Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Колодий, Двупараметрические стохастические уравнения Вольтерра, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 525–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:57:11

Двупараметрические стохастические уравнения Вольтерра

Н. А. Колодий

Исследуются двупараметрические стохастические уравнения Вольтерра, содержащие интегралы по сильным мартингалам и полям ограниченной вариации. Для таких уравнений доказаны теоремы существования и единственности решений с траекториями в пространстве борелевских функций, локально интегрируемых с квадратом по локально конечной мере. При дополнительных условиях на коэффициенты уравнения доказано существование модификации решения с непрерывными справа и не имеющими разрывов второго рода траекториями.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В данной работе элементы пространства $\mathbb{R}_+^2$ будем обозначать буквами x, y, z , причем, если в одном и том же выражении присутствуют z, z_1 и (или) z_2 , то всегда полагаем, что z_1 – первый элемент, а z_2 – второй элемент вектора z (аналогично для x, y). Неравенства для $x, y, z \in \mathbb{R}_+^2$ определены поэлементно, $x \wedge z = (x_1 \wedge z_1, x_2 \wedge z_2)$. Приращение функции $g: \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ на прямоугольнике $]x, z] = \{y: x < y \leq z\}$, $x < z$, определено равенством

$$g]x, z] = g(z) - g(x_1, z_2) - g(z_1, x_2) + g(x).$$

Функцию $g: \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ будем называть *непрерывной слева* (соответственно *справа*), если $\lim_{z \geq x \rightarrow z} g(x) = g(z)$ (соответственно $\lim_{z \leq x \rightarrow z} g(x) = g(z)$).

Далее $\mathbb{D}$ обозначает пространство всех таких функций $g: \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$, что для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$ существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow z, z_1 \leq x_1, x_2 < z_2} g(x), \quad \lim_{z > x \rightarrow z} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow z, x_1 < z_1, z_2 \leq x_2} g(x),$$

$\mathbb{D}_0$ обозначает пространство таких функций $g \in \mathbb{D}$, что $g(x_1, 0) = g(0, x_2) = 0$ для любого x .

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2)$ – двупараметрическое семейство σ -алгебр, удовлетворяющее условиям:

- 1) если $x \leq z$, то $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$;
- 2) $\mathcal{F}_0$ содержит все элементы $\mathcal{F}$ нулевой вероятности;
- 3) $\mathcal{F}_z = \bigcap_{x > z} \mathcal{F}_x$ для любого z ;
- 4) для любых x и z σ -алгебры $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_z$ условно независимы относительно $\mathcal{F}_{x \wedge z}$.

Определим

$$\mathcal{F}_z^* = \left(\bigvee_{z_2 \geq 0} \mathcal{F}_z \right) \vee \left(\bigvee_{z_1 \geq 0} \mathcal{F}_z \right).$$

Далее $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ обозначают σ -алгебры $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримых и $\mathbb{F}$ -предсказуемых подмножеств $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ [1]; $\mathcal{A}$ обозначает пространство полей ограниченной вариации [2]; $\mathcal{M}_2^S$ обозначает пространство квадратически интегрируемых сильных $\mathbb{F}$ -мартингалов (см. [2], [3]), т.е. $\mathcal{M}_2^S$ – пространство $\mathbb{F}$ -согласованных случайных полей $(\mu(x), x \in \mathbb{R}_+^2)$ с траекториями в $\mathbb{D}_0$, удовлетворяющих условию: $E\mu^2(x) < \infty$ для любого x и $E\{\mu[x, z] | \mathcal{F}_x^*\} = 0$ для любых $x \leq z$. Если X – некоторое топологическое пространство, то $\mathcal{B}(X)$ обозначает σ -алгебру борелевских подмножеств X .

Предполагаем заданной локально конечную меру λ на $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^2))$, где $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^2)$ – пополнение $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ по мере λ . Пусть X_λ обозначает пространство всех таких $(\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^2) | \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримых функций $g: \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$, что

$$\|g\|_z = \left(\int_{[0, z[} g^2 d\lambda \right)^{1/2} < \infty \quad \text{для каждого } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Для $g, g' \in X_\lambda$ определим

$$\varrho_\lambda(g, g') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} [1 \wedge \|g - g'\|_{(k, k)}].$$

Отметим, что $(X_\lambda, \varrho_\lambda)$ – метрическое полное сепарабельное пространство.

Для $g \in X_\lambda$ и $x \in \mathbb{R}_+^2$ определим элемент $g_x \in X_\lambda$ равенством $g_x(y) = g(y)I_{[0, x[}^{(y)}$. Заметим, что $\|g_x - g_y\|_z \rightarrow 0$ при $x \geq y \rightarrow x$ для каждого z , и поэтому

$$\lim_{x \geq y \rightarrow x} \varrho_\lambda(g_x, g_y) = 0.$$

Таким образом, отображение $x \mapsto g_x: \mathbb{R}_+^2 \mapsto X_\lambda$ непрерывно слева для каждого $g \in X_\lambda$.

