Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Салахитдинов, М. Мирсабуров, Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 748–760

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:07:56

УДК 517.956.6

Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа

М. С. Салахитдинов, М. Мирсабуров

В работе исследована краевая задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Библиография: 6 названий.

1. Постановка задачи TF и единственность ее решения. Настоящая работа посвящена исследованию задачи с нелокальными условиями на характеристике и на линии вырождения для уравнения

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad (1)$$

где $m > 0$, в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x, y , ограниченной при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения (1).

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точку пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in J = (-1, 1)$ – интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) \in C^2[-1, c]$ – диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1, c]$ в множество точек отрезка $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1 - c)/(1 + c)$, $\delta = 2c/(1 + c)$.

ЗАДАЧА TF. Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$;
- 2) $u(x, y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] ($\tau'(x), \nu(x) \in H$; определение для $\tau(x)$ и $\nu(x)$ см. ниже) в области $\Omega^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$;
- 4) на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

5) выполнено

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(p(x))] = \psi(x), \quad -1 \leq x \leq c, \quad (4)$$

$$u(x, 0) - u(p(x), 0) = f(x), \quad -1 \leq x \leq c, \quad (5)$$

где

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left[\frac{m+2}{4} (1 + x_0) \right]^{2/(m+2)} \quad (6)$$

– аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in J$, заданные функции

$$f(x), \psi(x) \in C[-1, c] \cap C^{(1, \alpha)}(-1, c), \quad \varphi(x) \in C^{(0, \alpha)}[-1, 1],$$

причем

$$\varphi(x) = (1 - x^2) \overline{\varphi(x)}, \quad \overline{\varphi(x)} \in C^{(0, \alpha)}[-1, 1]$$

и в силу условия согласованности из (5) при $x = -1$ имеем

$$f(-1) = \varphi(-1) - \varphi(1) = 0.$$

Условия (4), (5) заданные соответственно на характеристике и на отрезке вырождения, являются аналогами условия Франкля [2].

Единственность решения задачи TF. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Задача TF при однородных краевых условиях $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv f(x) \equiv 0$ имеет только тривиальное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{J}, \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in J, \quad (8)$$

для уравнения (1) в области Ω^- дается формулой Даламбера:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}) + \tau(x + (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2})}{2} - \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int_{-1}^1 \nu \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) dt.$$

В силу этой формулы согласно (6) нетрудно убедиться, что

$$u[\theta(x)] = \frac{\tau(-1) + \tau(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^x \nu(z) dz, \quad (9)$$

$$u[\theta(p(x))] = \frac{\tau(-1) + \tau(p(x))}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{p(x)} \nu(z) dz. \quad (10)$$

В силу (9) и (10) из краевого условия (4) имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = \tau'(p(x))p'(x) - \nu(p(x))p'(x) + 2\psi'(x), \quad (11)$$

и условие (5) запишем в виде

$$\tau(x) - \tau(p(x)) = f(x), \quad x \in [-1, c]. \quad (12)$$

Продифференцировав соотношение (12), имеем

$$\tau'(x) = \tau'(p(x))p'(x) + f'(x), \quad x \in (-1, c). \quad (13)$$

В силу (13) соотношение (11) имеет вид

$$\nu(x) - \nu(p(x))p'(x) = f'(x) - 2\psi'(x), \quad x \in (-1, c). \quad (14)$$

Покажем, что если $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv f(x) \equiv 0$, то решение $u(x, y)$ задачи TF в области $\bar{\Omega}^+$ так же тождественно равно нулю. Допустим обратное; пусть в области $\bar{\Omega}^+$ $u(x, y) \neq 0$; следовательно, оно имеет положительный максимум и отрицательный минимум в $\bar{\Omega}^+$. В силу принципа Хопфа [3] искомая функция $u(x, y)$ своего положительного максимума во внутренних точках области Ω^+ не достигает; согласно соответствующему однородному краевому условию (3) его так же нет и на σ_0 .

Пусть искомая функция $u(x, y)$ своего положительного максимума достигает в некоторой внутренней точке отрезка $AB \setminus \{E\}$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (12) этот экстремум достигается в двух точках $(x_0, 0)$ и $(p(x_0), 0)$. Тогда в этих точках выполнено $\nu(x_0) < 0$ и $\nu(p(x_0)) < 0$ [4]; отсюда следует, что $\nu(x_0) - \nu(p(x_0))p'(x_0) < 0$, а это противоречит соответствующему однородному соотношению (14) при $x = x_0$; следовательно, экстремума нет на $AB \setminus \{E\}$.

