Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Сатторов, О продолжении решений обобщенной системы Коши–Римана в пространстве, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 768–781

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:01:49

О продолжении решений обобщенной системы Коши–Римана в пространстве

Э. Н. Сатторов

Рассматривается задача аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши–Римана по ее значениям на части границы области.

Библиография: 20 названий.

Введение. В работе предлагается явная формула восстановления обобщенного потенциального вектора в области по его известным значениям на части границы, т.е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши для обобщенной системы Коши–Римана [1].

Пусть $\mathbb{R}^3$ – вещественное трехмерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2), y' = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = s + (y_3 - x_3)^2,$$

D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей ∂D , состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\partial D = S \cup T$. Относительно S будем предполагать, что каждый луч, выходящий из любой точки x области D , пересекает эту поверхность самое большее в l точках. $A(D)$ – совокупность вектор-функций, обобщенно-потенциальных в D и непрерывных на $D \cup \partial D = \bar{D}$. Решение задачи Коши будем строить в области D , когда данные Коши заданы на части S границы. Задача Коши для обобщенной системы Коши–Римана относится к числу некорректно поставленных задач (пример Адамара [2; с. 39]).

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно [3; с. 58]) и принадлежит классу $A(D)$ и данные Коши заданы точно. В этих условиях устанавливается явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтера и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений (теорема 2.1). Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным отклонением в равномерной метрике, при условии, что решение ограничено на части T границы заданным положительным числом, то предлагается явная формула регуляризации (теорема 2.2).

Метод получения указанных результатов основан на построении в явном виде матрицы фундаментального решения обобщенной системы Коши–Римана, зависящей от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на T , когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве

$y_3 > 0$ (лемма 1.2). Следуя Лаврентьеву и Ярмухамедову матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем *матрицей Карлемана* для полупространства [4], [5]. После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши. Полученная в теореме 2.1 формула продолжения позволяет сформулировать критерий разрешимости задачи Коши (теорема 3.1).

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х гг. XX века в работах [4], [6]–[8] и развивалось впоследствии в [5], [9]–[13].

Следует отметить, что обобщенная система Коши–Римана находит применение, например, в гидродинамике; в частности, система основных уравнений стационарного безвихревого движения жидкости является частным случаем данной системы.

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является пространственным аналогом обобщенной системы Коши–Римана [1] в области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши.

1. Постановка задачи и конструкция матрицы Карлемана. Рассмотрим систему

$$\operatorname{div} q + (H \cdot q) = 0, \quad \operatorname{rot} q + [q \times H] = 0, \quad (1.1)$$

где $H = (a, b, c)$ – заданный постоянный вектор.

Трехкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2, q_3)$ называется *обобщенным потенциалным вектором* в D , если он является решением эллиптической системы (1.1).

Если вектор $q(y)$ представить в виде $q(y) = \operatorname{grad} \varphi(y) - H\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – решение уравнения $\Delta \varphi - |H|\varphi = 0$, то он будет решением системы (1.1).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Известны данные Коши решения системы (1.1) на поверхности S :

$$q(y)|_S = f(y), \quad y \in S, \quad (1.2)$$

где S – часть границы области D , $f = (f_1, f_2, f_3)$ – заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить функцию $q(x)$ в D , исходя из заданной $f(y)$, т.е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши–Римана в пространственной области по ее значениям на гладком куске S границы.

Пусть вместо $f(y)$ задано ее приближение $f_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0, 1)$ (в метрике C). В данной работе строится семейство вектор-функций $q(x, f_\delta) = q_{\delta\sigma}$, зависящее от параметра σ , и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ семейство $q_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению задачи (1.1), (1.2).

Следуя [14], функцию $q_{\sigma\delta}(x)$ назовем *регуляризованным решением* задачи Коши для обобщенной системы Коши–Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

С использованием результатов работ [4], [5], [9], [10] по задаче Коши для уравнения Лапласа и Гельмгольца в данной статье построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе – регуляризованное решение задачи Коши для системы (1.1). В [15] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее

в [15], [16] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье речь идет о явных формулах, построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней случаях, когда $\partial D \setminus S$ – часть поверхности конуса, построена в [5]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S – произвольное множество положительной меры, построил Айзенберг [16]. Развивая идею Мергеляна [7], указавшего способ построения функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S – кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [15] построена матрица Карлемана для эллиптических систем.

В том случае, когда $q_3 = c = 0$ и q не зависит от y_3 , система (1.1) будет обобщенной системой Коши–Римана, теория которой разработана Векуа [17], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы получена Ишанкуловым [18]. Если $H = 0$, то $q(y)$ будет потенциальным вектором. В последнем случае система (1.1) (ряд аналитических фактов) изучена Мизесом [19], Бицадзе [20]. В настоящей заметке приводим аналогичную формулу продолжения для обобщенного потенциального вектора.