Пусть Ξ_λ – пространство всех таких $\mathcal{T}$ -измеримых полей $\xi = (\xi(z), z \in \mathbb{R}_+^2)$, что $\xi(\cdot, \omega) \in X_\lambda$ для каждого $\omega \in \Omega$; Ξ_λ^* – пространство всех таких полей $\xi \in \Xi_\lambda$, что

$$\|\xi\|_z = \sup_{x \in [0, z]} (E|\xi(x)|^2)^{1/2} < \infty \quad \text{для каждого } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Для $\xi, \xi' \in \Xi_\lambda^*$ определим

$$\varrho_\Xi(\xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} [1 \wedge \|\xi - \xi'\|_{(k, k)}].$$

Отметим, что метрическое пространство $(\Xi_\lambda^*, \varrho_\Xi)$ является полным.

В данной работе рассматривается стохастическое интегральное уравнение

$$\xi(z) = \eta(z) + \int_{[0, z]} a(z, x, \xi_x) A(z, dx) + \int_{[0, z]} b(z, x, \xi_x) M(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad (1.1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\eta \in \Xi_\lambda$;
- 2) $((z, \omega), x, g) \mapsto a(z, \omega, x, g) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- 3) $(z, (x, \omega), g) \mapsto b(z, x, \omega, g) \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

- 4) $(z, (x, \omega)) \mapsto M(z, x, \omega)$ и $(z, (x, \omega)) \mapsto A(z, x, \omega) - (\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримые функции;
- 5) $(M(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{M}_2^S$ для каждого фиксированного z ;
- 6) $(A(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{A}$ для каждого фиксированного z .

Решением уравнения (1.1) будем называть такой элемент ξ пространства Ξ_λ , что для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$ с вероятностью 1 выполнено равенство (1.1). Решение ξ уравнения (1.1) будем называть *единственным*, если любое другое решение уравнения (1.1) является модификацией ξ .

Целью данной работы является доказательство теорем существования и единственности решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости (1.1). Однопараметрическим стохастическим уравнениям Вольтерра посвящено значительное количество работ, среди которых можно выделить работы Клепшиной и Веретенникова [4], Парду и Проттера [5], Колодий [6].

В п. 2 этой статьи доказаны теоремы существования и единственности решений с траекториями в пространстве борелевских функций, локально интегрируемых с квадратом по локально конечной мере. В п. 3 при дополнительных условиях на коэффициенты уравнения доказано существование модификации решения с траекториями в $\mathbb{D}$.

2. Решения с локально интегрируемыми траекториями. Применяя результаты работы [2] о существовании квадратической вариации и неравенствах для моментов двухпараметрического сильного мартингала, результаты работы [3] о стохастических интегралах от предсказуемых процессов по сильным двухпараметрическим мартингалам и методы доказательств существования измеримых по параметру модификаций квадратических вариаций мартингалов и стохастических интегралов из работы [7], имеем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. 1. *Существуют такие $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -измеримые функции*

$$(z, (x, \omega)) \mapsto \overline{M}(z, x, \omega) \quad \text{и} \quad (z, (x, \omega)) \mapsto \overline{A}(z, x, \omega),$$

что $\overline{M}(z, x)$ является квадратической вариацией сильного мартингала $M(z, \cdot)$, а $\overline{A}(z, x)$ является вариацией поля $A(z, \cdot)$ на прямоугольнике $[0, x]$.

2. *Если*

$$(z, (x, \omega)) \mapsto \beta(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

и существует такая последовательность линий остановки $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, L_n] = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$$

с точностью до пренебрежимого множества и

$$\mathbb{E} \int_{[0, y]} I_{[0, L_n]}^{(x)} \beta^2(z, x) \overline{M}(z, dx) < \infty$$

для любых n, y, z , то существует такая функция

$$(z, (y, \omega)) \mapsto Y(z, y, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

что $Y(z, y)$ является стохастическим интегралом на прямоугольнике $[0, y]$ от $\mathcal{P}$ -измеримой функции $\beta(z, \cdot)$ по квадратически интегрируемому сильному мартингалу $M(z, \cdot)$:

$$Y(z, y) = \int_{[0, y]} \beta(z, u) M(z, du) \quad \text{п.н. для любых } z, y.$$

Сверх того, если

$$\mathbb{E} \int_{[0, y]} \beta^2(z, x) \overline{M}(z, dx) < \infty \quad \text{для любых } y, z,$$

то $(Y(z, y), y \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{M}_2^S$ для любого фиксированного z и квадратическая вариация $Y(z, \cdot)$ на $[0, y]$ равна

$$\int_{[0, y]} \beta^2(z, x) \overline{M}(z, dx).$$

ЛЕММА 2. Если $y, z \in \mathbb{R}_+^2$, $y \leq z$, $\omega \mapsto \eta(\omega) \in \mathcal{F}_y | \mathcal{B}(X_\lambda)$, то

$$(x, \omega) \mapsto \eta(\omega) I_{[y, z]}^{(x)} \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda).$$

Если $\xi \in \Xi_\lambda$, то

$$\begin{aligned} (x, \omega) &\mapsto \xi_x(\cdot, \omega) \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda), \\ (z, (x, \omega)) &\mapsto b(z, x, \omega, \xi_x(\cdot, \omega)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ ((z, \omega), x) &\mapsto a(z, \omega, x, \xi_z(\cdot, \omega)) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) | \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Существует (см. [8; § 37, теорема 2], [9; лемма 1.1]) взаимно-однозначное и взаимно-борелевское отображение $h: X_\lambda \mapsto h(X_\lambda) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, причем h может быть выбрано так, что $h(0) = 0$.

