Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. О. Краснобаев, Необходимое условие полноты системы $\{e^{-\lambda_n t} \mid \operatorname{Re} \lambda_n > 0\}$ в пространствах $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 831–842

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:14:38

УДК 517.538.2

Необходимое условие полноты системы

$\{e^{-\lambda_n t} \mid \operatorname{Re} \lambda_n > 0\}$ в пространствах $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$

И. О. Краснобаев

Получено необходимое условие полноты системы

$$e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t} \mid \operatorname{Re} \lambda_n > 0, n \in \mathbb{Z}\}$$

в пространствах C_0 и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$, в случае, когда множество предельных точек последовательности $\{\lambda_n\}$ счетно и отделимо.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Рассмотрим последовательность $\Lambda = \{\lambda_n \mid \operatorname{Re} \lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ и соответствующую систему экспонент

$$e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t} \mid \lambda_n \in \Lambda\}. \quad (1)$$

Определим $C_0 = C_0(\mathbb{R}_+)$ как пространство непрерывных на $[0, \infty)$ функций с $\sup$ -нормой, для которых

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Известно (см., например, [1], [2; § 10.1]), что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty \quad (2)$$

достаточно для полноты системы (1) в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$, и C_0 , и необходимо для ее полноты в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$. То есть условие (2) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. (Это теорема Саса [3].) Известно, что в случае пространства C_0 условие (2) не является необходимым для полноты, а в случае пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$, необходимость условия (2) неизвестна. Простое необходимое условие было дано Сасом [3] (см. также [4], [2; § 10.2]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n + 1}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty. \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4564.2006.1).

Впоследствии Левинсон [5] получил более тонкое необходимое условие полноты системы (1) в C_0 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n + \exp(-\theta(|\lambda_n|))}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty,$$

где $\theta(x)$ – положительная, неубывающая при $x \geq 0$ функция такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta(x)}{1 + x^2} dx < \infty. \quad (4)$$

Оно является более содержательным, чем условие (3), в том случае, когда $\lambda_n \rightarrow \infty$. В противном случае это условие в сущности ничем не отличается от условия Саса. Необходимое условие полноты в случае, когда множество Λ содержало конечное число предельных точек на мнимой оси и, быть может, содержало подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности, было получено Седлецким (см., например, [2; § 10.2]). В данной статье рассматривается случай, когда множество предельных точек на мнимой оси счетно и отделимо.

2. Основные определения и используемые результаты. Через H^p обозначаем класс Харди в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, т.е. множество аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^p dy < \infty.$$

Здесь и всюду далее считаем $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Под классом H^∞ понимаем класс аналитических и ограниченных при $\operatorname{Re} z > 0$ функций.

Каждая функция $F(z) \in H^p$ имеет почти всюду на мнимой оси угловые граничные значения. Функцию ее угловых граничных значений обозначим через $F(iy)$.

ЛЕММА 1 [2; § 10.1]. Пусть функция $F(z) \in H^2$, $F(iy)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке и $F'(iy) \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда система $\{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, где $\{\lambda_n\}$ – нули функции $F(z)$, неполна в C_0 и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$.

ЛЕММА 2 [6]. Пусть $\{\beta_n\}$ – последовательность вещественных чисел таких, что при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство $|\beta_n - n| < C$. Тогда

$$(z - \beta_0) \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{\beta_n^2}\right) = O((1 + |x|)^{2C} e^{\pi|y|}).$$

ЛЕММА 3. Пусть последовательность $X = \{i\gamma_n \mid \gamma_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$ отделима, т.е.