Рассмотрим матрицу

$$M_0(r; H) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 & -\alpha u_2 + \beta u_1 & \alpha u_3 + \gamma u_1 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & -\alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma v_4 & -\beta v_4 + \gamma v_1 \\ \alpha w_1 + \gamma w_3 & \beta w_1 + \gamma w_4 & -\alpha w_3 - \beta w_4 + \gamma w_1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0, & v_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_0, & w_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} + c \right) \Phi_0, \\ u_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_2} - b \right) \Phi_0, & v_2 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0, & w_2 &= 0, \\ u_3 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_0, & v_3 &= 0, & w_3 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0, \\ u_4 &= 0, & v_4 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_0, & w_4 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_0, \end{aligned}$$

причем $\Phi_0(r; k) = e^{-kr}/4\pi r$, $k^2 = |H|^2$, $n(\alpha, \beta, \gamma)$ – внешняя нормаль поверхности ∂D в точке y , $r = |y - x|$. Для $q(y) \in A(D)$ справедлива обобщенная пространственная интегральная формула Коши [1]

$$\int_{\partial D} M_0(r; H) q(y) dS_y \begin{cases} 0, & x \notin \overline{D}, \\ q(x), & x \in D, \end{cases} \quad (1.4)$$

справедливая и в том случае, когда D – кусочно-гладкая.

Следуя [5], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Матрицей Карлемана задачи (1.1), (1.2) называется 3×3 -матрица $M_\sigma(y, x, H)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) $M_\sigma(y, x; H) = M_0(r; H) + G_\sigma(y, x; H)$, где σ – положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y, x; H)$ по переменной y удовлетворяет системе (1.1) всюду в области D , $M_0(r; H)$ – матрица фундаментальных решений уравнений (1.1);

- 2) $\int_T |M_\sigma(y, x; H)| dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x \in D$, где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M = \|M_{ij}\|$, т.е. $|M_\sigma| = (\sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2)^{1/2}$, в частности, $|q| = (\sum_{i=1}^3 q_i^2)^{1/2}$ для вектора q .

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, обобщенная интегральная формула Коши остается верной, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

Функцию $\Phi(y, x; k)$ при $s \geq 0$, $v \geq 1$ определим равенством

$$\Phi(y, x; k) = [-2\pi^2 K(0)]^{-1} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(w)}{w} \right] \frac{\cos(ku)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3, \quad (1.5)$$

где $K(w)$ — целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w , $w = u + iv$, где u, v — действительные числа, и $K(0) \neq 0$; для всех $R > 0$ существует $C_R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R, \operatorname{Im} w \leq -C_R} (|K(w)| + |\operatorname{Im} w| |K'(w)| + |\operatorname{Im} w|^2 |K''(w)|) < \infty. \quad (1.6)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Тогда из (1.6) следует, что для всех $R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R} \{|K(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|) |K'(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|^2) |K''(w)|\} < \infty. \quad (1.7)$$

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{K(w)}{w} \right) &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}} \right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2 + u^2)} \\ &= \frac{(y_3 - x_3) \operatorname{Im} K(w) - \sqrt{\alpha^2 + u^2} \operatorname{Re} K(w)}{r^2 + u^2}, \end{aligned}$$

(1.5) имеет вид

$$-2\pi^2 K(0) \Phi(y, x; k) = \int_0^\infty \left\{ \frac{(y_3 - x_3) \operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - \operatorname{Re} K(w) \right\} \frac{\cos(ku)}{r^2 + u^2} du. \quad (1.8)$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} &K(y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}) - K(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}) \\ &= K(y_3 - x_3 + it\sqrt{\alpha^2 + u^2})|_{t=-1}^{t=1} = i\sqrt{\alpha^2 + u^2} \int_{-1}^1 K'(y_3 - x_3 + it\sqrt{\alpha^2 + u^2}) dt, \end{aligned}$$

из (1.7) и (1.8) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (1.5) абсолютно сходится.

Если $K(w) = 1$, то функция $\Phi(y, x; k)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi(y, x; k) \equiv \Phi_0(r; k) = \frac{1}{4\pi r} e^{-kr}.$$

Можно показать, что

$$\frac{e^{-kr}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\cos(ku)}{r^2 + u^2} du,$$

где $r^2 + u^2 = (y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2})(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2})$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 + u^2} &= -\frac{1}{2i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \left(\frac{1}{y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - \frac{1}{y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}}. \end{aligned}$$

Используя эти тождества, мы получим выражение для классического фундаментального решения уравнения Гельмгольца.