Очевидно, что

$$h(\eta(\omega) I_{[y, z]}^{(x)}) = h(\eta(\omega)) I_{[y, z]}^{(x)},$$

отображение $\omega \mapsto h(\eta(\omega))$ является $(\mathcal{F}_y | \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримым и функция $x \mapsto h(\eta(\omega)) \times I_{[y, z]}^{(x)}$ непрерывна слева. Поэтому

$$(x, \omega) \mapsto h(\eta(\omega)) I_{[y, z]}^{(x)} \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(см. [10]). Так как

$$h^{-1}(h(\eta(\omega)) I_{[y, z]}^{(x)}) = \eta(\omega) I_{[y, z]}^{(x)},$$

то

$$(x, \omega) \mapsto \eta(\omega) I_{[y, z]}^{(x)} \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda).$$

2. Заметим, что функция $(y, \omega) \mapsto \xi(y, \omega) I_{[0, z] \cap [0, x]}^{(y)}$ является $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{F}_x | \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримой. Поэтому $\omega \mapsto \|\xi_x(\cdot, \omega) - g(\cdot)\|_z \in \mathcal{F}_x | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и, значит,

$$\omega \mapsto \varrho_\lambda(\xi_x(\cdot, \omega), g(\cdot)) \in \mathcal{F}_x | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \quad \text{для любой } g \in X_\lambda.$$

Следовательно, $\{\omega : \xi_x(\cdot, \omega) \in O_\varepsilon(g)\} \in \mathcal{F}_x$ для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in X_\lambda$, где $O_\varepsilon(g)$ – ε -окрестность элемента g . Таким образом,

$$\omega \mapsto \xi_x(\cdot, \omega) \in \mathcal{F}_x | \mathcal{B}(X_\lambda) \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{R}_+^2.$$

Определим последовательность функций $(x, \omega) \mapsto \xi_x^{(n)}(\cdot, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, соотношением

$$\begin{aligned} \xi_x^{(n)}(\cdot, \omega) &= \xi((0, 0), \omega) I_{\{(0, 0)\}}^{(x)} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \xi_{(i2^{-n}, j2^{-n})}(\cdot, \omega) I_{[(i2^{-n}, j2^{-n}), ((i+1)2^{-n}, (j+1)2^{-n})]}^{(x)} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\xi_{(j2^{-n}, 0)}(\cdot, \omega) I_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}] \times \{0\}}^{(x)} \right. \\ &\quad \left. + \xi_{(0, j2^{-n})}(\cdot, \omega) I_{\{0\} \times [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]}^{(x)} \right). \end{aligned}$$

Согласно первой части доказательства леммы $(x, \omega) \mapsto \xi_x^{(n)}(\cdot, \omega) \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda)$. Так как функция $x \mapsto \xi_x(\cdot, \omega) : \mathbb{R}_+^2 \mapsto X_\lambda$ непрерывна слева, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_\lambda(\xi_x^{(n)}(\cdot, \omega), \xi_x(\cdot, \omega)) = 0$$

в каждой точке (x, ω) . Следовательно, $(x, \omega) \mapsto \xi_x(\cdot, \omega) \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda)$.

3. Теперь ясно, что

$$\begin{aligned} (z, (x, \omega)) &\mapsto (z, x, \omega, \xi_x(\cdot, \omega)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(X_\lambda), \\ ((z, \omega), x) &\mapsto (z, \omega, x, \xi_z(\cdot, \omega)) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) | \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda), \end{aligned}$$

откуда следуют остальные утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

Определим функции

$$\tilde{a}(z, \omega, x, g) = a(z, \omega, x, g + \eta(\cdot, \omega)), \quad \tilde{b}(z, x, \omega, g) = b(z, x, \omega, g + \eta(\cdot, \omega)).$$

Отметим, что $\tilde{a}(z, \omega, x, g)$ и $\tilde{b}(z, x, \omega, g)$ удовлетворяют тем же условиям измеримости, что и $a(z, \omega, x, g)$ и $b(z, x, \omega, g)$.

Уравнение (1.1) имеет единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ тогда и только тогда, когда имеет единственное решение $\zeta \in \Xi_\lambda$ уравнение

$$\zeta(z) = \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_x) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2. \quad (2.1)$$

При этом $\xi = \zeta + \eta$.

