссии (так как на прямой $\{x_2 = 0\}$ задаются не условия сопряжения, а след функции U , да к тому же дважды). Однако при выводе априорных оценок для решений сопряженных нелокальных задач – в следующем пункте – мы столкнемся с задачей именно такого типа, что объясняется спецификой используемого метода “отделения нелокальностей”.

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}^*: L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2}(\mathbb{R}^1) \rightarrow W^{-2}(\mathbb{R}^2),$$

сопряженный к $\mathcal{L}$. Оператор $\mathcal{L}^*$ действует на $\{f, g_j\} \in L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2}(\mathbb{R}^1)$ по формуле

$$\langle U, \mathcal{L}^*\{f, g_j\} \rangle = (\Delta U, f)_{\mathbb{R}^2} + \sum_j \langle U|_{x_2=0}, g_j \rangle_{\mathbb{R}^1} \quad \text{для любых } U \in W^2(\mathbb{R}^2),$$

где $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^1}$ обозначает полуторалинейную форму на паре пространств $W^{3/2}(\mathbb{R}^1)$, $W^{-3/2}(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}_-^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$. Для целых $l \geq 0$ введем пространство

$$\mathcal{W}^l(\mathbb{R}^2) = W^l(\mathbb{R}_+^2) \oplus W^l(\mathbb{R}_-^2).$$

ЛЕММА 4.4. При всяком целом фиксированном $l \geq 0$ если

$$\{f, g_j\} \in L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2+l}(\mathbb{R}^1), \quad \mathcal{L}^*\{f, g_j\} \in \begin{cases} W^{-2+l}(\mathbb{R}^2) & \text{при } l < 2, \\ \mathcal{W}^{-2+l}(\mathbb{R}^2) & \text{при } l \geq 2, \end{cases}$$

то $f \in \mathcal{W}^l(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|f\|_{\mathcal{W}^l(\mathbb{R}^2)} \leq c_l \left(\|\mathcal{L}^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|f\|_{W^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|g_j\|_{W^{-3/2+l}(\mathbb{R}^1)} \right), \quad (4.13)$$

где

$$\|\cdot\|_{-2+l} = \begin{cases} \|\cdot\|_{W^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \text{при } l < 2, \\ \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \text{при } l \geq 2, \end{cases}$$

$c_l > 0$ не зависят от $\{f, g_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме [11, гл. 2] (см. теоремы 4.1, 4.3 [11, гл. 2]).

Отметим, что в отличие от модельных задач во всем пространстве (см. [11, гл. 2, § 3]) в данном случае оператор $\mathcal{L}^*$ содержит распределения с носителями на прямой $\{x_2 = 0\}$. В связи с этим гладкость функции f может нарушаться на прямой $\{x_2 = 0\}$, даже если $\mathcal{L}^*\{f, g_j\}$ бесконечно гладкая в $\mathbb{R}^2$. Более того, лемма 4.4 означает, что для повышения гладкости функции f в $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ необходимо потребовать дополнительную гладкость не только от $\mathcal{L}^*\{f, g_j\}$, но и от распределений g_j .

4.4. Теперь изучим оператор, сопряженный к $\mathcal{L}_K$. Для целых $l \geq 0$ обозначим через $(E_a^l(K))^*$, $(E_a^{l+1/2}(\gamma_j))^*$ и $(E_a^{l+1/2}(\gamma))^*$ пространства, сопряженные с $E_a^l(K)$, $E_a^{l+1/2}(\gamma_j)$ и $E_a^{l+1/2}(\gamma)$ относительно скалярных произведений в $L_2(K)$, $L_2(\gamma_j)$ и $L_2(\gamma)$ соответственно. Очевидно, $(E_a^0(K))^* = E_{-a}^0(K)$.