С целью построения приближенного решения задачи (1.1), (1.2) рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y, x; H) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 & -\alpha u_2 + \beta u_1 & \alpha u_3 + \gamma u_1 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & -\alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma v_4 & -\beta v_4 + \gamma v_1 \\ \alpha w_1 + \gamma w_3 & \beta w_1 + \gamma w_4 & -\alpha w_3 - \beta w_4 + \gamma w_1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_\sigma, & v_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_\sigma, & w_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} + c \right) \Phi_\sigma, \\ u_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_2} - b \right) \Phi_\sigma, & v_2 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_\sigma, & w_2 &= 0, \\ u_3 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_\sigma, & v_3 &= 0, & w_3 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_\sigma, \\ u_4 &= 0, & v_4 &= \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_\sigma, & w_4 &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_\sigma, \end{aligned}$$

где функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$ при $s > 0$, $\sigma \geq 0$ определяется из (1.5).

Из результатов работы [5] вытекает

ЛЕММА 1.1. *Функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$, определенная формулой (1.5), представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y, x; k) = \Phi_0(r; k) + g_\sigma(y, x; k), \quad (1.10)$$

где $g_\sigma(y, x; k)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) g - k^2 g &= 0, \quad y \in D, \\ \int_T \left(|\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n} \right| \right) dS_y &\leq C(k, D) \sigma \exp(-\sigma x_3), \end{aligned}$$

где $C(k, D)$ – постоянная.

Верна аналогичная лемма для системы (1.1).

ЛЕММА 1.2. *Матрица $M_\sigma(y, x; H)$ определенная формулой (1.9), является матрицей Карлемана задачи (1.1), (1.2), т.е. представима в виде*

$$M_\sigma(y, x; H) = M_0(r; H) + G_\sigma(y, x; H), \quad (1.11)$$

где $G_\sigma(y, x; H) = \|G_{ij\sigma}(y, x; H)\|_{3 \times 3}$ – матрица, определенная для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющая системе (1.1) во всем $\mathbb{R}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.1 и определения 1.1 следует (1.11). Так как $\Delta(\partial/\partial y)g - k^2g = 0$, $y \in D$, отсюда нетрудно видеть, что матрица $G_\sigma(y, x; H)$ удовлетворяет уравнению (1.1), т.е. она есть регулярное решение по переменной y , включая и точку $y = x$.

Из формулы (1.5) видно, что на $T(y_3 = 0)$ функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$, ее градиент $\nabla\Phi_\sigma(y, x; k)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех y_1, y_2 и $x \in \mathbb{R}^3$, $x > 0$. Тогда в силу (1.5) матрица $G_\sigma(y, x; H)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ также стремится к нулю при всех y_1, y_2 и $x \in \mathbb{R}^3$, $x > 0$. В силу определения 1.1 матрица $M_\sigma(y, x; H)$, определенная формулами (1.9), является матрицей Карлемана для области D и части T . Лемма доказана.

В (1.5) положим

$$K(w) = e^{\sigma w^2}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3,$$

и согласно (1.8) выделяя мнимую часть подынтегрального выражения, получим

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2 + \sigma \alpha^2 - \sigma y_3^2} \Phi_\sigma(y, x; k) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(u, y; x)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} \cos(ku) du, \quad (1.12)$$

где

$$\varphi_\sigma(u, y; x) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3. \quad (1.13)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Функция $\psi_\sigma(y, x; k)$ при $y \neq x$, определенная формулой

$$\psi_\sigma(y, x; k) = \frac{d\Phi_\sigma(y, x; k)}{d\sigma},$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца по переменной y всюду в $\mathbb{R}^3$, включая точку $y = x$.

Действительно, из (1.5) при $y \neq x$, дифференцируя (законность дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается присутствием множителя $e^{-\sigma u^2}$) по параметру σ , получаем

$$-2\pi^2 \frac{d\Phi_\sigma(y, x; k)}{d\sigma} = \int_0^\infty \operatorname{Im} K_1(w) \frac{\cos(ku)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du,$$

$$K_1(w) = e^{\sigma(w^2 - x_3^2)}(w + x_3), \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad w^2 - x_3^2 = (w - x_3)(w + x_3),$$

$$\operatorname{Im} K_1(w) = e^{\sigma y_3^2 - \sigma x_3^2 - \sigma u^2} (\sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_3 + x_3) \sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}).$$

Подынтегральная функция по переменным y, x бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^3$ при любом $\sigma > 0$. Теперь удовлетворение уравнению Гельмгольца $\psi_\sigma(y, x; k)$ по переменной y в $\mathbb{R}^3$ следует из леммы 1.1, где в качестве $K(w)$ берется $K_1(w)$.

2. Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву. Предположим, что $q(y) \in A(D)$ ограничена на ∂D :

$$|q(y)| \leq K, \quad y \in T, \quad (2.1)$$

где K – заданное положительное число.