Введем обозначение

$$\mathbf{J}(z, \zeta) = \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_x) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx).$$

Определим линии остановки [3]

$$L_m(\omega) = \text{debut}\{(x, \omega) : \|\eta(\cdot, \omega)\|_x \geq m\}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Заметим, что

$$\llbracket 0, L_m \rrbracket = \{(x, \omega) : x \in [0, L_m(\omega)]\} \in \mathcal{P}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \llbracket 0, L_m \rrbracket = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega,$$

и

$$I_{[0, L_m(\omega)]}^{(x)} \|\eta(\cdot, \omega)\|_x \leq m$$

в силу непрерывности слева функции $x \mapsto \|\eta(\cdot, \omega)\|_x$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что существует такое $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -измеримое случайное поле $B(z, x, \omega)$, что $0 \leq B(z, x) \leq B(z', x)$ для $z \leq z'$ и*

$$|a(z, x, g)| \leq B(z, x)(1 + \|g\|_x), \quad |b(z, x, g)| \leq B(z, x)(1 + \|g\|_x), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} |a(z, x, g) - a(z, x, g')| &\leq B(z, x)\|g - g'\|_x, \\ |b(z, x, g) - b(z, x, g')| &\leq B(z, x)\|g - g'\|_x, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\int_{[0, z]} B(z, x) \bar{A}(z, dx) + \int_{[0, z]} B^2(z, x) \bar{M}(z, dx) \leq \Gamma(z),$$

где $(\Gamma(z), z \in \mathbb{R}_+^2)$ – неслучайная функция, $0 \leq \Gamma(z) \leq \Gamma(z')$ для $z \leq z'$.

Тогда существуют такие константы $C(z, m)$ и $K(z)$, что

$$0 \leq C(z, m) \leq C(z', m), \quad 0 \leq K(z) \leq K(z') \quad \text{для } z \leq z',$$

и выполнены оценки

$$\|I_{[0, L_m]}^{(\cdot)} \mathbf{J}(\cdot, \zeta)\|_z^2 \leq C(z, m) + K(z) \int_{[0, z]} \|\zeta\|_x^2 \lambda(dx), \quad (2.5)$$

$$\|I_{[0, L_m]}^{(\cdot)} (\mathbf{J}(\cdot, \zeta) - \mathbf{J}(\cdot, \zeta'))\|_z^2 \leq K(z) \int_{[0, z]} \|\zeta - \zeta'\|_x^2 \lambda(dx), \quad (2.6)$$

для любых $\zeta, \zeta' \in \Xi_\lambda^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойствам стохастического интеграла по сильному мартингалу и условию (2.3) имеем

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| I_{[0, L_m]}^{(z)} \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx) \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \int_{[0, z]} I_{[0, L_m]}^{(x)} B^2(z, x) (1 + \|\eta\|_x + \|\zeta\|_x)^2 \bar{M}(z, dx) \\ &\leq \mathbb{E} \int_{[0, z]} B^2(z, x) (1 + m + \|\zeta\|_x)^2 \bar{M}(z, dx) \\ &\leq 2\Gamma(z) \left[(1 + m)^2 + \mathbb{E} \int_{[0, z]} \zeta^2 d\lambda \right] \leq 2\Gamma(z) \left[(1 + m)^2 + \int_{[0, z]} \|\zeta\|_x^2 \lambda(dx) \right]. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера и условие (2.3), имеем

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| I_{[0, L_m]}^{(z)} \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_x) A(z, dx) \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} I_{[0, L_m]}^{(z)} \left(\int_{[0, z]} |\tilde{a}(z, x, \zeta_x) \bar{A}(z, dx)| \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E} I_{[0, L_m]}^{(z)} \left(\int_{[0, z]} B(z, x) \bar{A}(z, dx) \right)^2 (1 + \|\eta\|_z + \|\zeta\|_z)^2 \\ &\leq 2\Gamma^2(z) \left[(1+m)^2 + \mathbb{E} \int_{[0, z[} \zeta^2 d\lambda \right] \leq 2\Gamma^2(z) \left[(1+m)^2 + \int_{[0, z[} \|\zeta\|_x^2 \lambda(dx) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.5).

Снова применяя свойства стохастического интеграла по сильному мартингалу, неравенство Гёльдера и учитывая условие (2.4), имеем

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx) - \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta'_x) M(z, dx) \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \int_{[0, z]} B^2(z, x) \|\zeta - \zeta'\|_x^2 \bar{M}(z, dx) \\ &\leq \mathbb{E} \int_{[0, z]} B^2(z, x) \bar{M}(z, dx) \int_{[0, z[} |\zeta - \zeta'|^2 d\lambda \leq \Gamma(z) \int_{[0, z[} \|\zeta - \zeta'\|_x^2 \lambda(dx), \\ &\mathbb{E} \left| \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_z) A(z, dx) - \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta'_z) A(z, dx) \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left(\int_{[0, z]} B(z, x) \bar{A}(z, dx) \right)^2 \int_{[0, z[} |\zeta - \zeta'|^2 d\lambda \leq \Gamma^2(z) \int_{[0, z[} \|\zeta - \zeta'\|_x^2 \lambda(dx). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.6). Лемма 3 доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3. Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стохастические интегральные уравнения

$$\zeta^{(m)}(z) = I_{[0, L_m]}^{(z)} \mathbf{J}(z, \zeta^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Определим семейство случайных полей

$$\zeta^{(m, 0)}(z) = 0, \quad \zeta^{(m, k)}(z) = I_{[0, L_m]}^{(z)} \mathbf{J}(z, \zeta^{(m, k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из неравенства (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} \|\zeta^{(m, k+1)}\|_z^2 &\leq C(z, m) + K(z) \int_{[0, z[} \|\zeta^{(m, k)}\|_x^2 \lambda(dx) \\ &\leq C(z, m) + K(z) C(z, m) \int_{[0, z[} \lambda(dx) + \dots \\ &\quad + K^k(z) C(z, m) \int_{[0, z[} \lambda(dx^{(1)}) \int_{[0, x^{(1)}[} \lambda(dx^{(2)}) \dots \int_{[0, x^{(k-1)}[} \lambda(dx^{(k)}). \end{aligned}$$