Таким образом, свой положительный максимум искомая функция $u(x, y)$ в области $\bar{\Omega}^+$ достигает в точке $E(c, 0)$. Аналогично доказывается, что искомая функция $u(x, y)$ своего отрицательного минимума в области $\bar{\Omega}^+$ так же достигает в точке $E(c, 0)$. Полученное противоречие показывает что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}^+$.

2. Существование решения задачи TF.

ТЕОРЕМА 2. *Задача TF однозначно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \nu(t) \left\{ \ln \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right] \right. \\ & \left. - \ln \left[(1-xt)^2 + \frac{4t^2}{(m+2)^2} y^{m+2} \right] \right\} dt \\ & + \frac{(m+2)(1-R^2)}{4\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) [\eta(\xi)]^{-(m+2)/2} (r^{-2} + r_1^{-2}) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \xi^2 + 4(m+2)^{-2} \eta^{m+2} &= 1, \quad R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}, \\ \left. \begin{matrix} r_1^2 \\ r^2 \end{matrix} \right\} &= (\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} (y^{(m+2)/2} \pm \eta^{(m+2)/2})^2, \end{aligned}$$

дающей в области Ω^+ решение видоизмененной задачи N :

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in J,$$

для уравнения (1) имеем

$$\tau'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) dt + F(x), \quad (15)$$

где

$$F(x) = \frac{m+2}{2\pi} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \int_1^{-1} \varphi(\xi) [\eta(\xi)]^{-(m+2)/2} [1-2x\xi+x^2]^{-1} d\xi \right], \quad (16)$$

$F(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$. В силу (15) из условия (13) получим следующее сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\nu(x)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) dt \\ & - \int_{-1}^1 \nu(t) \left(\frac{1}{t-p(x)} - \frac{t}{1-p(x)t} \right) p'(x) dt = F_0(x), \quad x \in (-1, c), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$F_0(x) = \pi(F(x) - F(p(x))p'(x) - f'(x)) \in C^{(0,\alpha)}(-1, c). \quad (18)$$

Преобразуем уравнение (17) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^c \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) dt + \int_c^1 \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) dt \\ & - \int_{-1}^c \nu(t) \left(\frac{1}{t-p(x)} - \frac{t}{1-p(x)t} \right) p'(x) dt \\ & - \int_c^1 \nu(t) \left(\frac{1}{t-p(x)} - \frac{t}{1-p(x)t} \right) p'(x) dt = F_0(x), \quad x \in (-1, c). \end{aligned} \quad (19)$$

В интегралах с пределами $(c, 1)$ уравнения (19) сделаем замену

$$t = p(z), \quad dt = p'(z) dz, \quad z = -1, \quad t = 1, \quad z = c, \quad t = c,$$

и с учетом (14):

$$\nu(p(x))p'(x) = \nu(x) + 2\psi'(x) - f'(x),$$

преобразуем (19) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^c \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) dt - \int_{-1}^c \nu(z) \left(\frac{1}{p(z)-x} - \frac{p(z)}{1-xp(z)} \right) dz \\ & - \int_{-1}^c \nu(t) \left(\frac{1}{t-p(x)} - \frac{t}{1-p(x)t} \right) p'(x) dt \\ & + \int_{-1}^c \nu(z) \left(\frac{1}{p(z)-p(x)} - \frac{p(z)}{1-p(x)p(z)} \right) p'(x) dz = F_1(x), \quad x \in (-1, c). \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$F_1(x) = F_0(x) + \int_{-1}^c (2\psi'(z) - f'(z)) \left(\frac{1}{p(z) - x} - \frac{p(z)}{1 - xp(z)} \right) dz - \int_{-1}^c (2\psi'(z) - f'(z)) \left(\frac{1}{p(z) - p(x)} - \frac{p(z)}{1 - p(x)p(z)} \right) p'(x) dz.$$

Дальнейшее исследование задачи **TF** проведем в двух случаях: $c = 0$ и $c \neq 0$.