$$\inf_{n \neq m} |\gamma_n - \gamma_m| = \rho > 0.$$

Тогда существует функция $g(z): \{\operatorname{Re} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $g(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$;
- 2) $g(z)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ вместе со своей производной;
- 3) $g(z)$ обращается в нуль на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Добавим не более, чем счетное множество точек вида $i\alpha_n$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, таких, что для объединенной последовательности

$$\{y_n\} = \{i\gamma_n\} \cup \{i\alpha_n\}$$

при всех n выполняется неравенство

$$\left| n\rho - \frac{y_n}{i} \right| \leq \rho. \quad (5)$$

Неравенство (5) равносильно неравенству

$$\left| n - \frac{y_n}{i\rho} \right| \leq 1. \quad (6)$$

Введем функцию

$$P(z) = \left(z - \frac{y_0}{i\rho} \right)^2 \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(\frac{i\rho z}{y_n} \right)^2 \right) \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(\frac{i\rho z}{y_{-n}} \right)^2 \right).$$

Используя неравенство (6) и применяя лемму 2, получаем

$$|P(z)| = O(|x|^4 e^{2\pi y}), \quad z = x + iy, \quad y \geq 0. \quad (7)$$

Функция $P(z)$ обращается в нуль в точках $y_n/(i\rho)$. Пусть $P_0(z) = P(z/\rho)$. Функция $P_0(z)$ обращается в нуль в точках y_n/i . Положим

$$P_1(z) = \frac{P_0(z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)}.$$

Тогда в силу (7)

$$P_1(z) = O\left(\exp\left(\frac{2\pi y}{\rho}\right)\right), \quad y = \operatorname{Im} z, \quad y \geq 0.$$

Функция $P_1(z)$ имеет тип $2\pi/\rho$ и порядок 1. Значит, $P'_1(z)$ имеет тот же тип и порядок. По неравенству Бернштейна производная функции $P_1(z)$ ограничена по модулю на вещественной прямой некоторой константой M . Тогда по теореме Фрагмена–Линделёфа имеем

$$|P'_1(z)| \leq M e^{2\pi y/\rho}, \quad y = \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$R(z) = P_1(z) e^{2i\pi z/\rho}.$$

Очевидно, что $R(z) = O(1)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Далее,

$$|R'(z)| = \left| P'_1(z) e^{2i\pi z/\rho} + \frac{2i\pi}{\rho} P_1(z) e^{2i\pi z/\rho} \right| \leq M + \frac{2\pi}{\rho} C = C_1, \quad \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Следовательно, $R'(z) = O(1)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Кроме того очевидно, что $R(z)$ обращается в нуль на последовательности $\{\gamma_n\}$. Пусть функция $g(z) = R(z/i)$. Она обращается в нуль на последовательности $\{i\gamma_n\}$. Очевидно, что $g(z), g'(z) = O(1)$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Значит, функция $g(z)$ искомая.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n \mid \operatorname{Re} \lambda_n > 0\}$ имеет вид

$$\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2 \cup \dots \cup \Lambda^k \cup \dots,$$

где

$$\Lambda^k = \{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \lambda_{n,k} \rightarrow i\gamma_k, \quad n \rightarrow \infty,$$

а $\gamma_k \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\inf_{n \neq m} |\gamma_n - \gamma_m| = \rho > 0.$$

Пусть $\theta(x)$ – неотрицательная, неубывающая при $x \geq 0$ функция, удовлетворяющая условию (4). Тогда, если существует неотрицательная последовательность $a_k \in l^1$ такая, что

$$\sum_k \sum_n \left(\operatorname{Re} \lambda_{n,k} + \exp \left(-a_k \theta \left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|} \right) \right) \right) < \infty, \quad (8)$$

то система $\{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}$ неполна в C_0 и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В данной теореме предоставлено достаточное условие неполноты системы $\{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}$ в пространствах C_0 и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$. Очевидно, что необходимое условие полноты можно получить из нее переформулировкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если последовательность Λ содержит конечное число предельных точек на мнимой оси и не содержит бесконечно удаленную точку, то теорема 1 переходит в упомянутую во введении теорему из [2; § 10.2] (с учетом замечания 1).