Применяя теорему 2.1 из работы [11], получаем неравенство

$$\|\zeta^{(m, k+1)}\|_z^2 \leq C(z, m) \exp\{K(z) \lambda([0, z])\}.$$

Согласно неравенству (2.6) и теореме 2.1 из [11]

$$\begin{aligned} & \|\zeta^{(m,k+\ell)} - \zeta^{(m,k)}\|_z^2 \\ & \leq K(z) \int_{[0,z[} \|\zeta^{(m,k+\ell-1)} - \zeta^{(m,k-1)}\|_x^2 \lambda(dx) \\ & \leq K^k(z) \int_{[0,z[} \lambda(dx^{(1)}) \int_{[0,x^{(1)}[} \lambda(dx^{(2)}) \cdots \int_{[0,x^{(\ell-1)}[} \|\zeta^{(m,\ell)}\|_{x^{(\ell)}}^2 \lambda(dx^{(\ell)}) \\ & \leq C(z, m) \exp\{K(z)\lambda([0, z])\} \frac{1}{k!} K^k(z) \lambda^k([0, z]). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_k \|\zeta^{(m,k)}\|_z < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_\ell \|\zeta^{(m,k+\ell)} - \zeta^{(m,k)}\|_z = 0$$

для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$. В силу полноты пространства Ξ_λ^* существует такое поле $\zeta^{(m)} \in \Xi_\lambda^*$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\zeta^{(m,k)} - \zeta^{(m)}\|_z = 0.$$

Очевидно, что

$$\text{l. i. m.}_{k \rightarrow \infty} \zeta^{(m,k)}(z) = \zeta^{(m)}(z) \quad \text{и} \quad \text{l. i. m.}_{k \rightarrow \infty} \mathbf{J}(z, \zeta^{(m,k)}) = \mathbf{J}(z, \zeta^{(m)})$$

согласно неравенству (2.6). Следовательно, $\zeta^{(m)}$ является решением уравнения (2.7).

Учитывая свойства семейства линий остановки $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$, имеем существование такого поля $\zeta \in \Xi_\lambda$, что $\mathbf{I}_{[0, L_m]}^{(z)}(\zeta(z) - \zeta^{(m)}(z)) = 0$ п.н. для любых $z \in \mathbb{R}_+^2$, $m \in \mathbb{N}$. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{[0, L_m]}^{(z)} \zeta(z) &= \zeta^{(m)}(z) = \mathbf{I}_{[0, L_m]}^{(z)} \left[\int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_z^{(m)}) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x^{(m)}) M(z, dx) \right] \\ &= \mathbf{I}_{[0, L_m]}^{(z)} \left[\int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_z) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx) \right], \end{aligned}$$

то

$$\zeta(z) = \int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_x) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx)$$

п.н. для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$. Таким образом, поле ζ является решением уравнения (2.1). Докажем его единственность.

Пусть $\zeta, \zeta' \in \Xi_\lambda$, ζ и ζ' – решения уравнения (2.1). Определим линии остановки

$$\widehat{L}_n(\omega) = \text{debut}\{(x, \omega) : \|\zeta(\cdot, \omega)\|_x \vee \|\zeta'(\cdot, \omega)\|_x \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда по неравенству (2.6)

$$\|\mathbf{I}_{[0, L_m] \cap [0, \widehat{L}_n]}(\zeta - \zeta')\|_z^2 \leq K(z) \int_{[0, z[} \|\mathbf{I}_{[0, L_m] \cap [0, \widehat{L}_n]}(\zeta - \zeta')\|_x^2 \lambda(dx)$$

для любых $z \in \mathbb{R}_+^2$ и $m \in \mathbb{N}$. Поэтому $\|\mathbf{I}_{[0, L_m] \cap [0, \widehat{L}_n]}(\zeta - \zeta')\|_z^2 = 0$ согласно теореме 3.1 из работы [11]. Так как

$$\bigcup_{m, n=1}^{\infty} [0, L_m] \cap [0, \widehat{L}_n] = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega,$$

то ζ' – модификация поля ζ . Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнено условие (2.3) и существуют такие $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -измеримые случайные поля $B_n(z, x, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, что*