1) *Случай $c = 0$, $p(x) = -x$.* В этом случае уравнение (20) имеет вид

$$4 \int_{-1}^0 \nu(t) \left(\frac{1}{t^2 - x^2} - \frac{1}{1 - x^2 t^2} \right) t dt = F_1(x), \quad x \in (-1, 0). \quad (21)$$

Сделаем здесь замену переменного интегрирования $\xi = t^2$, $t = -\sqrt{\xi}$, $z = x^2$, $x = -\sqrt{z}$, получим следующее сингулярное интегральное уравнение Трикоми первого рода:

$$\int_0^1 \rho(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{1 - z\xi} \right) d\xi = F_2(z), \quad z \in (0, 1), \quad (22)$$

где $\rho(\xi) = \nu(-\sqrt{\xi})$, $F_2(z) = -F_1(-\sqrt{z})/2$.

Решение $\rho(z)$ уравнения (22) будем искать в классе функций Гёльдера $H(0, 1)$, ограниченных в точке $z = 1$ и неограниченных в точке $z = 0$, т.е. в классе $h(1)$. Применяя метод Карлемана [5], находим формулу обращения сингулярного интегрального уравнения (22):

$$\rho(z) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{z}} \frac{1+z}{1+\xi} \left(\frac{1}{\xi - z} + \frac{1}{1 - z\xi} \right) F_2(\xi) d\xi. \quad (23)$$

2) *Случай $c \neq 0$, $p(x) = \delta - kx$, где $\delta = 2c/(1+c)$, $k = (1-c)/(1+c)$.* В этом случае введем функцию

$$C(x, t) = \frac{p(t)p'(x)}{1 - p(x)p(t)} - \frac{t}{1 - xt} \in C([-1, c] \times [-1, c])$$

за исключением точки $(-1, -1)$, где она ограничена. Теперь уравнение (20) преобразуем к виду

$$\int_{-1}^c \left(\frac{1}{t - x} - \frac{t}{1 - xt} \right) \nu(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^c \left(\frac{1}{p(t) - x} + \frac{p'(x)}{t - p(x)} \right) \nu(t) dt + R[\nu] + \frac{1}{2} F_1(x), \quad (24)$$

где

$$R[\nu] = -\frac{1}{2} \int_{-1}^c \left(C(x, t) + \frac{p(t)}{1 - xp(t)} + \frac{tp'(x)}{1 - p(x)t} \right) \nu(t) dt \quad (25)$$

– регулярный оператор.

Подинтегральное выражение $1/(p(t) - x) + p'(x)/(t - p(x))$ правой части (24) при $t = c$, $x = c$ в силу равенства $p(c) = c$ имеет особенность первого порядка и поэтому это слагаемое выделено отдельно.

Уравнение (24) перепишем в виде

$$\int_{-1}^c \left(\frac{1}{t - x} - \frac{t}{1 - xt} \right) \nu(t) dt = F_3(x), \quad (26)$$

где

$$F_3(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^c \left(\frac{1}{p(t) - x} + \frac{p'(x)}{t - p(x)} \right) \nu(t) dt + R[\nu] + \frac{1}{2} F_1(x). \quad (27)$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{t - x} - \frac{t}{1 - xt} = \left(\frac{1+t}{1+x} \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right);$$

в силу этого тождества уравнение (26) перепишем в виде

$$\int_{-1}^c \left(\frac{1+t}{1+x} \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \nu(t) dt = F_3(x), \quad x \in [-1, c).$$

Обозначив $(1+t)\nu(t) = \rho(t)$, последнее уравнение преобразуем к виду

$$\int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \rho(t) dt = (1+x)F_3(x), \quad x \in [-1, c). \quad (28)$$

Решение уравнения (28) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1, c)$, ограниченных в точке $x = -1$ и допускающих особенность порядка ниже единицы в точке $x = c$, т.е. в классе $h(-1)$.

Для решения сингулярного интегрального уравнения (28) применим метод Карлемана [5]. С этой целью введем кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-zt} \right) \rho(t) dt, \quad z = x + iy. \quad (29)$$

В силу формул Сохоцкого–Племеля [5]:

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) - \Phi^-(x) &= \rho(x), \\ \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \rho(t) dt, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Phi^+(x) = \Phi(x + i0), \quad \Phi^-(x) = \Phi(x - i0).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = z\Phi(z), \quad \Phi^+\left(\frac{1}{x}\right) = x\Phi^-(x). \quad (31)$$

Преобразование $W = 1/z$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и, наоборот, при этом отрезок $(-1, c)$ переходит в Δ , где

$$\Delta = \begin{cases} \left(\frac{1}{c}, -1 \right), & c < 0, \\ (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{c}, +\infty \right), & c > 0. \end{cases}$$