Положим $\hat{\gamma}_j = \{y: \varphi = b_j \text{ или } \varphi = b_j + \pi\}$, $\hat{\gamma} = \{y: \varphi = b \text{ или } \varphi = b + \pi\}$. Очевидно, $\gamma_j \subset \hat{\gamma}_j$, $\gamma \subset \hat{\gamma}$. Для целых $l \geq 0$ обозначим через $W_{\overline{K}}^{-l}(\mathbb{R}^2)$, $W^{-l-1/2}(\hat{\gamma}_j)$ и $W^{-l-1/2}(\hat{\gamma})$ пространства, сопряженные с $W^l(K)$, $W^{l+1/2}(\hat{\gamma}_j)$ и $W^{l+1/2}(\hat{\gamma})$ соответственно.

Введем функции $\psi_p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что $\psi_p(y) = 1$ при $r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p}$, $\psi_p(y) = 0$ при $r < 2r_1 d_1^{3-p}/3$ и $r > 3r_2 d_2^{3-p}/2$. Здесь $0 < r_1 < r_2$; $p = 0, \dots, 3$.

Для $g_j \in (E_a^{l+1/2}(\gamma_j))^*$ обозначим через $\psi_p g_j$ распределение из $W^{-l-1/2}(\hat{\gamma}_j)$, определяемое соотношением $\langle u_{\hat{\gamma}_j}, \psi_p g_j \rangle_{\hat{\gamma}_j} = \langle \psi_p u_{\hat{\gamma}_j}, g_j \rangle_{\gamma_j}$ для всех $u_{\hat{\gamma}_j} \in W^{l+1/2}(\hat{\gamma}_j)$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\gamma}_j}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma_j}$ — полуторалинейные формы на дуальных парах $W^{l+1/2}(\hat{\gamma}_j)$, $W^{-l-1/2}(\hat{\gamma}_j)$ и $E^{l+1/2}(\gamma_j)$, $E^{-l-1/2}(\gamma_j)$ соответственно. Аналогично, для $g \in (E_a^{l+1/2}(\gamma))^*$ вводится распределение $\psi_p g_j \in W^{-l-1/2}(\hat{\gamma})$.

Для оператора $\mathcal{L}_K: E_a^2(K) \rightarrow E_a^0(K, \gamma)$, введенного в разделе 1, рассмотрим сопряженный оператор

$$\mathcal{L}_K^*: (E_a^0(K, \gamma))^* \rightarrow (E_a^2(K))^*, \quad \text{где } (E_a^0(K, \gamma))^* = E_{-a}^0(K) \times \prod_j (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*.$$

Оператор $\mathcal{L}_K^*$ действует на $\{f, g_j\} \in (E_a^0(K, \gamma))^*$ для любых $u \in E_a^2(K)$ по формуле

$$\langle u, \mathcal{L}_K^*\{f, g_j\} \rangle = (\Delta u - u, f)_K + \sum_j \langle u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, g_j \rangle_{\gamma_j}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_K$ обозначает скалярное произведение в $L_2(K)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma_j}$ обозначают полуторалинейные формы на соответствующих дуальных парах пространств.

Для целых $l \geq 0$ положим $\mathcal{W}^l(K) = \bigoplus_j W^l(K_j)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\{f, g_j\} \in (E_a^0(K, \gamma))^*$, $\mathcal{L}_K^*\{f, g_j\} \in (E_a^2(K))^*$. Тогда при всяком целом фиксированном $l \geq 0$ если

$$\psi_0 \mathcal{L}_K^*\{f, g_j\} \in \begin{cases} W_{\overline{K}}^{-2+l}(\mathbb{R}^2) & \text{при } l < 2, \\ \mathcal{W}^{-2+l}(K) & \text{при } l \geq 2, \end{cases}$$