- 1) *если $\|g\|_z \vee \|g'\|_z \leq n$, то $|a(z, x, g) - a(z, x, g')| \leq B_n(z, x) \|g - g'\|_z$;*
- 2) *если $\|g\|_x \vee \|g'\|_x \leq n$, то $|b(z, x, g) - b(z, x, g')| \leq B_n(z, x) \|g - g'\|_x$;*
- 3) $\int_{[0, z]} B_n(z, x) \bar{A}(z, dx) + \int_{[0, z]} B_n^2(z, x) \bar{M}(z, dx) \leq \Gamma_n(z)$, *где $(\Gamma_n(z), z \in \mathbb{R}_+^2)$ – неслучайные функции, $0 \leq \Gamma_n(z) \leq \Gamma_n(z')$ для $z \leq z'$.*

Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции $(x, g) \mapsto \vartheta_n(x, g): \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{X}_\lambda \mapsto \mathbb{X}_\lambda$, $n \in \mathbb{N}$, системой соотношений

$$\vartheta_n(x, g) = g_x \quad \text{при} \quad \|g\|_x \leq n, \quad \vartheta_n(x, g) = n \|g\|_x^{-1} g_x \quad \text{при} \quad \|g\|_x > n.$$

Заметим, что $(x, g) \mapsto \vartheta_n(x, g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{X}_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{X}_\lambda)$ и справедливы неравенства

$$\|\vartheta_n(x, g)\|_x \leq n \wedge \|g\|_x \quad \text{и} \quad \|\vartheta_n(x, g_1) - \vartheta_n(x, g_2)\|_x \leq \|g_1 - g_2\|_x.$$

Пусть

$$a_n(z, \omega, x, g) = a(z, \omega, x, \vartheta_n(z, g)), \quad b_n(z, x, \omega, g) = b(z, x, \omega, \vartheta_n(x, g)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что функции $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ удовлетворяют таким же условиям измеримости, что и $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$. Кроме того, они удовлетворяют условию (2.3) и

$$\begin{aligned} |a_n(z, x, g) - a_n(z, x, g')| &\leq B_n(z, x) \|g - g'\|_z, \\ |b_n(z, x, g) - b_n(z, x, g')| &\leq B_n(z, x) \|g - g'\|_x \end{aligned}$$

для любых $g, g' \in \mathbb{X}_\lambda$.

Согласно теореме 1 уравнение

$$\xi^{(n)}(z) = \eta(z) + \int_{[0, z]} a_n(z, x, \xi_z^{(n)}) A(z, dx) + \int_{[0, z]} b_n(z, x, \xi_x^{(n)}) M(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad (2.8)$$

имеет единственное решение $\xi^{(n)} \in \Xi_\lambda$. Очевидно, что $\zeta^{(n)} = \xi^{(n)} - \eta$ является решением уравнения

$$\zeta^{(n)}(z) = \int_{[0, z]} \tilde{a}_n(z, x, \zeta_z^{(n)}) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}_n(z, x, \zeta_x^{(n)}) M(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad (2.9)$$

где $\tilde{a}_n(z, x, g) = a_n(z, x, g + \eta)$, $\tilde{b}_n(z, x, g) = b_n(z, x, g + \eta)$.

Пусть семейство линий остановки $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ определено соотношением (2.2) и

$$L'_n(\omega) = \text{debut}\{(x, \omega) : \|\xi^{(n)}(\cdot, \omega)\|_x \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно неравенству (2.5)

$$\|\mathbf{I}_{[0, L_m]} \zeta^{(n)}\|_z^2 \leq C(z, m) + K(z) \int_{[0, z]} \|\mathbf{I}_{[0, L_m]} \zeta^{(n)}\|_x^2 \lambda(dx).$$

Следовательно, по тереме 3.1 из работы [11]

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{I}_{[0, L_m]} \zeta^{(n)}\|_z^2 < \infty \quad \text{для любых} \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n(z, x, \zeta_z^{(n)}) &= \tilde{a}_{n+1}(z, x, \zeta_z^{(n)}) & \text{для } z \in [0, L'_n] \cap [0, L_m], \\ \tilde{b}_n(z, x, \zeta_x^{(n)}) &= \tilde{b}_{n+1}(z, x, \zeta_x^{(n)}) & \text{для } x \in [0, L'_n] \cap [0, L_m].\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}& I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}^{(z)} |\zeta^{(n)}(z) - \zeta^{(n+1)}(z)|^2 \\ & \leq 2 \left| \int_{[0, z]} I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}^{(z)} [\tilde{a}_{n+1}(z, x, \zeta_z^{(n)}) - \tilde{a}_{n+1}(z, x, \zeta_z^{(n+1)})] A(z, dx) \right|^2 \\ & \quad + 2 \left| \int_{[0, z]} I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}^{(x)} [\tilde{b}_{n+1}(z, x, \zeta_x^{(n)}) - \tilde{b}_{n+1}(z, x, \zeta_x^{(n+1)})] M(z, dx) \right|^2.\end{aligned}$$

Аналогично неравенству (2.6)

$$\|I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}(\zeta^{(n)} - \zeta^{(n+1)})\|_z^2 \leq \widehat{K}(n, z) \int_{[0, z]} \|I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}(\zeta^{(n)} - \zeta^{(n+1)})\|_x^2 \lambda(dx)$$

и, значит, $\|I_{[0, L_m] \cap [0, L'_n]}(\zeta^{(n)} - \zeta^{(n+1)})\|_z^2 = 0$ для любых z, n, m . Следовательно, $\|\xi^{(n)}\|_x = \|\xi^{(n+1)}\|_x$ для $x \in [0, L_m] \cap [0, L'_n]$ и поэтому $\llbracket 0, L'_n \rrbracket \subset \llbracket 0, L'_{n+1} \rrbracket$.