Основные трудности доказательства заключены в леммах 4 и 5.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $g(z)$ – функция из леммы 3, обращающаяся в нуль в точках $i\gamma_k$. Тогда существует функция $G(z)$, аналитическая на множестве $\{\operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обладающая свойствами

- 1) $G(\lambda_{n,k}) = 0$ при всех n и k ;
- 2) $|G(z)| \leq 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$;
- 3) $|g^2(iy)G'(iy)| = O(\exp(2 \sup_k \{a_k \theta(2/|y - \gamma_k|)\}))$, $y \neq \gamma_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим бесконечное произведение

$$G(z) = \prod_k \prod_n \frac{z - \lambda_{n,k}}{z + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}. \quad (9)$$

Обозначим его общий член через $p_{n,k}$. Имеем

$$p_{n,k} = 1 - \frac{2 \operatorname{Re} \lambda_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}{z + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}.$$

Отсюда и из (8) следует, что бесконечное произведение $G(z)$ сходится равномерно на компактах в

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k,n} \left\{ -\bar{\lambda}_{n,k} - \exp \left(-a_k \theta \left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|} \right) \right) \right\} \supset \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}.$$

Значит $G(z)$ – аналитическая функция при $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq i\gamma_k$. По построению выполняется первое утверждение леммы, т.е. $G(\lambda_{n,k}) = 0$ для любых n и k . Очевидное неравенство

$$|z - \lambda_{n,k}| \leq |z + \bar{\lambda}_{n,k} + \alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

доказывает второе утверждение. Перейдем теперь к доказательству третьего утверждения.

С помощью логарифмического дифференцирования получаем

$$G'(z) = G(z) \sum_{n,k} \left(\frac{2 \operatorname{Re} \lambda_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}{(z + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|)))^2} \cdot \frac{1}{p_{n,k}} \right),$$

$$\operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq i\gamma_k.$$

Пусть $G_{n,k}(z) = G(z)/p_{n,k}$. Тогда

$$|G'(z)| \leq \sum_{n,k} |G_{n,k}(z)| \frac{2 \operatorname{Re} \lambda_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}{|z + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))|^2}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq i\gamma_k. \quad (11)$$

Так как $G_{n,k}(z)$ имеет тот же вид, что и $G(z)$ (см. (9)), то по уже доказанному утверждению 2 имеем $G_{n,k}(z) \leq 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Отсюда и из (11) получаем

$$|G'(z)| \leq \sum_{n,k} \frac{2 \operatorname{Re} \lambda_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}{|z + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))|^2}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq i\gamma_k.$$

Пользуясь условием (8), заключаем, что

$$|G'(iy)| \leq M \sup_{n,k} \frac{1}{|iy + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))|^2}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y \neq \gamma_k. \quad (12)$$

Введем обозначения

$$A_{n,k}(y) = \frac{1}{|iy + \bar{\lambda}_{n,k} + \exp(-a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))|^2}, \quad \beta_{n,k} = \operatorname{Im} \lambda_{n,k},$$

$$y \in \mathbb{R}, \quad y \neq \gamma_k. \quad (13)$$

Ясно, что

$$0 < A_{n,k}(y) \leq \frac{1}{(y - \beta_{n,k})^2 + \exp(-2a_k \theta(1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|))}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y \neq \gamma_k.$$

Зафиксируем k . Пусть $0 < \mu \leq \rho/2$. Отдельно рассмотрим два случая

$$|y - \gamma_k| \geq \mu \quad \text{и} \quad 0 < |y - \gamma_k| < \mu.$$

Пусть $|y - \gamma_k| \geq \mu$. Тогда если $|\lambda_{n,k} - i\gamma_k| > \mu/2$, то

$$A_{n,k}(y) \leq \exp\left(2a_k \theta\left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|}\right)\right) \leq \exp\left(2a_k \theta\left(\frac{2}{\mu}\right)\right)$$

в силу монотонности функции $\theta(x)$.