При этом предположении верна обобщенная интегральная формула Коши [1]

$$q(x) = \int_{\partial D} M_{\sigma}(y, x; H) q(y) dS_y, \quad x \in D. \quad (2.2)$$

Обозначим

$$q_{\sigma}(x) = \int_S M_{\sigma}(y, x; H) q(y) dS_y, \quad x \in D. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $q(y) \in A(D)$ на части T границы ∂D удовлетворяет условию (2.1). Тогда для любого $x \in D$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$|q(x) - q_{\sigma}(x)| \leq KC(\sigma, H)e^{-\sigma x_3^2}, \quad x \in D, \quad (2.4)$$

где

$$C(\sigma, H) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2 + \pi}{2\sqrt{\pi}} + \frac{|H|}{\sqrt{\sigma}} \right). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из обобщенной формулы Коши (2.2) для любого $x \in D$ получаем

$$q(x) - q_{\sigma}(x) = J_{\sigma}(x), \quad J_{\sigma}(x) = \int_T M_{\sigma}(y, x; H) q(y) dS_y, \quad (2.6)$$

при этом из (2.1) следует

$$|J_{\sigma}(x)| \leq KT_{\sigma}(x), \quad T_{\sigma}(x) = \int_T |M_{\sigma}(y, x; H)| dS_y. \quad (2.7)$$

Согласно определению 1.1 из (1.9) имеем

$$|M_{\sigma}(y, x; H)| \leq \sqrt{7}(|H||\Phi_{\sigma}(y, x; k)| + |\text{grad } \Phi_{\sigma}(y, x; k)|).$$

Вычислим $\Phi_{\sigma}(y, x; k)$, $(\partial/\partial y_i)\Phi_{\sigma}(y, x; k)$ по формуле (1.12) и положим $y_3 = 0$. Тогда для $T_{\sigma}(x)$, определенного равенством (2.7), получаем

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(x) = & \frac{\sqrt{7}e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2} \left[|H| \int_T \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{2x_3\sigma}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{x_3}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) e^{-\sigma u} du \right) e^{-\sigma \alpha^2} dy_1 dy_2 \right. \\ & \left. + \int_T \left((|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_0^{\infty} \left(\frac{2\sigma}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \frac{1}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} \right) e^{-\sigma u^2} du \right) e^{-\sigma \alpha^2} dy_1 dy_2 \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Область T в интеграле заменим пространством $\mathbb{R}^2$ и полученные повторные интегралы преобразуем в трехкратные по всему $\mathbb{R}^3$, которые, в свою очередь, преобразуем введя сферические координаты; тогда будем иметь

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(x) & \leq \frac{\sqrt{7}e^{-\sigma x_3^2}}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{|H| + 2\sigma + x_3}{t^2 + x_3^2} t^2 e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^{\infty} \frac{x_3}{(t^2 + x_3^2)^2} t^2 e^{-\sigma t^2} dt \right] \\ & \leq \frac{\sqrt{7}e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi} \left[\frac{|H|\sqrt{\pi}}{\sigma} + \frac{2 + \pi}{2} \right], \quad \frac{2x_3 t}{t^2 + x_3^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} q_\sigma(x) = q(x), \quad (2.9)$$

причем предел достигается равномерно на компактах из D .

Предположим, что поверхность S задана уравнением $y_3 = h(y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \in T$, где h – однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова, при этом

$$\max_T h = a, \quad b = \max_T \left[1 + \left(\frac{dh}{dy_1} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dy_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Приведем результат, который позволяет вычислить $q(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $f(y)$ заданы ее непрерывные приближения $f_\delta(y)$ класса $C(S)$ с заданным отклонением $\delta > 0$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| \leq \delta. \quad (2.10)$$

Положим

$$q_{\sigma\delta}(x) = \int_S M_\sigma(y, x; H) f_\delta(y) dS, \quad (2.11)$$

где $\sigma = (1/a^2) \ln(K/\delta)$, $\delta < K$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $q(y) \in A(D)$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда для любого $x \in D$ справедливо неравенство

$$|q(x) - q_{\sigma\delta}(x)| \leq \psi(\sigma; H) K^{1-x_3^2/a^2} \delta^{x_3^2/a^2}, \quad (2.12)$$

где

$$\psi(\sigma; H) = \frac{3}{\pi} \left[2b\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}\sigma} |H| + \sqrt{\sigma} \right) + 2 + a(1 + 3b)\sqrt{\pi\sigma} \right]. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из обобщенной интегральной формулы Коши (2.2) для любого $x \in D$ получаем

$$q(x) - q_{\sigma\delta}(x) = J_\sigma(x) + \int_S [f(y) - f_\delta(y)] M_\sigma(y, x; H) dS_y,$$

где $J_\sigma(x)$ определяется формулой (2.6). Из (2.7) выводим неравенство

$$|q(x) - q_{\sigma\delta}(x)| \leq KC(\sigma) e^{-\sigma x_3^2} + \delta \int_S |M_\sigma(y, x; H)| dS_y, \quad (2.14)$$

где $C(\sigma)$ определяется из (2.5).

