Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Садуллаев, Об аналитических мультифункциях,
Матем. заметки, 2008, том 83, выпуск 5, 715–721

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:30:03

Об аналитических мультифункциях

А. С. Садуллаев

Для мультифункции $S \subset D_z \times \mathbb{C}_w$ дается критерий аналитичности (псевдогогнутости) в терминах плюрисубгармоничности функции $V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z)$, где $\rho(w, S_a)$ – расстояние от точки w до множества $S_a = S \cap \{z = a\}$.

Библиография: 21 название.

Рассмотрим область $G = D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ и в ней замкнутое множество $S \subset G$. Обозначим через S_{z^0} – пересечение S с комплексной прямой $\{z = z^0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множественная функция $F: z \rightarrow S_z, z \in D$, называется *мультифункцией*, определенной в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Если S псевдогогнуто в G , т.е. если множество $G \setminus S$ псевдовыпукло в окрестности S , то F называется *аналитической мультифункцией*.

Вторая часть определения обусловлена тем, что график аналитической или алгеброидной функции

$$S: a_0(z)w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z) = 0,$$

где $k \geq 1, a_j(z) \in \mathcal{O}(D), j = 0, 1, \dots, k$, является как раз такой мультифункцией в D .

Аналитические мультифункции или, что то же самое, псевдогогнутые подмножества G , являются естественным объектом изучения в теории аналитического продолжения, аналитических структур особых множеств голоморфных функций и т.п. Функциональные свойства таких мультифункций изучены в работах Ока [1], Нишино [2], Ямагучи [3], Слудковского [4]–[7], Берндтссона–Рансфорда [8] и др. Аналитическая структура мультифункций, в частности, аппроксимация псевдогогнутых множеств аналитическими множествами, исследованы в серии работ Александра и Вермера [9]–[12].

Аналитические мультифункции имеют ряд применений в теории равномерных алгебр и спектральном анализе. Более детально о них можно ознакомиться в работах Аупетита и Вермера [13]–[18].

1. Ниже нас будет интересовать вопрос об аналитичности произвольной мультифункции $F: z \rightarrow S_z$. Причем, аналитичность F мы будем связывать с плюрисубгармоничностью (Psh) функции

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z),$$

где $\rho(w, S_z)$ – расстояние от точки w до множества S_z при фиксированном $z \in D$. Функция $-\ln \rho(w, S_z)$ определяется просто и удобна в изучении F .

Если $z \rightarrow S_z$ аналитическая, т.е. если S – псевдовогнутое, то функция $V(z, w)$ является (Psh) в $G \setminus S$ (см., например, [19]). Обратное не ясно, так как функция $-\ln \rho(w, S_z)$ в отличие от $-\ln \rho((z, w), S)$ в общем случае не стремится к $+\infty$ при $(z, w) \rightarrow S$. Здесь $\rho((z, w), S)$ – расстояние (евклидово) от точки (z, w) до множества S .

Тем не менее, при $n = 1$ Слодковский [4] доказал взаимную эквивалентность следующих условий для ограниченных мультифункций:

- (i) $z \rightarrow S_z$ – аналитическая мультифункция;
- (ii) $-\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G)$;
- (iii) для любой области $U \subset D$ и для любой функции $\psi(z, w)$, плюрисубгармонической (Psh) в окрестности множества $(U \times \mathbb{C}) \cap S$, функция $\varphi(z) = \max_{w \in S_z} \psi(z, w)$ является субгармонической (Sh) в U ;
- (iv) для любого полинома $p(z, w)$ сужение $|p(z, w)|_S$ достигает своего максимума на границе ∂S .

Отсюда вытекает, что при $n = 1$ мультифункция $z \rightarrow S_z$ является аналитической тогда и только тогда, когда

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G \setminus S).$$

С другой стороны, для множества

$$S = (\mathbb{C}^2 \times \{|w| = 1\}) \cup (\{0\} \times \{|w| \leq 1\}) \subset \mathbb{C}^3$$

функция $-\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(\mathbb{C}^3 \setminus S)$, но S не является псевдовогнутым в точках $\{0\} \times \{|w| < 1\}$.