Если же $|\lambda_{n,k} - i\gamma_k| \leq \mu/2$, то $|y - \beta_{n,k}| \geq \mu/2$ и, следовательно,

$$A_{n,k}(y) \leq \frac{1}{(y - \beta_{n,k})^2} \leq \frac{4}{\mu^2}.$$

В итоге

$$A_{n,k}(y) \leq \max \left\{ \exp \left(2 \max_k \{a_k\} \theta \left(\frac{2}{\mu} \right) \right), \frac{4}{\mu^2} \right\} = A(\mu), \quad |y - \gamma_k| \geq \mu. \quad (14)$$

Пусть $0 < |y - \gamma_k| < \mu$. Тогда если $|y - \gamma_k|/|\beta_{n,k} - \gamma_k| \leq 2$, то

$$\frac{1}{|\beta_{n,k} - \gamma_k|} \leq \frac{2}{|y - \gamma_k|}.$$

А поскольку $1/|\lambda_{n,k} - i\gamma_k| \leq 1/|\beta_{n,k} - \gamma_k|$, то

$$A_{n,k}(y) \leq \exp \left(2a_k \theta \left(\frac{2}{|y - \gamma_k|} \right) \right). \quad (15)$$

Если же $|y - \gamma_k|/|\beta_{n,k} - \gamma_k| > 2$ или $\beta_{n,k} = \gamma_k$, то

$$A_{n,k}(y) \leq \frac{1}{(y - \gamma_k + \gamma_k - \beta_{n,k})^2} \leq \frac{1}{(y - \gamma_k)^2 (1 - (\beta_{n,k} - \gamma_k)/(y - \gamma_k))^2} \leq \frac{4}{(y - \gamma_k)^2}. \quad (16)$$

Таким образом, оба указанных случая рассмотрены. Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$\left| \frac{g(iy)}{iy - i\gamma_k} \right| = \left| \frac{g(iy) - g(i\gamma_k)}{iy - i\gamma_k} \right| \leq \frac{\max_{z \in [iy, i\gamma_k]} |g'(z)| \cdot |y - \gamma_k|}{|y - \gamma_k|} = \max_{z \in [iy, i\gamma_k]} |g'(z)|. \quad (17)$$

В силу ограниченности производной функции $g(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ получаем

$$|g^2(iy)| \leq K^2(y - \gamma_k)^2$$

для всех k . Отсюда, из ограниченности функции $g(z)$, а также из (15), (16) и (14) следует, что

$$|g(iy)^2 A_{n,k}(y)| \leq \max \left\{ C^2 \exp \left(2a_k \theta \left(\frac{2}{|y - \gamma_k|} \right) \right), 4K^2, C^2 A(\mu) \right\}. \quad (18)$$

Поскольку выражение $\exp(2a_k \theta(2/|y - \gamma_k|))$ ограничено снизу единицей (показатель экспоненты неотрицательный),

$$\max \{4K^2, C^2 A(\mu)\} \leq \max \{4K^2, C^2 A(\mu)\} \cdot \exp \left(2a_k \theta \left(\frac{2}{|y - \gamma_k|} \right) \right).$$

Значит, из (18) вытекает

$$|g(iy)^2 A_{n,k}(y)| \leq \max \{C^2, 4K^2, C^2 A(\mu)\} \cdot \exp \left(2a_k \theta \left(\frac{2}{|y - \gamma_k|} \right) \right).$$

И так как $|G'(iy)| \leq M \sup_{n,k} A_{n,k}(y)$ (по формулам (12), (13)), то

$$|g^2(iy)G'(iy)| = O \left(\exp \left(2 \sup_k \left\{ a_k \theta \left(\frac{2}{|y - \gamma_k|} \right) \right\} \right) \right).$$

ЛЕММА 5. Пусть $\psi(x)$ – положительная четная неубывающая при $x \geq 0$ функция с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^2} dx < \infty, \quad (19)$$

пусть положительная последовательность $\{a_k\} \in l^1$, и пусть $\{\gamma_k\}$ – отделимая последовательность вещественных чисел. Тогда существует функция $h(z)$, аналитическая при $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывная на $\{\operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}$ вместе со своей производной и такая, что

- 1) $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq i\gamma_k$,
- 2) $\operatorname{Re} h(iy) \geq \sup_k \{a_k \psi(1/|y - \gamma_k|)\}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq \gamma_k$,
- 3) $h'(iy) = O(\max\{\sup_k \{1/|y - \gamma_k|^4\}, C\})$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq \gamma_k$, $C = \text{const} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$h_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \left(\frac{1}{1/(z - i\gamma_k) + 1 + iv} + \frac{1}{1 - iv} \right) dv. \quad (20)$$

На любом компакте вида

$$\{\operatorname{Re} z \geq -\alpha^2\} \cap \{z : |z - i\gamma_k| \geq \alpha > 0\} \cap \{|z| \leq R < \infty\}$$

интеграл (20) сходится равномерно в силу условия (19). Значит, функция $h_k(z)$ имеет смысл и аналитична на множестве $\{\operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}$.