Утверждение теоремы следует из неравенства

$$\int_S |M_\sigma(y, x; H)| dS_y \leq K\psi(\sigma) e^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}, \quad \sigma > 0, \quad x_3 \geq 0, \quad (2.15)$$

где $\psi(\sigma)$ определяется из (2.13). Действительно, из (2.15), (2.14) получаем

$$|q(x) - q_{\sigma\delta}(x)| \leq KC(\sigma) e^{-\sigma x_3^2} + \psi(\sigma) \delta e^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2} = (K + \delta e^{\sigma\alpha^2}) \psi(\sigma) e^{-\sigma x_3^2},$$

где $\psi(\sigma) \geq C(\sigma)$. Выберем σ с уклонением $K = \delta e^{\sigma\alpha^2}$; тогда получаем неравенство (2.12). Докажем неравенство (2.15). Для этого оценим неравенства

$$\begin{aligned} \int_S |\Phi_\sigma(y, x; H)| dS_y &\leq \frac{be^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}}{\sqrt{\pi\sigma}}, \\ \int_S \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_\sigma(y, x; H) \right| dS_y &\leq \frac{e^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}}{\pi} [2 + \sqrt{\pi} a(1 + 3b)\sqrt{\sigma}], \quad \sigma > 0, \quad x_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

из которых следует (2.15). Поверхностный интеграл преобразуем в двумерный по области T , где $dS \leq b dy_1 dy_2$, и при оценке полученных повторных интегралов повторяем рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.1. Тогда из (1.12) и (1.13) получаем

$$\begin{aligned} \int_S |\Phi_\sigma(y, x; H)| dS_y &\leq \frac{be^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \int_T \left[\int_0^\infty \left(1 + |y_3 - x_3| \frac{|\sin(\sigma\sqrt{u^2 + \alpha^2})|}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) \frac{|\cos(ku)| e^{-\sigma u^2}}{u^2 + r^2} \right] e^{-\alpha^2} dy_1 dy_2 \\ &\leq \frac{be^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 = \frac{be^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}. \end{aligned}$$

Первое неравенство из (2.16) доказано. Для производной из (1.12) выводим формулу

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2} \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_\sigma(y, x; k) = T_1 + T_2,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1(y, x; \sigma) = -2\sigma e^{\sigma y_3^2 - \sigma \alpha^2} (y_i - x_i) \int_0^\infty \varphi_\sigma(y, x; u) e^{-\sigma u^2} \cos(ku) du, \\ T_2 &= T_2(y, x; \sigma) = e^{\sigma y_3^2 - \sigma \alpha^2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_\sigma(y, x; u) e^{-\sigma u^2} \cos(ku) du, \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3.$$

Получаем неравенство

$$\int_S \left(\left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_i} \right| \right) dS_y \leq \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2} (J_1 + J_2);$$

здесь

$$J_1 = J_1(y, x; \sigma) = \int_S |T_1| dS_y, \quad J_2 = J_2(y, x; \sigma) = \int_S |T_2| dS_y.$$

Второе неравенство (2.16) следует из оценки

$$|J_1| \leq 4\pi\sqrt{\pi\sigma} b e^{\sigma\alpha^2}, \quad |J_2| \leq 2\pi[2 + \sqrt{\pi} a\sqrt{\sigma}(1 + 3b)] e^{\sigma\alpha^2}. \quad (2.17)$$

Для J_1 имеем

$$|J_1| \leq 2\sigma b e^{\sigma\alpha^2 - \sigma x_3^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 = 2\sigma b e^{\sigma\alpha^2} \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} = 4\pi\sqrt{\pi\sigma} b e^{\sigma\alpha^2}.$$

Далее, по формуле (1.13) вычислим производную

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_\sigma}{dy_i} &= -\left(2\sigma y_3 + \frac{1}{u^2 + \alpha^2} + \frac{2}{u^2 + r^2}\right) \frac{(y_i - x_i) \sin(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{u^2 + r^2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{u^2 + r^2} + \frac{y_3 - x_3}{u^2 + \alpha^2}\right) \frac{(y_i - x_i) \cos(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{u^2 + r^2}, \quad i = 1, 2, \\ \frac{d\varphi_\sigma}{dy_3} &= -\left(-2\sigma(u^2 + \alpha^2) - 1 + \frac{y_3 - x_3}{u^2 + r^2}\right) \frac{\sin(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{(u^2 + r^2)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \\ &\quad - \left(\frac{1}{u^2 + r^2} + \sigma\right) \frac{2(y_3 - x_3) \cos(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{(u^2 + r^2)\sqrt{u^2 + \alpha^2}}.\end{aligned}$$