то $\psi_3\{f, g_j\} \in \mathcal{W}^l(K) \times \prod_j W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j)$ и

$$\begin{aligned} & \|\psi_3\{f, g_j\}\|_{\mathcal{W}^l(K) \times \prod_j W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j)} \\ & \leq c_l (\|\psi_0 \mathcal{L}_K^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0\{f, g_j\}\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-5/2}(\hat{\gamma}_j)}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\|\cdot\|_{-2+l} = \begin{cases} \|\cdot\|_{W_{\overline{K}}^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \text{при } l < 2, \\ \|\cdot\|_{W^{-2+l}(K)} & \text{при } l \geq 2, \end{cases}$$

$c_l > 0$ не зависит от $\{f, g_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Введем оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^*: E_{-a}^0(K) \times \prod_j \{(E_a^{3/2}(\gamma_j))^* \times (E_a^{3/2}(\gamma))^*\} \rightarrow (E_a^2(K))^*,$$

действующий на $\{f, g_j, g'_j\} \in E_{-a}^0(K) \times \prod_j \{(E_a^{3/2}(\gamma_j))^* \times (E_a^{3/2}(\gamma))^*\}$ для любых $u \in E_a^2(K)$ по формуле

$$\langle u, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^* \{f, g_j, g'_j\} \rangle = (\Delta u - u, f)_K + \sum_j \{\langle u|_{\gamma_j}, g_j \rangle_{\gamma_j} + \langle a_j u|_{\gamma}, g'_j \rangle_{\gamma}\}.$$

Для $g_j \in (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$ определим распределение $g_j^{\mathcal{G}} \in (E_a^{3/2}(\gamma))^*$ соотношением

$$\langle u_{\gamma}, g_j^{\mathcal{G}} \rangle_{\gamma} = \langle u_{\gamma}(\mathcal{G}_j \cdot), g_j \rangle_{\gamma_j} \quad \text{для всех } u_{\gamma} \in E_a^{3/2}(\gamma).$$

Заметим, что $\psi_p g_j^{\mathcal{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})$ тогда и только тогда, когда $\psi_p(\mathcal{G}_j \cdot) g_j \in W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j)$; при этом существуют константы $k_1, k_2 > 0$ (зависящие от l) такие, что

$$k_1 \|\psi_p(\mathcal{G}_j \cdot) g_j\|_{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j)} \leq \|\psi_p g_j^{\mathcal{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})} \leq k_2 \|\psi_p(\mathcal{G}_j \cdot) g_j\|_{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j)}. \quad (4.15)$$

Из определения операторов $\mathcal{L}_K^*$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^*$ следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^* \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\} = \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}. \quad (4.16)$$

2) Пусть $\varepsilon, \zeta, \zeta_j$ обозначают то же, что и в доказательстве леммы 3.1. Введем функции $\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}, \bar{\zeta}_j, \bar{\zeta} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\hat{\zeta}_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| < 3\varepsilon/2$, $\hat{\zeta}_j(\varphi) = 0$ для $|b_j - \varphi| > 2\varepsilon$; $\hat{\zeta}(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| < 3\varepsilon/2$, $\hat{\zeta}(\varphi) = 0$ для $|b - \varphi| > 2\varepsilon$; $\bar{\zeta}_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| < \varepsilon/8$, $\bar{\zeta}_j(\varphi) = 0$ для $|b_j - \varphi| > \varepsilon/4$; $\bar{\zeta}(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| < \varepsilon/8$, $\bar{\zeta}(\varphi) = 0$ для $|b - \varphi| > \varepsilon/4$.

Носитель функции ζ_i не пересекается с γ и γ_k при $k \neq i$, поэтому $\psi_p \zeta_i g_k = 0$, $\psi_p \zeta_i g_j^{\mathcal{G}} = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^* (\psi_p \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}) \rangle = (\psi_p \zeta_i \Delta u - \psi_p \zeta_i u, f)_K + \langle (\psi_p \zeta_i u)|_{\gamma_i}, g_i \rangle_{\gamma_i}.$$