Уравнение (28) в силу (30) имеет вид

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{(1+x)F_3(x)}{\pi i}, \quad x \in (-1, c). \quad (32)$$

Здесь, поменяв x на $1/x$, в силу (31) имеем

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{(1+x)}{i\pi x^2} F_3\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \Delta. \quad (33)$$

Введем функции

$$G(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in (-1, c) \cup \Delta, \\ 1, & \text{если } x \notin (-1, c) \cup \Delta, \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)F_3(x)}{i\pi}, & x \in (-1, c), \\ \frac{(1+x)F_3(1/x)}{i\pi x^2}, & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin (-1, c) \cup \Delta. \end{cases} \quad (34)$$

Тогда уравнения (32) и (33) можно объединить в одно уравнение

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + f_1(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (35)$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (26) эквивалентно свелось к задаче Римана о нахождении кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, исчезающей на бесконечности и на действительной оси $\text{Im } z = 0$, удовлетворяющей граничному условию (35).

Решим однородную задачу

$$X^+(x) = G(x)X^-(x), \quad x \in (-1, c) \cup \Delta; \quad (36)$$

одно из частных решений этого уравнения имеет вид

$$X(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-z} - \frac{z}{1-tz} \right) \ln G(t) dt \right\},$$

причем $X(1/z) = X(z)$.

Нетрудно убедиться, что

$$X(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\ln \frac{(c-z)(1-cz)}{(1+z)^2} + i \arg(c-z) - i \arg(-1-z) \right. \right. \\ \left. \left. + i \arg(1-cz) - i \arg(1+z) \right] \right\}.$$

Отсюда легко вычислить, что

$$X^-(x) = i \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(c-x)(1-cx)}}, \quad x \in (-1, c) \cup \Delta,$$

$$X^+(x) = -i \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(c-x)(1-cx)}}, \quad x \in (-1, c) \cup \Delta. \quad (37)$$

Таким образом, уравнение (35) в силу (36) преобразуем к виду

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{f_1(x)}{X^+(x)}.$$

Одно из частных решений этого уравнения есть

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(t) dt}{X^+(t)(t-z)} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-1}^c \frac{f_1(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + \int_{\Delta} \frac{f_1(t) dt}{X^+(t)(t-z)} \right), \quad (38)$$

где учтено, что $f_1(t) = 0$ при $t \notin (-1, c) \cup \Delta$. Далее рассмотрим два случая: $c < 0$ и $c > 0$.

Пусть $c < 0$ (случай $c > 0$ исследуется аналогично); тогда $\Delta = (1/c, -1)$. Во втором интеграле правой части (38), выполнив замену переменной интегрирования $t = 1/\xi$, с учетом (34) имеем

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \frac{(1+t)F_3(t)}{X^+(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-zt} \right) dt. \quad (39)$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = 0.$$

Это уравнение показывает, что функция $\chi(z) = \Phi(z)/X(z)$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z = 1$, $z = c$, которые могут быть только полюсами. Допуская, что голоморфная функция $\chi(z)$ имеет особенность порядка ниже единицы и исчезает на бесконечности, находим

$$\chi(z) = \frac{c_0}{(c-z)(1+z)}.$$

Таким образом, общее решение неоднородной задачи имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^c \frac{(1+t)F_3(t)}{i\pi X^+(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-zt} \right) dt + \frac{c_0 X(z)}{(c-z)(1+z)}. \quad (40)$$

Находим граничные значения

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) &= \frac{X^+(x)}{2\pi i} \frac{(1+x)F_3(x)}{X^+(x)} \\ &\quad + \frac{X^+(x)}{2\pi i} \int_{-1}^c \frac{(1+t)F_3(t)}{i\pi X^+(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) dt + \frac{c_0 X^+(x)}{(c-x)(1+x)}, \\ \Phi^-(x) &= -\frac{X^-(x)}{2\pi i} \frac{(1+x)F_3(x)}{X^+(x)} \\ &\quad + \frac{X^-(x)}{2\pi i} \int_{-1}^c \frac{(1+t)F_3(t)}{i\pi X^+(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) dt + \frac{c_0 X^-(x)}{(c-x)(1+x)}. \end{aligned}$$