Учитывая $|\sin x| < |x|$, оценим $d\varphi_\sigma/dy_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\varphi_\sigma}{dy_i}\right| &\leq \frac{|y_i - x_i|}{u^2 + r^2} \left[2\sigma y_3 \left(\frac{2\sigma(u^2 + \alpha^2) + 1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} + \frac{2\sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} + \frac{|y_3 - x_3|}{2(u^2 + r^2)}\right) + \frac{1}{u^2 + r^2}\right], \\ \left|\frac{d\varphi_\sigma}{dy_3}\right| &\leq \frac{2\sigma y_3}{u^2 + r^2} \left(1 + 2\sigma(u^2 + \alpha^2) + \frac{y_3 - x_3}{u^2 + r^2}\right) + \frac{2(1 + \sigma)|y_3 - x_3|}{u^2 + r^2}.\end{aligned}$$

Теперь для J_2 выводим неравенство

$$\begin{aligned}J_2 &\leq \sigma e^{\sigma\alpha^2} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{a}{u^2 + \alpha^2} + \frac{2}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)} du dy_1 dy_2 \right. \\ &\quad \left. + 3ab \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 \right] \\ &= 4\pi\sigma e^{\sigma\alpha^2} \left[\int_0^\infty \left(\frac{a}{t^2} + \frac{2}{t} \right) t^2 e^{-\sigma t^2} dt + 3ab \int_0^\infty e^{-\sigma t^2} dt \right].\end{aligned}$$

Последнее неравенство из (2.17) и вместе с ним теорема 2.2 полностью доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} q_{\sigma\delta}(x) = q(x),$$

выполняющееся равномерно на компактах из D .

Построенный функционал $q_{\sigma\delta}(x, f_\delta)$, определенный на множестве $\{f_\delta\}$, где $f_\delta(x) \in C(S)$, $0 < \delta < \delta_0$, называется *регуляризацией по М. М. Лаврентьеву* решения задачи Коши. В [13] доказаны эти теоремы и для других областей.

3. Критерий разрешимости задачи Коши. Формула (2.9) позволяет сформулировать удобный и простой критерий разрешимости задачи Коши. С этой целью в (1.5), (1.12) функцию $e^{\sigma w^2}$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3$, заменим функцией $e^{\sigma w_1^2}$, где $w_1 = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3 + a$, $a = \max_{\overline{D}} y_3$, при этом

$$w_1^2 = -u^2 - \alpha^2 + 2i(y_3 - x_3 + a)\sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_3 - x_3 + a)^2.$$

Вновь определенную функцию $\Phi_\sigma(y, x; k)$, которая теперь зависит от разности $y - x$, обозначим через $\Phi_\sigma(y - x; k)$. Из леммы 1.1 заключаем, что функция $\Phi_\sigma(y - x; k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца для всех x, y , $y \neq x$, и для нее справедливо

представление (1.10), в котором $g_\sigma(y, x; k) = g_\sigma(y - x; k)$. Формулы (1.12), (1.13) для $\Phi_\sigma(y - x; k)$ имеют вид

$$2\pi^2 \Phi_\sigma(y - x; k) = e^{-\sigma(a^2 + \alpha^2 - (y_3 - x_3 + a)^2)} \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(y - x; u) \cos(ku) du}{u^2 + r^2}, \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_\sigma(y - x; u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - \frac{y_3 - x_3}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}, \quad \tau = 2\sigma(y_3 - x_3 + a).$$

Ясно, что для вектор-функции $q(y)$ класса $A(D) \cap C(\overline{D})$ справедлива обобщенная интегральная формула Коши (2.2), где в качестве $\Phi_\sigma(y, x; k)$ присутствует функция $\Phi_\sigma(y - x; k)$, определенная формулой (3.1).

Пусть $|y - x| = r \geq \delta_0 > 0$, где

$$0 \leq y_3 \leq a, \quad 0 < x_3 < 2a. \quad (3.2)$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ выводим очевидное неравенство

$$|\Phi_\sigma(y - x; k)| + |\text{grad } \Phi_\sigma(y - x; k)| = C_{\delta_0} \sigma e^{\sigma((y_3 - x_3 + a)^2 - a^2 - \alpha^2)}, \quad (3.3)$$

где постоянная C_{δ_0} не зависит от σ, x, y . Теперь из (3.3) и равенства

$$(y_3 - x_3 + a)^2 - a^2 = (y_3 - x_3)(y_3 - x_3 + 2a) \quad (3.4)$$

закключаем, что $\Phi_\sigma(y - x; k)$ и ее градиент стремятся к нулю для всех $x \in \mathbb{R}^3$ с условием (3.2), когда $y_3 = 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$, т.е. $M_\sigma(y - x; H)$ является матрицей Карлемана, когда полюс лежит в слое (3.2).