В вопросах аналитического продолжения (см., например, [20]) и спектральной теории большой интерес представляет случай, когда S плюриполярно в $\mathbb{C}^{n+1}$ или же более общий случай, когда сечения S_z нигде не плотны. Для таких тонких мультифункций имеет место следующий основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть мультифункция $S \subset D \times \mathbb{C}$ такова, что S_z не содержит внутренних точек для всех $z \in D$. Тогда она является аналитической тогда и только тогда, когда

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G \setminus S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема локальная, поэтому мы можем предположить, что $D = B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – единичный шар и $S \subset B \times \mathbb{C}$ ограничено, $S \subset \{|w| < R\}$. Так как плюрисубгармоничность функции $V(z, w)$ для псевдовогнутых множеств очевидна, то нам необходимо доказать обратное. Для этого нам достаточно установить псевдовыпуклость открытого множества

$$U_\varepsilon = \{(z, w) \in B \times \mathbb{C} : \rho((z, w), S) > \varepsilon\}$$

для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$. Ясно, что функция

$$W(z, w) = \sup\{V(z + \lambda, w + \mu) : (\lambda, \mu) \in B((0, 0), \varepsilon)\}$$

плюрисубгармонична в U_ε . Если мы покажем, что $W(z, w)$ стремится к $+\infty$ при $(z, w) \rightarrow \partial U_\varepsilon$, или, что то же самое $W(z, w) = +\infty$ при всех $(z, w) \in \partial U_\varepsilon$, то отсюда вытекало бы, что U_ε псевдовыпукло.

Предположим противное. Пусть для некоторой точки $(z^0, w^0) \in \partial U_\varepsilon$ значение $W(z^0, w^0) \neq +\infty$. Берем точку $(z', w') \in \partial B((z^0, w^0), \varepsilon) \cap S$. Тогда $|z' - z^0| = \varepsilon$, т.е. $w' = w^0$, ибо в противном случае сечение $B((z^0, w^0), \varepsilon) \cap \{z = z'\}$ было бы непустым и, значит, $W(z^0, w^0) = +\infty$ по определению $V(z, w)$. Опять из предположения $W(z^0, w^0) \neq +\infty$ следует, что $\rho(w^0, S_z) > c$ для всех $z \in B(z^0, \varepsilon)$ и для некоторой константы $c > 0$. Значит, существует $r > 0$ такое, что S_z не пересекает круг

$$|w - w^0| \leq r \quad \forall z \in B(z^0, \varepsilon). \quad (1)$$

Так как множество $S_{z'}$ нигде не плотно и содержит точку $w' = w^0$, то существует w'' такое, что

$$|w'' - w^0| < \frac{r}{3} \quad \text{и} \quad (z', w'') \notin S_{z'}. \quad (2)$$

Из замкнутости S следует, что существует окрестность $O \ni z'$ такая, что $(z, w'') \notin S$ для всех $z \in O$.

Рассмотрим плюрисубгармоническую в O функцию $u(z) = V(z, w'')$. Согласно (1), (2) имеем

$$\begin{aligned} u(z) &= -\ln \rho(w'', S_z) \leq -\ln \frac{2r}{3}, \quad z \in O \cap B(z^0, \varepsilon), \\ u(z') &= -\ln \rho(w'', S_{z'}) \geq -\ln \frac{r}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow z' \\ z \in B(z^0, \varepsilon)}} u(z) < u(z'),$$

что противоречит свойствам неразреженности Psh функций. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ называется *разреженным* в точке $x' \in \mathbb{R}^m$, если существует субгармоническая в некоторой окрестности $U \ni x'$ функция $u(x)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x' \\ x \in B \cap U}} u(x) < u(x').$$

Из известных критериев разреженности вытекает, что произвольный шар $B = B(x^0, \varepsilon)$ является неразреженным в любой граничной точке $x \in \partial B$, т.е. для любой субгармонической в окрестности $U \ni x'$ функции $u(x)$ имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x' \\ x \in B \cap U}} u(x) = u(x').$$

Такое свойство субгармонической функции тем более справедливо для плюрисубгармонических функций. Дальнейшие свойства разреженных и плюриразреженных множеств см. [21].

2. В следующей теореме условие нигде неплотности S_z , $z \in D$, в предыдущей теореме заменяется глобальной плюриполярностью S .

ТЕОРЕМА 2. Если $S \subset G$ – ограниченное плюриполярное множество такое, что

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G \setminus S),$$

то S является аналитической мультифункцией (псевдоголутым множеством).

Доказательство теоремы 2 вытекает из теоремы 1 и из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $z \rightarrow S_z$ – ограниченная мультифункция и $\text{cap } S_z$ – емкость (трансфинитный диаметр) S_z . Если

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G \setminus S),$$

то верхняя регуляризация $(\ln \text{cap } S_z)^* \in \text{Psh}(D)$, причем множество

$$P = \{\ln \text{cap } S_z < (\ln \text{cap } S_z)^*\}$$

плюриполярно в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся определением трансфинитного диаметра плоского множества $S \subset \mathbb{C}$. Пусть

$$V_k(S) = \max \left\{ \prod' |\xi_l - \xi_j|, \xi_j \in S \right\},$$

где $\prod'$ обозначает произведение по всем i, j таким, что $1 \leq i < j \leq k$. Тогда

$$\text{cap } S = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k^{2/k(k-1)}.$$