Поскольку замена переменных типа поворота переводит оператор Лапласа в оператор Лапласа и сохраняет принадлежность функций соответствующим пространствам Соболева, мы можем воспользоваться теоремой 4.3 [11, гл. 2]¹. Отсюда, из соотношения (4.16) и формулы Лейбница следует, что

$$\begin{aligned} \psi_1 \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\} &\in W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}, \\ \|\psi_1 \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}\|_{W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}} &\leq k_3 (\|\psi_0 \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0 \hat{\zeta}_i f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\psi_0 g_i\|_{W^{-5/2}(\hat{\gamma}_i)}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

¹В теореме 4.3 [11, гл. 2] рассматриваются операторы с переменными коэффициентами, из-за чего накладываются дополнительные ограничения на носители рассматриваемых функций. Однако легко видеть, что в случае операторов с постоянными коэффициентами эти ограничения могут быть сняты.

Отсюда, в частности, при помощи (4.15) получим, что $\psi_2 g_i^{\mathcal{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})$ и

$$\|\psi_2 g_i^{\mathcal{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})} \leq k_4 (\|\psi_0 \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0 \hat{\zeta} f\|_{W_{\bar{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\psi_0 g_i\|_{W^{-5/2}(\hat{\gamma}_i)}). \quad (4.18)$$

3) Носитель функции ζ не пересекается с γ_j , поэтому $\psi_p \zeta g_j = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^* (\psi_p \zeta \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}) \rangle = (\psi_p \zeta \Delta u - \psi_p \zeta u, f)_K + \sum_k \langle (\psi_p \zeta u)|_{\gamma}, g_k^{\mathcal{G}} \rangle_{\gamma}.$$

Таким образом, учитывая свойства носителей функций ψ_p и ζ , оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^*$, действующий на $\psi_p \zeta \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}$, можно трактовать как сопряженный к оператору задачи

$$\Delta u - u = \hat{f}(y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{\hat{\gamma}} = \hat{g}_1(y), \quad u|_{\hat{\gamma}} = \hat{g}_2(y), \quad y \in \hat{\gamma},$$

которая (после соответствующей замены переменных типа поворота) совпадает с точностью до младшего члена u с задачей п. 3 данного раздела. По доказанному выше $\psi_2 g_k^{\mathcal{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})$; поэтому мы можем воспользоваться леммой 4.4. Тогда из соотношения (4.16) и формулы Лейбница получим

$$\begin{aligned} \psi_3 \zeta \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\} &\in \mathcal{W}^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}, \\ \|\psi_3 \zeta \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}\|_{\mathcal{W}^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}} &\leq k_5 \left(\|\psi_2 \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_2 \hat{\zeta} f\|_{W_{\bar{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|\psi_2 g_j^{\mathcal{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Отметим, что именно здесь возникает пространство $\mathcal{W}^l(K)$, т.е. гладкость функции f нарушается на луче γ . Это происходит из-за наличия нелокальных членов в краевом условии (1.7) и, как следствие, в сопряженном операторе $\mathcal{L}_K^*$.

Из неравенств (4.19) и (4.18) имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_3 \zeta \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}\|_{\mathcal{W}^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}} &\leq k_6 \left(\|\psi_0 \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0 \hat{\zeta} f\|_{W_{\bar{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|\psi_0 g_j\|_{W^{-5/2}(\hat{\gamma}_j)} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

4) Носитель функции $\zeta_0 = 1 - \sum_i \zeta_i - \zeta$ не пересекается с γ_j и γ , поэтому $\psi_p \zeta_0 g_j = 0$, $\psi_p \zeta_0 g_j^{\mathcal{G}} = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^* (\psi_p \zeta_0 \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}) \rangle = (\psi_p \zeta_0 \Delta u - \psi_p \zeta_0 u, f)_K.$$

Из теоремы 3.1 [11, гл. 2], соотношения (4.16) и формулы Лейбница получим

$$\begin{aligned} \psi_1 \zeta_0 \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\} &\in W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}, \\ \|\psi_1 \zeta_0 \{f, g_j, g_j^{\mathcal{G}}\}\|_{W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat{\gamma}_j) \times W^{-3/2+l}(\hat{\gamma})\}} &\leq k_7 (\|\psi_0 \mathcal{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0 \bar{\zeta}_0 f\|_{W_{\bar{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $\bar{\zeta}_0 = 1 - \sum_i \bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}$.