Пусть $q(y) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и $q(y) = f(y)$, где $f(y)$ – заданные функции класса $C(S)$ соответственно. Определим функцию $q_\sigma(x)$ равенством

$$q_\sigma(x) = \int_S M_\sigma(y - x; H) f(y) dS_y, \quad x \in D. \quad (3.5)$$

Из формулы Коши (2.2), где $\Phi_\sigma(y - x; k)$ определяется из (3.1), заключаем, что для любого $x \in D$ справедливо предельное равенство

$$q(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} q_\sigma(x), \quad (3.6)$$

которое согласно формуле Ньютона–Лейбница можно представить в эквивалентном виде

$$q(x) = \int_0^\infty \frac{dq_\sigma}{d\sigma}(x) d\sigma + q_1(x), \quad (3.7)$$

$$q_1(x) = \int_S M_1(y - x; H) f(y) dS_y, \quad \Phi_1 = \Phi_\sigma|_{\sigma=1}. \quad (3.8)$$

Обозначим

$$I(\sigma, x) \equiv \frac{dq_\sigma}{d\sigma}(x) = \int_S N_\sigma(y - x; H) f(y) dS_y; \quad (3.9)$$

здесь

$$N_\sigma(y - x; H) = \frac{dM_\sigma}{d\sigma}(y - x; H),$$

$$\psi_\sigma(y-x; k) \equiv \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x; k) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{Im}[e^{\sigma w_1^2 - \sigma a^2}(w_1 + a)] \frac{\cos(ku) du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \sigma > 0, \quad (3.10)$$

$$w_1 = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3 + a.$$

Функция $\psi_\sigma(y-x; k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца при $x, y \in \mathbb{R}^3$, включая точку $y = x$ (следствие 1.1), поэтому вектор-функция $I(\sigma, x)$ также удовлетворяет системе (1.1) в $\mathbb{R}^3$ при $\sigma > 0$. В этих обозначениях формула (3.7) для $x \in D$ принимает вид

$$q(x) = \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma + q_1(x), \quad (3.11)$$

которую, используя представление (1.10), где

$$\Phi_\sigma(y, x; k) = \Phi_\sigma(y-x; k) = \Phi_0(r; k) + g_\sigma(y-x; k), \quad x \in D, \quad \sigma = 1,$$

можно записать в виде

$$q(x) = \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma + E(x) + \int_S M_0(r; H) f(y) dS_y, \quad (3.12)$$

здесь функция $E(x)$ – регулярное решение системы (1.1) в $\mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$E(x) = \int_S G_1(y-x; H) f(y) dS_y.$$

Из (3.12) видим, что решение задачи Коши представляется в виде суммы обобщенного вектора и потенциала простого слоя.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $S \subset C^2, f(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, где S_0 – множество внутренних точек S (S – без края). Тогда для существования функции $q(y) \in A(D) \cap C(D \cup S_0)$ такой, что

$$q(y) = f(y), \quad y \in S_0, \quad (3.13)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in \mathbb{R}^3$ с условием $0 < x_3 < 2a$, сходилась (равномерно при $\delta < x_3 \leq 2a - \delta, 0 < \delta < a$) несобственный интеграл

$$\left| \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, \quad (3.14)$$

где $I(\sigma, x)$ определяется формулой (3.9).

Если условие (3.14) выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами (3.12) и (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $q(y) \in A(D) \cap C(D \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (3.13), где $f(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, и пусть ε – произвольное, $0 < \varepsilon < a$. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y_3 = \varepsilon\} \cap D, \quad S_\varepsilon^+ = S \cap \{y : y_3 \geq \varepsilon\}.$$

Так как вектор-функция $N_\sigma(y-x; H)$, определенная формулой (3.10), обобщенно потенциальна в $\mathbb{R}^3$, согласно пространственной интегральной формуле Коши, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \cup S_\varepsilon^+$, получаем

$$\int_{S_\varepsilon^+} f(y) N_\sigma(y-x; H) dS_y = \int_{S_\varepsilon} f(y) N_\sigma(y-x; H) dS_y.$$

Используя это равенство для $I(\sigma, x)$, имеем

$$I(\sigma, x) = \int_{S \setminus S_\varepsilon^+} f(y) N_\sigma(y - x; H) dS_y + \int_{S_\varepsilon} f(y) N_\sigma(y - x; H) dS_y. \quad (3.15)$$

Оценим интегралы. Элементарный расчет показывает, что для $x \in \mathbb{R}^3$ с условием (3.2) ($0 \leq y_3 \leq a$) при $\sigma \geq 1$ справедливо неравенство

$$|N_\sigma(y - x; H)| \leq \text{const} \cdot \sigma e^{\sigma(y_3 - x_3 + a)^2 - \sigma a^2 - \sigma \alpha^2}, \quad (3.16)$$

где постоянная не зависит от σ, x, y . Так как $y_3 \leq \varepsilon$ при $y \in S \setminus S_\varepsilon^+$, $y_3 = \varepsilon$, когда $y \in S_\varepsilon$ и $f(y), g(y) \in L(S)$, из (3.15), (3.4) выводим неравенство

$$|I(\sigma, x)| \leq C_\varepsilon \sigma e^{(\varepsilon - \delta)\delta\sigma}, \quad \sigma \geq 1, \quad \delta \leq x_3 \leq 2a - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{a}{2}.$$

Поскольку ε произвольно, выбирая $\delta > \varepsilon$, доказываем (3.14).