Для каждого фиксированного $z \in D$ мы положим $V_k(z) = V_k(S_z)$. Так как для любой фиксированной комплексной прямой $l \cap D \neq \emptyset$ сужение

$$V(z, w)|_{l \times \mathbb{C}} = -\ln \rho(w, S_z)|_{l \times \mathbb{C}}$$

плорисубгармонично в $(l \times \mathbb{C}) \cap (G \setminus S)$, то по сформулированному выше утверждению Слодковского для $n = 1$ вытекает, что пересечение $(l \times \mathbb{C}) \cap S$ является псевдовогнутым в $(l \cap D) \times \mathbb{C}$, и сужение $\ln V_k|_l$ является субгармонической функцией в $l \cap D$, откуда $\ln V_k \in \text{Psh}(D)$, причем

$$\ln \text{cap } S_z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k(k-1)} \ln V_k(z).$$

Значит, регуляризация $(\ln \text{cap } S_z)^* \in \text{Psh}(D)$ и множество $\{\ln \text{cap } S_z < (\ln \text{cap } S_z)^*\}$ плюриполярно в D . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $z \rightarrow S_z$ – ограниченная мультифункция такая, что

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z) \in \text{Psh}(G \setminus S).$$

Тогда S является плюриполярным в G тогда и только тогда, когда S_z является полярным для почти всех $z \in D$. Более того, из этих условий следует, что S_z – полярное для всех $z \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_z – полярное для почти всех $z \in D$. Для произвольной комплексной прямой $l \subset \mathbb{C}^n$, $l \cap D \neq \emptyset$, сужение

$$V(z, w)|_{l \times \mathbb{C}} \in \text{Psh}(l \times \mathbb{C}) \cap (G \setminus S)$$

и, следовательно, $(l \times \mathbb{C}) \cap S$ (случай $n = 1$) является псевдовогнутым множеством.

Отсюда вытекает, что любой полином p достигает по модулю своего максимума на границе $(l \times \mathbb{C}) \cap \partial S$. Но для такого множества S согласно доказанной в [22] теореме из полярности S_z для почти всех z вытекает его плюриполярность. Более того, из леммы 1 непосредственно следует, что $\text{cap } S_z = 0$ или, что тоже самое, S_z является полярным множеством для всех $z \in D$.

Вторая часть леммы – полярность сечений S_z для почти всех $z \in D$ для плюриполярного множества S – легко вытекает из определения плюриполярных множеств. Лемма доказана.

В связи с теоремой 1 возникает следующая задача, решение которой было бы важным в теории псевдогогнутых множеств и в описаниях геометрической структуры псевдовыпуклых областей.

ЗАДАЧА. Пусть $z \rightarrow S_z$ – мультифункция такая, что для любого $z \in D$ множество S_z полиномиально выпукло или, более общо, $G \setminus S$ является областью. Доказать, что $z \rightarrow S_z$ – аналитическая мультифункция тогда и только тогда, когда

$$V(z, w) \in \text{Psh}(G \setminus S).$$

Отметим, что для круговых псевдогогнутых множеств, т.е. для множеств $S \subset \mathbb{C}$ таких, что $S_z = \{|w| \leq R(z)\}$, $z \in D$, решение задачи непосредственно вытекает из свойств радиуса Гартогса рядов Гартогса.

3. Из доказанных выше теорем вытекает следующий своеобразный аналог теоремы Гартогса.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $z \rightarrow S_z$ – ограниченная мультифункция такая, что $S_z, z \in D$, не содержит внутренних точек. Если для каждой комплексной прямой $l \subset \mathbb{C}^n$, $l \cap D \neq \emptyset$, сужение $z \rightarrow S_z, z \in l \cap D$, – аналитическая, то мультифункция является аналитической в целом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замкнутости множества S вытекает, что

$$V(z, w) = -\ln \rho(w, S_z)$$

является полунепрерывной сверху функцией в $G \setminus S$. Остается показать, что для любой фиксированной комплексной прямой l сужение $V|_l$ субгармонично. Если l параллельна оси $0w$, т.е. если она имеет вид $z = z^0$, то субгармоничность сужения $V|_l = V(z^0, w)$ очевидна. Для других комплексных прямых $l \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ мы рассмотрим ее проекцию $\text{pr } l$ на комплексное пространство $\mathbb{C}_z^n \times \{w = 0\}$. По условию теоремы $z \rightarrow S_z, z \in \text{pr } l \cap D$, является аналитической мультифункцией. Отсюда функция

$$V(z, w) = -\ln \rho((z, w), S_z), \quad z \in \text{pr } l \cap D,$$

плюрисубгармонична в области $[(\text{pr } l \cap D) \times \mathbb{C}_w] \setminus S$. И, значит, $V|_l \in \text{Psh}(l \cap (G \setminus S))$. Теорема доказана.