При фиксированном $\alpha > 0$ рассмотрим множество вида

$$V_\alpha = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0, |z - i\gamma_k| \geq \alpha\}.$$

Далее везде считаем, что $z = x + iy$ и $z \in V_\alpha$.

Покажем, что все функции $h_k(z)$ и $h'_k(z)$ ограничены на V_α сверху константой, не зависящей от k . Сначала докажем это для $h_k(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} |h_k(z)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \left| \frac{1}{1/(z - i\gamma_k) + 1 + iv} + \frac{1}{1 - iv} \right| dv \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \left| \frac{2 + 1/(z - i\gamma_k)}{(1 - iv)(1 + iv + 1/(z - i\gamma_k))} \right| dv \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v)(2 + 1/\alpha)}{|(1 - iv)(1 + iv + 1/(z - i\gamma_k))|} dv \\ &= \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v)}{1 + v^2} \frac{1}{|1 + (1 - iv)/((1 + v^2)(z - i\gamma_k))|} dv. \end{aligned}$$

Очевидно, что достаточно показать ограниченность снизу знаменателя второго подынтегрального множителя положительной константой, не зависящей от k . Имеем

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{1 - iv}{(1 + v^2)(z - i\gamma_k)} \right| &= \left| 1 + \frac{(1 - iv)(x - i(y - \gamma_k))}{(x^2 + (y - \gamma_k)^2)(1 + v^2)} \right| \\ &= \left| \frac{(x^2 + (y - \gamma_k)^2)(1 + v^2) + x - v(y - \gamma_k) - (vx + (y - \gamma_k))i}{(x^2 + (y - \gamma_k)^2)(1 + v^2)} \right|. \end{aligned}$$

Делая в полученном выражении замену $t = y - \gamma_k$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{((x^2 + t^2)(1 + v^2) + x - vt)^2 + (vx + t)^2}}{(x^2 + t^2)(1 + v^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{(x^2 + t^2)^2(1 + v^2)^2 + 2(x^2 + t^2)(1 + v^2)(x - vt) + x^2 - 2xtv + v^2t^2 + v^2x^2 + 2xtv + t^2}}{(x^2 + t^2)(1 + v^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{(1 + v^2)(x^2 + t^2) + (x^2 + t^2)^2(1 + v^2)^2 + 2(x^2 + t^2)(1 + v^2)(x - vt)}}{(x^2 + t^2)(1 + v^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + v^2)(1 + 2(x - vt) + (1 + v^2)(x^2 + t^2))}}{(x^2 + t^2)(1 + v^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{1 + 2(x - vt) + (1 + v^2)(x^2 + t^2)}{(1 + v^2)(x^2 + t^2)}}.
 \end{aligned}$$

Найдем минимум подкоренной функции при $x \geq 0$. Взяв производную по v и приравняв ее к нулю, можно убедиться в том, что минимум этой функции достигается при

$$v = \frac{\sqrt{4t^2 + (1 + 2x)^2} + 1 + 2x}{2t}, \quad t \neq 0,$$

и он равен

$$1 - \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)(\sqrt{4t^2 + (1 + 2x)^2} + 1 + 2x)}.$$

При $t = 0$ подкоренное выражение, очевидно, ограничено снизу единицей. Пользуясь тем, что $t^2/(t^2 + x^2) < 1$ и $t^2 + x^2 \geq \alpha^2$, а также тем, что $x \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)(\sqrt{4t^2 + (1 + 2x)^2} + 1 + 2x)} &\geq 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{4(t^2 + x^2) + 4x + 1}} \\
 &\geq 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{4\alpha^2 + 1}} = C_\alpha > 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $h_k(z)$ на множестве V_α по модулю ограничена сверху константой, зависящей от α .