Отсюда легко находим, что

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \\ &= \frac{(1+x)F_3(x)}{2\pi i} \left(1 + \frac{X^-(x)}{X^+(x)} \right) \\ &\quad - \frac{[X^+(x) - X^-(x)]}{2\pi^2} \int_{-1}^c \frac{(1+t)F_3(t)}{X^+(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) dt \\ &\quad + \frac{c_0 [X^+(x) - X^-(x)]}{(c-x)(1+x)}. \end{aligned} \quad (41)$$

В силу (37) соотношение (41) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(x) = & -\frac{1+x}{\pi^2} \int_{-1}^c \sqrt{\frac{(c-t)(1-ct)}{(c-x)(1-cx)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) F_3(t) dt \\ & - \frac{ic_0}{(c-x)(1+x)} \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(c-x)(1-cx)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

С учетом того, что $\rho(x)$ допускает особенность порядка ниже единицы в точке $x = c$, в (42) положим $c_0 = 0$.

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (28) имеет вид

$$\rho(x) = -\frac{1+x}{\pi^2} \int_{-1}^c \sqrt{\frac{(c-t)(1-ct)}{(c-x)(1-cx)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) F_3(t) dt, \quad x \in (-1, c). \quad (43)$$

Соотношение (43) в силу (27) с учетом $\rho(x) = (1+x)\nu(x)$ преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \nu(s) ds \int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \left(\frac{1}{\delta - ks - t} - \frac{k}{s - \delta + kt} \right) dt \\ & + R_1[\nu] + F_3^*(x), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} R_1[\nu] = & -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \nu(s) ds \int_{-1}^c \left(\sqrt{\frac{(c-t)(1-ct)}{(c-x)(1-cx)}} - 1 \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \\ & \times \left(\frac{1}{\delta - ks - t} - \frac{k}{s - \delta + kt} \right) dt \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^c \sqrt{\frac{(c-t)(1-ct)}{(c-x)(1-cx)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) R[\nu] dt, \end{aligned} \quad (45)$$

$$F_3^*(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \sqrt{\frac{(c-t)(1-ct)}{(c-x)(1-cx)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) F_1(t) dt. \quad (46)$$

Вычислив внутренний интеграл в (44), имеем

$$\begin{aligned} I(x, s) = & \int_{-1}^c \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \left(\frac{1}{\delta - ks - t} - \frac{k}{s - \delta + kt} \right) dt \\ = & \frac{1}{k(c-s) + c-x} \left[\ln \frac{c-x}{c-s} + \ln \frac{1+\delta-ks}{k(1+x)} \right] \\ & + \frac{k}{c-s+k(c-x)} \left[\ln \frac{c-x}{c-s} + \ln \frac{1-s}{1+x} \right] \\ & + \frac{1}{1-\delta x + \delta xs} \left[\ln \frac{c-s}{1-s} + \ln \frac{k(1+x)}{1-xc} \right] \\ & + \frac{k}{k+sx-\delta x} \left[\ln \frac{c-s}{1-s} + \ln \frac{1+x}{1-xc} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, в силу (47) уравнение (44) имеет вид

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \left\{ \frac{1}{c-s} \ln \frac{c-x}{c-s} \left(\frac{1}{k + (c-x)/(c-s)} + \frac{k}{1 + k(c-x)/(c-s)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\ln k}{c-s} \left[\frac{1}{k + (c-x)/(c-s)} - \frac{k}{1 + k(c-x)/(c-s)} \right] \right\} \nu(s) ds \\ & + R_2[\nu] + F_3^*(x), \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} R_2[\nu] = & R_1[\nu] - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^c \left[\frac{1}{\delta - ks - x} \ln \frac{1 + \delta - ks}{1 + x} - \frac{k}{s - \delta + kx} \ln \frac{1 - s}{k(1 + x)} \right. \\ & + \frac{1}{1 - \delta x + kxs} \ln \frac{k(c-s)(1+x)}{(1-s)(1-xc)} \\ & \left. + \frac{k}{k + sx - \delta x} \ln \frac{(c-s)(1+x)}{(1-s)(1-xc)} \right] \nu(s) ds. \end{aligned}$$