Теперь априорная оценка (4.14) вытекает из неравенств (4.17), (4.20) и (4.21).

5. Разрешимость нелокальных эллиптических краевых задач

В данном разделе собраны основные результаты о разрешимости нелокальных задач в плоских и двугранных углах (теоремы 5.1–5.3).

5.1. Прежде всего установим связь между ядрами операторов $\mathcal{L}_K^*$ и $\mathcal{M}_K$.

ЛЕММА 5.1. *Ядро $\ker(\mathcal{L}_K^*)$ оператора $\mathcal{L}_K^*$ совпадает с множеством, которое пробегает элемент $\{v, (\partial v_j / \partial n_j)|_{\gamma_j}\}$, когда $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ и удовлетворяет задаче (3.1), (3.2) при $\{f, g_j, h_\nu\} = 0$. Здесь $v(y) \equiv v_j(y)$, $f(y) \equiv f_j(y)$ при $y \in K_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $v \in \mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ и удовлетворяет задаче (3.1), (3.2) при $\{f, g_j, h_\nu\} = 0$. Тогда для любой $u \in C_0^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ в силу теоремы 2.1

$$\sum_{j=1} (\Delta u - u, v_j)_{K_j} + \sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} = 0. \quad (5.1)$$

Из непрерывности оператора вложения $\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$ в $E_{-a}^0(K)$ следует, что $v \in E_{-a}^0(K)$. Кроме того, по неравенству Коши–Буняковского и теореме 1.4

$$\begin{aligned} \left| \left(u|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} \right|^2 &\leq k_1 \int_{\gamma_j} r^{2(a-3/2)} |u_{\gamma_j}|^2 d\gamma \cdot \int_{\gamma_j} r^{2(-a+3/2)} \left| \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right|^2 d\gamma \\ &\leq k_2 \|u_{\gamma_j}\|_{E_a^{3/2}(\gamma_j)}^2 \cdot \left\| \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right\|_{E_{-a+2}^{1/2}(\gamma_j)}^2 \end{aligned}$$

для всех $u_{\gamma_j} \in E_a^{3/2}(\gamma_j)$. Следовательно, $(\partial v_j / \partial n_j)|_{\gamma_j} \in (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$.

Таким образом,

$$\left\{ v, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right\} \in E_{-a}^0(K) \times \prod_j (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$$

и в силу определения оператора $\mathcal{L}_K^*$ и тождества (5.1)

$$\left\langle u, \mathcal{L}_K^* \left\{ v, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} \right\} \right\rangle = 0 \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\}).$$

Но $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ плотно в $E_a^2(K)$, следовательно, $\{v, (\partial v_j / \partial n_j)|_{\gamma_j}\} \in \ker(\mathcal{L}_K^*)$.

2) Пусть теперь, наоборот, $\{v, \psi_j\} \in \ker(\mathcal{L}_K^*)$. Из теоремы 4.3 следует, что $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$, $\psi_j \in C^\infty(\gamma_j)$. Тогда из определения оператора $\mathcal{L}_K^*$ вытекает, что для любого $u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$

$$(\Delta u - u, v)_K = - \sum_j (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, \psi_j)_{\gamma_j},$$

что совместно с формулой Грина (2.1) дает

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} - \psi_j \right)_{\gamma_j} \\ & + \left(u|_{\gamma}, \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_{\gamma} \right)_{\gamma} \\ & = \sum_j (u, \Delta v_j - v_j)_{K_j} + \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j}, v_j|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} + \left(\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\gamma}, v_2|_{\gamma} - v_1|_{\gamma} \right)_{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Полагая $\supp u \in K_j$, из (5.2) получим, что $\Delta v_j - v_j = 0$.