Теперь докажем ограниченность функции

$$h'_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1/(z - i\gamma_k)^2}{(1/(z - i\gamma_k) + 1 + iv)^2} dv, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq i\gamma_k. \quad (21)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 |h'_k(z)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1/|z - i\gamma_k|^2}{|1/(z - i\gamma_k) + 1 + iv|^2} dv \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{|1/(z - i\gamma_k) + 1 + iv|^2} dv \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{|x/|z - i\gamma_k|^2 - (y - \gamma_k)/|z - i\gamma_k|^2 i + 1 + iv|^2} dv \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{1 + (v - (y - \gamma_k)/(x^2 + (y - \gamma_k)^2))^2} dv \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{1 + (|v| - \max_{y,x}(|y - \gamma_k|/(x^2 + (y - \gamma_k)^2)))^2} dv.
 \end{aligned}$$

Если $|y - \gamma_k| \geq 1$, то $|y - \gamma_k| \leq (y - \gamma_k)^2$ и, следовательно,

$$\frac{|y - \gamma_k|}{(y - \gamma_k)^2 + x^2} \leq \frac{(y - \gamma_k)^2}{(y - \gamma_k)^2 + x^2} \leq 1.$$

Если $|y - \gamma_k| < 1$, то

$$\frac{|y - \gamma_k|}{(y - \gamma_k)^2 + x^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Введем константу

$$v_0 = \max\left\{1, \frac{1}{\alpha^2}\right\}.$$

Тогда

$$|h'_k(z)| \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{1 + (|v| - v_0)^2} dv \leq B_\alpha. \quad (22)$$

Таким образом, функция $h'_k(z)$ на множестве V_α по модулю ограничена сверху константой, зависящей от α .

Из формулы (20) следует, что функции $h_k(z)$ на V_α обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h_k(x + iy) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \left(\frac{1 + x/(x^2 + (y - \gamma_k)^2)}{|x/(x^2 + (y - \gamma_k)^2) + 1 + i(v - (y - \gamma_k)/(x^2 + (y - \gamma_k)^2))|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|1 - iv|^2} \right) dv > 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h_k(iy) &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{1 + (v - 1/(y - \gamma_k))^2} dv \\ &\geq \int_{1/(|y - \gamma_k|)}^{\infty} \psi(v) \frac{1}{1 + (v - 1/(y - \gamma_k))^2} dv \\ &\geq \psi\left(\frac{1}{|y - \gamma_k|}\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv \geq \psi\left(\frac{1}{|y - \gamma_k|}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим производную функции $h_k(z)$ на мнимой оси, используя формулу (21):

$$h'_k(iy) = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \frac{1/((y - \gamma_k)^2)}{(1 + i(v - 1/(y - \gamma_k)))^2} dv, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\mu \leq \rho/2$. Тогда при $|y - \gamma_k| \geq \mu$ верна оценка

$$|h'_k(iy)| \leq \frac{1}{\mu^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v)}{1 + (|v| - 1/\mu)^2} dv \leq C(\mu). \quad (25)$$

Если же $|y - \gamma_k| < \mu$, то

$$|h'_k(iy)| \leq \frac{1}{(y - \gamma_k)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v)}{1 + v^2} \frac{1 + v^2}{1 + (v - 1/(y - \gamma_k))^2} dv. \quad (26)$$

Оценим второй сомножитель подынтегрального выражения в (26):

$$\begin{aligned} \frac{1 + v^2}{1 + (v - 1/(y - \gamma_k))^2} &= \frac{1 + (t - 1/(y - \gamma_k))^2}{1 + t^2} \leq 1 + \left(\frac{1}{y - \gamma_k}\right)^2 + \frac{2|t||1/(y - \gamma_k)|}{1 + t^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{|y - \gamma_k|^2} + \frac{1}{|y - \gamma_k|}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в интеграл (26), получаем

$$h'_k(iy) \leq C \left(\frac{1}{|y - \gamma_k|^2} + \frac{1}{|y - \gamma_k|^3} + \frac{1}{|y - \gamma_k|^4} \right) = O \left(\frac{1}{|y - \gamma_k|^4} \right).$$