В уравнении (48) сделаем замену переменных $s = c - (1+c)e^{-t}$, $x = c - (1+c)e^{-y}$ и введем обозначение $\rho_1(y) = \nu[c - (1+c)e^{-y}]e^{-y/2}$; тогда уравнение (48) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_1(y) = & -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ (t-y) \left(\frac{1}{ke^{(y-t)/2} + e^{-(y-t)/2}} + \frac{k}{e^{(y-t)/2} + ke^{-(y-t)/2}} \right) \right. \\ & \left. - \ln k \left[\frac{1}{ke^{(y-t)/2} + e^{-(y-t)/2}} - \frac{k}{e^{(y-t)/2} + ke^{-(y-t)/2}} \right] \right\} \rho_1(t) dt \\ & + R_3[\rho_1] + F_4(y), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$R_3[\rho_1] = R_2[\rho_1 e^{y/2}]e^{-y/2}, \quad F_4(y) = F_3^*[c - (1+c)e^{-y}]e^{-y/2}.$$

Уравнение (49) перепишем в виде

$$\rho_1(y) = \int_0^\infty K(y-t)\rho_1(t) dt + R_3[\rho_1] + F_4(y), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2\pi^2} [K_1(k, x) + K_2(k, x) + K_3(k, x)], \\ K_1(k, x) &= \frac{x}{f(k, x)}, \quad K_2(k, x) = \frac{x}{f(k^{-1}, x)} = K_1(k^{-1}, x), \\ K_3(k, x) &= \ln k \left(\frac{1}{f(k, x)} + \frac{1}{f(k^{-1}, x)} \right), \\ f(k, x) &= ke^{x/2} + e^{-x/2}. \end{aligned} \quad (51)$$

Уравнение (50) является уравнением Винера–Хопфа [6].

Индексом уравнения (50) будет индекс выражения $1 - K^\wedge(x)$, где

$$\begin{aligned} K^\wedge(x) &= \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} K(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} K_1(k, t) dt + \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} K_2(k, t) dt + \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} K_3(k, t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Вычислим интегралы Фурье с помощью теории вычетов:

$$K_1^\wedge(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{ixt}}{f(k, t)} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N, \quad \text{где} \quad I_N = \int_{-N}^N \frac{te^{ixt}}{f(k, t)} dt.$$

Образует на комплексной плоскости $z = t + i\eta$ замкнутый контур в виде прямоугольника со сторонами

$$-N \leq t \leq N, \quad \eta = 0, \quad -N \leq t \leq N, \quad \eta = 4\pi, \quad t = \pm N, \quad 0 \leq \eta \leq 4\pi.$$

Внутри контура подинтегральная функция

$$\frac{ze^{ixz}}{f(k, z)} = \frac{ze^{ixz}}{ke^{z/2} + e^{z/2}}$$

имеет только две особые точки, полюсы $z_0 = -\ln k + i\pi$, $z_1 = -\ln k + i3\pi$; по теореме о вычетах интеграл по прямоугольнику равен

$$\int \frac{ze^{ixz}}{f(k, z)} dz = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{f}(z_0)) + \text{Res}(\tilde{f}(z_1))), \quad (53)$$

где

$$\tilde{f}(z) = \frac{ze^{ixz}}{f(k, z)}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \text{Res}(\tilde{f}(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \tilde{f}(z) = \frac{z_0 e^{ixz_0}}{i\sqrt{k}}, \\ \text{Res}(\tilde{f}(z_1)) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \tilde{f}(z) = -\frac{z_1 e^{ixz_1}}{i\sqrt{k}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Равенство (53) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \int_{-N}^N \frac{te^{ixt}}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} dt + i \int_0^{4\pi} \frac{(N + i\eta)e^{ix(N+i\eta)}}{ke^{(N+i\eta)/2} + e^{-(N+i\eta)/2}} d\eta \\ & + \int_N^{-N} \frac{(t + 4\pi i)e^{ix(t+4\pi i)}}{ke^{(t+4\pi i)/2} + e^{-(t+4\pi i)/2}} dt + i \int_{4\pi}^0 \frac{(-N + i\eta)e^{ix(-N+i\eta)}}{ke^{(-N+i\eta)/2} + e^{-(-N+i\eta)/2}} d\eta \\ & = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{f}(z_0)) + \text{Res}(\tilde{f}(z_1))). \end{aligned} \quad (55)$$

Первый интеграл левой части (55) есть I_N . Учитывая, что функция $f(z) = ke^{z/2} + e^{-z/2}$ имеет период $4\pi i$, получим, что третий интеграл равен

$$-e^{-4\pi x} I_N - 4\pi i e^{-4\pi x} \int_{-N}^N \frac{e^{ixt}}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} dt.$$

Несложная оценка остальных двух интегралов показывает, что они стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Переходя в равенстве (55) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим

$$(1 - e^{-4\pi x}) K_1^\wedge(k, t) - i4\pi e^{-4\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} dt = 2\pi i (\text{Res}(\tilde{f}(z_0)) + \text{Res}(\tilde{f}(z_1))), \quad (56)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} dt = \frac{\pi e^{-ix \ln k}}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x}, \quad (57)$$

который вычисляется по аналогичной методике [6; с. 18].