Достаточность. По заданным $f(y)$ определим функцию $q(x)$ формулой (3.12) для всех $x \in \mathbb{R}^3$ с условием (3.2). Из (3.14) заключаем, что первые два слагаемые в сумме представляют вектор-функцию, обобщенно потенциальную для всех $x \in \mathbb{R}^3$ с условием (3.2). Третье слагаемое как потенциал простого слоя определяет одну обобщенно потенциальную вектор-функцию в D и другую в $D_1 = \{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3, 0 < x_3 < 2a\}$. Поэтому правая часть (3.12) определяет две различные обобщенно потенциальные вектор-функции $q^+(x)$ и $q^-(x)$ в D и D_1 соответственно. Согласно аналогу формулы Сохоцкого–Племеля для системы (1.1) [1], при $x \in S_0$ имеет место равенство

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} [q^+(x_1) - q^-(x_2)] = f(x),$$

притом предельное соотношение выполняется равномерно относительно x на каждой компактной части S_0 . Пусть $a < x_3 < 2a$ ($y_3 \leq a$); тогда, учитывая (3.10), (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma &= \int_1^\infty \left[\int_S f(y) N_\sigma(y - x; H) dS_y \right] d\sigma \\ &= \int_S \left[\int_1^\infty \frac{dM_\sigma(y - x; H)}{d\sigma} f(y) d\sigma \right] dS_y \\ &= - \int_S M_1(y - x; H) f(y) dS_y = -q_1(x), \end{aligned}$$

где $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} M_\sigma(y - x; H) = 0$, так как

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Phi_\sigma(y - x; k) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{d\Phi_\sigma(y - x; k)}{dy_i} = 0,$$

$q_1(x)$ определяется формулой (3.8) (законность перестановочности интегралов следует из оценки (3.3) и равенства (3.4)). Теперь из (3.11) видим, что $q^-(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ с условием $a < x_3 < 2a$. Отсюда следует, что $q^-(x) \equiv 0$ для всех $x \in D_1$. Ясно, что $q^-(x)$ непрерывно дифференцируемо продолжается на $D_1 \cup S_0$. Поэтому $q^+(x)$ также гладко продолжается на $D \cup S_0$. Следовательно,

$$q^+(x) = f(x), \quad x \in S_0.$$

Положим $q(x) = q^+(x)$, $x \in D \cup S_0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. И. Оболашвили, “Пространственный аналог обобщенных аналитических функций”, *Сообщ. АН ГССР*, **73**:1 (1974), 20–24.
- [2] Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978.
- [3] А. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966.
- [4] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
- [5] Ш. Ярмухамедов, “О задаче Коши для уравнения Лапласа”, *Докл. АН СССР*, **235**:2 (1977), 281–283.
- [6] М. М. Лаврентьев, “О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **112**:2 (1957), 195–197.
- [7] С. Н. Мергелян, “Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа”, *УМН*, **11**:5 (1956), 3–26.
- [8] В. К. Иванов, “Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе”, *Дифференц. уравнения*, **1**:1 (1965), 131–136.
- [9] Ш. Ярмухамедов, “О продолжении решения уравнения Гельмгольца”, *Докл. РАН*, **357**:3 (1997), 320–323.
- [10] Ш. Ярмухамедов, “Регуляризация по Лаврентьеву решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца”, *Докл. АН РУз.*, 2001, № 3, 6–8.
- [11] О. И. Махмудов, “Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве”, *Изв. вузов. Матем.*, 2004, № 2, 43–53.
- [12] Э. Н. Сатторов, Д. А. Мардонов, “Задача Коши для системы уравнений Максвелла”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 851–861.
- [13] Э. Н. Сатторов, “Об аналитическом продолжении обобщенно аналитических функций в пространственной области по их граничным значениям на куске границы”, *Узбекск. матем. журн.*, 2007, № 1, 97–105.
- [14] А. Н. Тихонов, “О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации”, *Докл. АН СССР*, **151**:3 (1963), 501–504.
- [15] Н. Н. Тарханов, “О матрице Карлемана для эллиптических систем”, *Докл. АН СССР*, **284**:2 (1985), 294–297.
- [16] Л. А. Айзенберг, Н. Н. Тарханов, “Абстрактная формула Карлемана”, *Докл. АН СССР*, **298**:6 (1988), 1292–1296.
- [17] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, М., 1988.
- [18] Т. Ишанкулов, “Одна задача аналитического продолжения для обобщенно-аналитических функций”, *Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений*, Новосибирск, 1981, 37–43.
- [19] R. v. Mises, “Integral theorems in three-dimensional potential flow”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 599–611.
- [20] А. В. Бицадзе, “Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **17**:6 (1953), 525–538.

Э. Н. Сатторов

Самаркандский государственный университет

E-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Поступило

13.07.2006