Теперь заметим, что для $m < n$

$$\begin{aligned}P\{z \notin [0, L'_n]\} &\leq P\{\|\xi^{(n)}\|_z \geq n\} \leq P\{I_{[0, L_m]}^{(z)} \|\zeta^{(n)}\|_z \geq n - m\} + P\{z \notin [0, L_m]\} \\ &\leq (n - m)^{-2} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|I_{[0, L_m]} \zeta^{(n)}\|_z^2 \lambda([0, z]) + P\{z \notin [0, L_m]\}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{z \notin [0, L'_n]\} \leq P\{z \notin [0, L_m]\}$$

для любых z и m и, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{z \notin [0, L'_n]\} = 0$ для любого z . Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \llbracket 0, L'_n \rrbracket = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Поэтому существует такое поле $\zeta \in \Xi_\lambda$, что $I_{[0, L'_n]}^{(z)}(\zeta^{(n)}(z) - \zeta(z)) = 0$ п.н. для любого z .

Так как

$$\begin{aligned}I_{[0, L'_n]}^{(z)} \zeta(z) &= I_{[0, L'_n]}^{(z)} \zeta^{(n)}(z) \\ &= I_{[0, L'_n]}^{(z)} \left(\int_{[0, z]} \tilde{a}_n(z, x, \zeta_z^{(n)}) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}_n(z, x, \zeta_x^{(n)}) M(z, dx) \right) \\ &= I_{[0, L'_n]}^{(z)} \left(\int_{[0, z]} \tilde{a}(z, x, \zeta_z) A(z, dx) + \int_{[0, z]} \tilde{b}(z, x, \zeta_x) M(z, dx) \right)\end{aligned}$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, то ζ – решение уравнения (2.1). Очевидно, что $\xi = \zeta + \eta$ – решение уравнения (1.1). Докажем его единственность.

Предположим, что процессы $\xi, \xi' \in \Xi_\lambda$ являются решениями уравнения (2.1). Определим линии остановки

$$L''_n(\omega) = \text{debut}\{(x, \omega) : \|\xi(\cdot, \omega)\|_x \vee \|\xi'(\cdot, \omega)\|_x \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $[0, L''_n] \subset [0, L''_{n+1}]$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, L''_n] = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Аналогично неравенству (2.6)

$$\|I_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\xi - \xi')\|_z^2 \leq K_n(z) \int_{[0,z[} \|I_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\xi - \xi')\|_x^2 \lambda(dx),$$

и поэтому

$$\|I_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\xi - \xi')\|_z^2 = 0 \quad \text{для любых } z \in \mathbb{R}_+, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ξ' – модификация поля ξ . Теорема 2 доказана.

3. Решения с траекториями в $\mathbb{D}$. Заметим, что существуют такие $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -измеримые функции

$$(z, y, (x, \omega)) \mapsto \widehat{A}(z, y, x, \omega) \quad \text{и} \quad (z, y, (x, \omega)) \mapsto \widehat{M}(z, y, x, \omega),$$

что $\widehat{M}(z, y, x)$ является квадратической вариацией мартингала $M(z, \cdot) - M(y, \cdot)$, а $\widehat{A}(z, y, x)$ является вариацией поля $A(z, \cdot) - A(y, \cdot)$ на прямоугольнике $[0, x]$.

Следующее утверждение содержится в результатах работы [12].

ЛЕММА 4. Пусть $(z, (x, \omega)) \mapsto \beta(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и существуют число $p > 1$, возрастающая положительная функция $\varphi(\cdot): \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ и измеримые случайные поля $\bar{\beta}(z, x)$ и $\Lambda(z, x)$ со значениями в $\mathbb{R}_+$ такие, что

$$\int_0^1 \varphi(s) s^{-1-2/p} ds < \infty, \tag{3.1}$$

$$0 \leq \Lambda(y, [u, v]) \leq \Lambda(z, [u, v]) \quad \text{для } u \leq v, \quad y \leq z,$$

$$\widehat{M}(z, y, [u, v]) \leq \Lambda(z \vee y, [u, v]) \varphi^2(|z - y|), \tag{3.2}$$

$$|\beta(z, x) - \beta(y, x)| \leq \bar{\beta}(z \vee y, x) \varphi(|z - y|),$$

$$0 \leq \bar{\beta}(y, x) \leq \bar{\beta}(z, x) \quad \text{для } y \leq z,$$

$$\mathbb{E} \left(\int_{[0,z]} \bar{\beta}^2(z, x) \Lambda(z, dx) \right)^{p/2} < \infty.$$

Тогда существует модификация случайного поля $(\int_{[0,z]} \beta(z, x) M(z, dx), z \in \mathbb{R}_+^2)$ с траекториями в $\mathbb{D}_0$ и

$$\mathbb{E} \sup_{y \in [0,z]} \left| \int_{[0,y]} \beta(y, x) M(y, dx) \right|^p \leq C_{p,\varphi,z} \mathbb{E} \left(\int_{[0,z]} \bar{\beta}^2(z, x) \Lambda(z, dx) \right)^{p/2}.$$