Умножив на $e^{2\pi x}$ равенство (56), с учетом (54) и (57) имеем

$$\begin{aligned} & (e^{2\pi x} - e^{-2\pi x}) K_1^\wedge(k, x) \\ &= i4\pi^2 e^{-2\pi x} \frac{e^{-i\pi \ln k}}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x} \\ &+ i2\pi e^{2\pi x} \left[\frac{(-\ln k + i\pi) e^{ix(-\ln k + i\pi)}}{i\sqrt{k}} - \frac{(-\ln k + i3\pi) e^{ix(-\ln k + i3\pi)}}{i\sqrt{k}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда после несложных преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned} K_1^\wedge(k, x) = & -\frac{\pi}{\sqrt{k}} \frac{\cos(x \ln k) \ln k}{\operatorname{ch} \pi x} + \frac{4\pi^2 e^{-2\pi x} \sin(x \ln k)}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x (e^{2\pi x} - e^{-2\pi x})} \\ & + \frac{2\pi^2 (e^{\pi x} - 3e^{-\pi x})}{\sqrt{k} (e^{2\pi x} - e^{-2\pi x})} \sin(x \ln k) \\ & + i \left[\frac{4\pi^2 e^{-2\pi x} \cos(x \ln k)}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x (e^{2\pi x} - e^{-2\pi x})} + \frac{2\pi^2 (e^{\pi x} - 3e^{-\pi x})}{\sqrt{k} (e^{2\pi x} - e^{-2\pi x})} \cos(x \ln k) \right. \\ & \left. + \frac{\pi \ln k}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x} \sin(x \ln k) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Из (58) очевидно, что

$$\operatorname{Re} K_1^\wedge(k, x) = O\left(\frac{1}{\operatorname{ch} \pi x}\right) \quad (59)$$

для достаточно больших $|x|$.

Так как $K_2(k, x) = K_1(k^{-1}, x)$, то

$$K_2^\wedge(k, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} K_2(k, t) dt = K_1^\wedge(k^{-1}, x), \quad \text{т.е.} \quad \operatorname{Re} K_2^\wedge(k, t) = O\left(\frac{1}{\operatorname{ch} \pi x}\right), \quad (60)$$

для достаточно больших $|x|$. Теперь из (59), (60) и с учетом равенства

$$K_3^\wedge(k, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} K_3(k, t) dt = \frac{\pi \ln k}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x} (e^{-ix \ln k} - k e^{ix \ln k}) \quad (61)$$

заключаем, что

$$\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x)) = 1 - O\left(\frac{1}{\operatorname{ch} \pi x}\right) > 0$$

для достаточно больших $|x|$; следовательно,

$$\operatorname{Ind}(1 - K^\wedge(x)) = \frac{1}{2\pi} [\arg(1 - K^\wedge(x))]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctg \frac{\operatorname{Im}(1 - K^\wedge(x))}{\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

т.е. изменение аргумента $1 - K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю [6]. Отсюда и из единственности решения задачи **TF** вытекает однозначная разрешимость (50), а значит, и задачи **TF**.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, М., 1985.
- [2] Ф. И. Франкль, “Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения”, *ПММ*, **20**:2 (1956), 196–202.
- [3] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981.
- [4] В. Ф. Волкодавов, “О единственности решения задачи ТН для одного уравнения смешанного типа”, *Волжск. матем. сб.*, 1970, № 11, 55–65.
- [5] Н. И. Мухелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*, Наука, М., 1968.
- [6] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.

М. С. Салахитдинов

Институт математики

и информационных технологий АН РУз, Ташкент

E-mail: makhmudsalakhitdinov@yahoo.com

Поступило

17.08.2005

Исправленный вариант

20.02.2009

М. Мирсабуров

Термезский государственный университет, Термиз

E-mail: mirsaburov@mail.ru