В качестве искомой функции $h(z)$ возьмем следующую:

$$h(z) = \sum_k a_k h_k(z). \quad (27)$$

Так как $|h_k(z)| < C_\alpha$, $z \in V_\alpha$, то ряд (27) сходится равномерно на V_α . Более того, в силу оценки (22) ряд $\sum_k a_k h'_k(z)$ сходится равномерно на V_α . Следовательно, в силу произвольности выбора α получаем, что ряды для функций $h(z)$ и $h'(z)$ сходятся равномерно на любом компакте в $\{\operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}$. А значит, по теореме Вейерштрасса функция $h(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна вместе со своей производной на множестве $\{\operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{i\gamma_k\}$. Ряды $h(iy) = \sum_k h_k(iy)$ и $\sum_k h'_k(iy)$ сходятся равномерно на множестве $\{y \in \mathbb{R} \setminus \{i\gamma_k\}\}$. Значит, согласно теореме о почленном дифференцировании ряда

$$h'(iy) = \sum_k h'_k(iy). \quad (28)$$

Из свойств (23), (24) функции $h_k(z)$ и из формулы (28) вытекают следующие свойства функции $h(z)$:

- 1) $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq i\gamma_k$;
- 2) $\operatorname{Re} h(iy) \geq a_1 \psi \left(\frac{1}{|y - \gamma_1|} \right) + a_2 \psi \left(\frac{1}{|y - \gamma_2|} \right) + \dots + a_k \psi \left(\frac{1}{|y - \gamma_k|} \right) + \dots$
 $\geq \sup_k \left\{ a_k \psi \left(\frac{1}{|y - \gamma_k|} \right) \right\};$
- 3) $|h'(iy)| \leq \sup_k a_k |h'_k(iy)| + \sum_{k \neq k_0} a_k |h'_k(iy)|.$

Так как $a_k \rightarrow 0$, то $\sup_k a_k |h'_k(iy)|$ достигается при некотором $k = k_0 = k_0(y)$. Отдельно рассмотрим случаи $|y - \gamma_{k_0}| \leq \rho/2$ и $|y - \gamma_{k_0}| > \rho/2$.

Пусть $|y - \gamma_{k_0}| \leq \rho/2$. Это означает, что расстояние между iy и $i\gamma_{k_0}$ минимально среди всех возможных расстояний между точками iy и $i\gamma_k$. Обозначим это расстояние через ε_0 . Следовательно, для остальных точек $i\gamma_k$ верно неравенство

$$|y - \gamma_k| > \max\{\varepsilon_0, \rho - \varepsilon_0\} \geq \frac{\rho}{2}.$$

Значит, в силу оценки (25) получаем $|h'_k(iy)| \leq C(\rho/2)$ для всех $k \neq k_0$. Далее,

$$\sum_{k \neq k_0} a_k |h'_k(iy)| \leq \sum_{k \neq k_0} a_k \cdot C \left(\frac{\rho}{2} \right) \leq \sum_k a_k \cdot C \left(\frac{\rho}{2} \right) = C_1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |h'(iy)| &\leq C \frac{a_{k_0}}{(y - \gamma_{k_0})^4} + C_1 \leq (Ca_{k_0} + C_1(y - \gamma_{k_0})^4) \frac{1}{(y - \gamma_{k_0})^4} \\ &\leq \left(Ca_{k_0} + C_1 \frac{\rho^4}{16} \right) \frac{1}{(y - \gamma_{k_0})^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае получаем