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2, траектории поля η лежат в $\mathbb{D}$ и существуют такие возрастающие функции $\varphi(\cdot): \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ и $\varrho(\cdot): \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, число $p > 1$ и измеримые случайные поля $B(z, x)$ и $\Lambda(z, x)$ со значениями в $\mathbb{R}_+$, что выполнены условия (3.1), (3.2) и $\lim_{t \downarrow 0} \varrho(t) = 0$,

$$0 \leq B(y, x) \leq B(z, x) \quad \text{для } y \leq z,$$

$$\mathbb{E} \left(\int_{[0,z]} B^2(z, x) \Lambda(z, dx) \right)^{p/2} < \infty,$$

$$\widehat{A}(z, y, [u, v]) \leq \Lambda(z \vee y, [u, v]) \varrho(|z - y|),$$

$$\begin{aligned} |a(z, x, g) - a(y, x, g)| &\leq B(z \vee y, x) \varrho(|z - y|)(1 + \|g\|_z), \\ |b(z, x, g) - b(y, x, g)| &\leq B(z \vee y, x) \varphi(|z - y|)(1 + \|g\|_x). \end{aligned}$$

Тогда существует единственное в смысле неотличимости решение ξ уравнения (1.1) с траекториями в $\mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 существует единственное в смысле модификации решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (1.1). Определим линии остановки

$$L_n(\omega) = \text{debut}\{(x, \omega) : \|\xi(\cdot, \omega)\|_x \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$[0, L_n] = \{(x, \omega) : x \in [0, L_n(\omega)]\} \in \mathcal{P}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, L_n] = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega,$$

и

$$I_{[0, L_n(\omega)]}^{(x)} \|\xi(\cdot, \omega)\|_x \leq n$$

в силу непрерывности слева функции $x \mapsto \|\xi(\cdot, \omega)\|_x$.

Рассмотрим случайные поля

$$\zeta(z) = \int_{[0, z]} b(z, x, \xi_x) M(z, dx) \quad \text{и} \quad \zeta_n(z) = \int_{[0, z]} I_{[0, L_n]}^{(x)} b(z, x, \xi_x) M(z, dx).$$

Очевидно, что $I_{[0, L_n(\omega)]}^{(z)} (\zeta(z) - \zeta_n(z)) = 0$ п.н.

Применяя лемму 4 с $\beta(z, x) = I_{[0, L_n]}^{(x)} b(z, x, \xi_x)$ и $\bar{\beta}(z, x) = B(z, x)(1 + n)$, имеем существование модификации поля ζ_n с траекториями в $\mathbb{D}_0$. Следовательно, существует модификация поля ζ с траекториями в $\mathbb{D}$.

Из условий теоремы следует, что траектории поля $(\int_{[0, z]} a(z, x, \xi_x) A(z, dx), z \in \mathbb{R}_+^2)$ лежат в $\mathbb{D}_0$. Следовательно, решение ξ уравнения (1.1) имеет модификацию с траекториями в $\mathbb{D}$. Очевидно, что такое решение является единственным в смысле неотличимости. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гущин, “К общей теории случайных полей на плоскости”, *УМН*, **37:6** (1982), 53–74.
- [2] А. А. Гущин, Ю. С. Мишура, “Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов. I”, *Теория вероятн. и матем. стат.*, **42** (1990), 27–35.
- [3] M. Dozzi, “Two-parameter stochastic processes”, *Stochastic Processes and Related Topics* (Georgenthal, 1990), Math. Res., **61**, Akademie-Verlag, Berlin, 1991, 17–43.
- [4] М. Л. Клепцина, А. Ю. Веретенников, “О сильных решениях стохастических уравнений Ито–Вольтерра”, *ТВП*, **29:1** (1984), 154–158.
- [5] É. Pardoux, P. Protter, “Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients”, *Ann. Probab.*, **18:4** (1990), 1635–1655.
- [6] А. М. Колодий, “On conditions for existence of strong and weak solution of stochastic Volterra equations”, *Theory Stoch. Process.*, **2:3–4** (1996), 67–78.

- [7] C. Stricker, M. Yor, “Calcul stochastique dépendant d’un paramètre”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **45**:2 (1978), 109–133.
- [8] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.
- [9] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Управляемые случайные процессы*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [10] К. Деллашери, *Емкости и случайные процессы*, Мир, М., 1975.
- [11] L. Horváth, “Gronwall–Bellman type integral inequalities in measure spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **202**:1 (1996), 183–193.
- [12] Н. А. Колодий, “Некоторые свойства случайных полей связанных со стохастическими интегралами по сильным мартингалам”, *Вероятность и статистика*. 8, Зап. научн. сем. ПОМИ, **320**, ПОМИ, СПб., 2004, 80–96.

Н. А. Колодий

Волгоградский государственный университет

E-mail: nkolodii@mail.ru

Поступило

04.07.2007

Исправленный вариант

02.02.2009