В силу леммы 2.2 [11, гл. 2] для всякой системы функций $\{\Theta_{j\mu}\}_{\mu=1}^2$ из $C_0^\infty(\gamma_j)$ найдется функция $u \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$ такая, что

$$u|_{\gamma_j} = \Theta_{j1}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_j} \Big|_{\gamma_j} = \Theta_{j2}, \quad u = 0 \text{ в окрестности } \gamma.$$

Отсюда, из (5.2) и того, что $\Delta v_j - v_j = 0$, получим $(\partial v_j / \partial n_j)|_{\gamma_j} - \psi_j = 0$ и $v_j|_{\gamma_j} = 0$. Аналогично,

$$v_2|_{\gamma} - v_1|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_{\gamma} - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k} (\mathcal{G}_k^{-1} y)|_{\gamma} = 0.$$

Наконец, из того, что $v \in E_{-a}^0(K)$, $v_j \in C^\infty(\bar{K}_j \setminus \{0\})$, и теоремы 4.1 вытекает принадлежность функции v пространству $\mathcal{E}_{-a+2}^2(K)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Оператор $\mathcal{L}_K$ фредгольмов тогда и только тогда, когда на прямой $\operatorname{Im} \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\mathcal{L}_K$ фредгольмов, тогда по теореме 7.1 [13] имеет место оценка (1.11) и, следовательно, по теореме 1.1 на прямой $\operatorname{Im} \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$.

Пусть, наоборот, на прямой $\operatorname{Im} \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$. Тогда по теореме 1.1 оператор $\mathcal{L}_K$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

Докажем, что ядро оператора $\mathcal{L}_K^*$ конечномерно. Из формулы Грина (2.3), замечания 2.2 и лемм 1.5, 3.2 вытекает, что $\bar{\lambda}_0$ является полюсом оператора $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}_0$ является полюсом оператора $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$. Значит, на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -a + 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{-1}(\lambda)$. Следовательно, по теореме 4.2 оператор $\mathcal{M}_K$ имеет конечномерное ядро, размерность которого в силу леммы 5.1 совпадает с размерностью ядра оператора $\mathcal{L}_K^*$.

5.2. Перейдем к изучению разрешимости нелокальной краевой задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле. Сводя задачу (1.1), (1.2) к задаче (1.6), (1.7) с помощью преобразования Фурье по $z: U(y, z) \rightarrow \tilde{U}(y, \eta)$ и замены переменных $y' = |\eta| \cdot y$, аналогично доказательству леммы 7.3 [6] получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть на прямой $\operatorname{Im} \lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)$ и $\dim \ker \mathcal{L}_K = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_K) = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_\Omega$ есть изоморфизм.

Используя формулу Грина для нелокальной задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле Ω , аналогичную формуле Грина (2.1) для задачи (1.6), (1.7) в плоском угле K , и повторяя рассуждения работы [6, § 8], получим следующее необходимое условие фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_\Omega$.

ТЕОРЕМА 5.3. Если оператор $\mathcal{L}_\Omega$ фредгольмов, то оператор $\mathcal{L}_K$ есть изоморфизм.

Из теорем 1.1, 5.2 и 5.3 следует, что если $\mathcal{L}_\Omega$ фредгольмов, то он изоморфизм.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бицадзе А. В. Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 521–524.
- [2] Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.
- [3] Скубачевский А. Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
- [4] Скубачевский А. Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
- [5] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [6] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93.
- [7] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [8] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Формула Грина и теоремы о гомеоморфизмах для нелокальных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 5. С. 1059–1062.
- [9] Ильин В. А., Моисеев Е. И. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795–804.
- [10] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
- [11] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [12] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [13] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
- [14] Блехер П. М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1969. № 5. С. 30–36.
- [15] Шефтель З. Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. матем. ж. 1965. Т. 6. № 3. С. 636–668.