$$h'(iy) = O\left(\frac{1}{(y - \gamma_{k_0})^4}\right). \quad (29)$$

Пусть теперь $|y - \gamma_{k_0}| > \rho/2$. Пусть $i\gamma_s$ – ближайшая к iy точка из множества $\{i\gamma_k\}$. Опять же для точек $i\gamma_k$, $k \neq s$, верно $|y - \gamma_k| \geq \rho/2$. Значит, пользуясь оценкой (25), получаем неравенство $|h'_k(iy)| \leq C(\rho/2)$ для всех $k \neq s$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq k_0} a_k |h'_k(iy)| &= a_s |h'_s(iy)| + \sum_{k \neq k_0, k \neq s} a_k |h'_k(iy)| \leq a_{k_0} |h'_{k_0}(iy)| + \sum_{k \neq k_0, k \neq s} a_k \cdot C\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k \neq s} a_k \cdot C\left(\frac{\rho}{2}\right) \leq \sum_k a_k \cdot C\left(\frac{\rho}{2}\right) = C_1. \end{aligned}$$

В этом случае

$$|h'(iy)| \leq a_{k_0} |h'_{k_0}(iy)| + C_1 \leq \max_k \{a_k\} C\left(\frac{\rho}{2}\right) + C_1 = C_2.$$

Отсюда и из (29) получаем третье утверждение леммы:

$$h'(iy) = O\left(\max\left\{\sup_k \left\{\frac{1}{(y - \gamma_k)^4}\right\}, C_2\right\}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу леммы 1 достаточно предъявить функцию $F(z)$, удовлетворяющую ее условиям и обращающуюся в нуль на последовательности Λ . Покажем, что в качестве $F(z)$ достаточно взять функцию

$$F(z) = \frac{1}{(1+z)^2} G(z) e^{-h(z)} g^4(z),$$

где $G(z)$ – функция из леммы 4, $h(z)$ – функция из леммы 5, соответствующая функции $\psi(x) = 2\theta(2|x|)$, а $g(z)$ – функция из леммы 4.

Убедимся в том, что $F(z) \in H^2$. Числитель функции $F(z)$ ограничен в правой полуплоскости, и потому

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \frac{M}{|1+z|^2} = \frac{M}{(1+x)^2 + y^2} \leq M \frac{1}{1+y^2}, \\ \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy &\leq M^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y^2)^2} dy = C < +\infty. \end{aligned}$$

Свойство $F(z) \in H^2$ доказано.

Благодаря лемме 4 функция $F(z)$ обращается в нуль в точках Λ . Таким образом, осталось показать, что $F'(iy) \in L^2(\mathbb{R})$. Имеем

$$F'(z) = \frac{G' \cdot e^{-h} \cdot g^4}{(1+z)^2} - \frac{G \cdot e^{-h} \cdot h' \cdot g^4}{(1+z)^2} + \frac{G \cdot e^{-h} \cdot 4g^3 g'}{(1+z)^2} - \frac{2G \cdot e^{-h} \cdot g^4}{(1+z)^3}.$$

Полагаем $z = iy$. Первое слагаемое лежит в $L^2(\mathbb{R})$ в силу того, что $g^2(iy)G'(iy) \times e^{-h(iy)} = O(1)$ (по п. 3) леммы 4, п. 2) леммы 5) и функция $g(z)$ ограничена. Второе слагаемое тоже лежит в $L^2(\mathbb{R})$ в силу равенства $g^4(iy)h'(iy) = O(1)$ (по п. 3) леммы 5 и (17)) и ограниченности функции $G(iy)e^{-h(iy)}$. В остальных слагаемых числители ограничены. Заметим, что функция $F(iy)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением точек $\{i\gamma_k\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles réelles*, Actualités Sci. Ind., **959**, Hermann et Cie., Paris, 1943.
- [2] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [3] O. Szász, "Über die Approximation stetiger Functionen durch lineare Aggregate von Potenzen", *Math. Ann.*, **77**:4 (1916), 482–496.
- [4] R. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
- [5] N. Levinson, "On the Szász–Müntz theorem", *J. Math. Anal. Appl.*, **48**:1 (1974), 264–269.
- [6] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

И. О. Краснобаев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: igormsu@mail.ru

Поступило

30.07.2007