ЗАДАЧА. Справедлив ли для мультифункций точный аналог теоремы Гартогса (о том, что функция, аналитическая по каждой переменной, голоморфна по совокупности переменных).

Пусть $S \subset D \times \mathbb{C}_w$ – произвольное (не обязательно ограниченное или замкнутое) множество такое, что для каждой фиксированной комплексной прямой

$$l = \{z_1 = z_1^0, \dots, z_{j-1} = z_{j-1}^0, z_{j+1} = z_{j+1}^0, \dots, z_n = z_n^0\}$$

сужение (пересечение) $S \cap \{l \times \mathbb{C}_w\}$ представляет собой аналитическую мультифункцию (значит, это пересечение является замкнутым и ограниченным множеством).

Является ли тогда S – аналитической мультифункцией? А если такое условие выполняется для всех комплексных прямых $l \subset \mathbb{C}^n$, $l \cap D \neq \emptyset$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Oka, “Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.”, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, **4** (1934), 93–98.
- [2] T. Nishino, “Sur les ensembles pseudoconcaves”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1962), 225–245.
- [3] H. Yamaguchi, “Sur une uniformité des surfaces constantes d’une fonction entière de deux variables complexes”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 417–433.
- [4] Z. Slodkowski, “Analytic set-valued functions and spectra”, *Math. Ann.*, **256**:3 (1981), 363–386.
- [5] Z. Slodkowski, “An analytic set-valued selection and its applications to the corona theorem, to polynomial hulls and joint spectra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **294**:1 (1986), 367–377.
- [6] Z. Slodkowski, “Analytic multifunctions: q -plurisubharmonic functions and uniform algebras”, *Proceedings of the conference on Banach algebras and several complex variables* (New Haven, Conn., 1983), *Contemp. Math.*, **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 243–258.
- [7] Z. Slodkowski, “An open mapping theorem for analytic multifunctions”, *Studia Math.*, **122**:2 (1997), 117–122.
- [8] B. Berndtsson, T. J. Ransford, “Analytic multifunction, the $\bar{\partial}$ equation and a proof of the corona theorem”, *Pacific J. Math.*, **124**:1 (1986), 57–72.
- [9] H. Alexander, J. Wermer, “On the approximation of singularity sets by analytic varieties”, *Pacific J. Math.*, **104**:2 (1983), 263–268.
- [10] H. Alexander, J. Wermer, “On the approximation of singularity sets by analytic varieties. II”, *Michigan Math. J.*, **32**:2 (1985), 227–235.
- [11] H. Alexander, J. Wermer, “Polynomial hulls with convex fibers”, *Math. Ann.*, **271**:1 (1985), 99–109.
- [12] H. Alexander, J. Wermer, “Polynomial hulls of sets with intervals as fibers”, *Complex Var. Theory Appl.*, **11**:1 (1989), 11–19.
- [13] B. Aupetit, J. Wermer, “Capacity and uniform algebras”, *J. Funct. Anal.*, **28**:3 (1978), 386–400.
- [14] B. Aupetit, *Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach*, Lecture Notes in Math., **735**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
- [15] J. Wermer, “Subharmonicity and hulls”, *Pacific J. Math.*, **58**:1 (1975), 283–290.
- [16] J. Wermer, “Capacity and uniform algebras”, *Harmonic Analysis in Euclidean Spaces*, part 1 (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Proc. Sympos. Pure Math., **XXXV**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, 445–449.
- [17] J. Wermer, “Potential theory and function algebras”, *Visiting scholars’ lectures – 1980* (Lubbock, TX, 1980), *Math. Ser.*, **14**, Texas Tech. Univ., Lubbock, TX, 1981, 113–125.
- [18] J. Wermer, “Maximum modulus algebras and singularity sets”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **86**:3–4 (1980), 327–331.

- [19] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, ч. 2: Функции нескольких переменных, Наука, М., 1965.
- [20] А. С. Садуллаев, Е. М. Чирка, “О продолжении функций с полярными особенностями”, *Матем. сб.*, **132**:3 (1987), 383–390.
- [21] А. С. Садуллаев, “Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях”, *УМН*, **36**:4 (1981), 53–105.
- [22] А. С. Садуллаев, “Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества”, *Матем. сб.*, **119**:1 (1982), 96–118.

А. С. Садуллаев

Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми,
Узбекистан

E-mail: sadullaev@mail.ru

Поступило

26.03.2007

Исправленный вариант

14.01.2008