Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Калита, Регулярность по Морри нелинейных эллиптических систем высокого порядка при вырождении эллиптичности, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 198–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:52:03

УДК 517.956

РЕГУЛЯРНОСТЬ ПО МОРРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ

Е. А. Калита

Изучаются нелинейные эллиптические системы вида $\operatorname{div}^t A(x, D^s u) = 0$, $s + t$ четное, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, с естественным энергетическим пространством H^s . Устанавливается, что при $s > t$ решения из H^s принадлежат пространству Морри, причем морриевский показатель не стремится к нулю при вырождении эллиптичности. В случае $s = t$ аналогичный результат получен при добавочном структурном условии на систему.

Библиография: 5 названий.

Рассматриваются нелинейные эллиптические системы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, вида

$$\operatorname{div}^t A(x, D^s u) = 0, \quad (1)$$

$s + t$ четное, $s \geq t$, с естественным энергетическим пространством $H^s = W_2^s$. Для дивергентных ($s = t$) эллиптических систем со стандартными структурными условиями хорошо известно, что решение из H^s принадлежит пространству Морри H_a^s с некоторым $a < 0$. Здесь H_a^s – пространство функций из H^s , для которых конечна величина

$$\|u; H_a^s\| = \sup_{x, r} \left(r^a \int_{|y-x| < r} |D^s u(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Для уравнений второго порядка это было установлено еще Морри [1], для систем и уравнений высокого порядка см. [2], [3]. Также хорошо известно, что не существует $a < 0$, единого для всего класса систем: a существенно зависит от модуля эллиптичности системы и стремится к нулю при вырождении эллиптичности.

В данной работе устанавливается, что при $s > t$ ситуация иная: существует $a < 0$, зависящее только от s, t, n , такое, что решения из H^s принадлежат H_a^s . Для систем, коэффициенты которых дифференцируемы с сохранением структурных условий, решения принадлежат H_a^{s+1} . При $s = t$ указано добавочное структурное условие, при котором также существует $a < 0$, не зависящее от модуля эллиптичности системы. Аналогичный результат был известен для недивергентных уравнений второго порядка типа Кордеса [4], где решения из H^2 принадлежат H_{3-n}^2 .

В системе (1) u – функция размерности $N \geq 1$, функция $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn^s} \rightarrow \mathbb{R}^{Nn^t}$ удовлетворяет следующему структурному условию: при некотором нормирующем множителе $\varkappa > 0$ функция B , определяемая равенством

$$\Delta^m u + \operatorname{div}^t B(x, D^s u) = \varkappa \operatorname{div}^t A(x, D^s u), \quad m = \frac{1}{2}(s+t),$$

удовлетворяет оценке

$$|B(x, \xi)| \leq K|\xi|, \quad K < 1. \quad (2)$$

Здесь модуль обозначает евклидову метрику в пространстве соответствующей размерности: Nn^t для B и Nn^s для ξ .

Это условие обеспечивает коэрцитивность оператора $\operatorname{div}^t A(x, D^s u)$ в паре с оператором $\Delta^{(s-t)/2}$ в пространстве H^s . В дивергентном случае ($s = t$) оно равносильно стандартной паре структурных условий

$$(A(x, \xi), \xi) \geq \nu_1 |\xi|^2, \quad |A(x, \xi)| \leq \nu_2 |\xi|. \quad (3)$$

Действительно, если $s = t$, то $B(x, \xi) = \varkappa A(x, \xi) - \xi$ и по (3) находим

$$|B|^2 = |\xi|^2 - 2\varkappa(A, \xi) + \varkappa^2 |A|^2 \leq (1 - 2\varkappa\nu_1 + \varkappa^2 \nu_2^2) |\xi|^2.$$

При $\varkappa = \nu_1/\nu_2^2$ получаем (2) с $K^2 = 1 - \nu_1^2/\nu_2^2$. В обратную сторону, возводя (2) в квадрат, находим

$$(1 - K^2) |\xi|^2 + \varkappa^2 |A|^2 \leq 2\varkappa(A, \xi),$$

откуда следуют условия (3).

Для недивергентного скалярного оператора второго порядка $A_{ij}(x, u, Du) D_i D_j u$ оценка (2) равносильно условию Кордеса [4] на матрицу коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^n A_{ii} \geq \left((n-1+\varepsilon) \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Действительно, в этом случае $B(x, \xi) = \varkappa A_{ij} \xi_{ij} - \xi_{ii}$, что дает

$$\sup_{|\xi|=1} |B(x, \xi)|^2 = \sup_{|\xi|=1} ((\varkappa A_{ij} - \delta_{ij}) \xi_{ij})^2 = (\varkappa A_{ij} - \delta_{ij})^2 = \varkappa A_{ij}^2 - 2\varkappa A_{ii} + n.$$

Выражение достигает минимума при $\varkappa = A_{ii}/A_{ij}^2$ (в недивергентном случае, очевидно, можно допускать зависимость $\varkappa$ от x, u), так что $K^2 = n - (A_{ii})^2/A_{ij}^2$ и $K < 1$ равносильно (4).

Отметим, что если $K \rightarrow 1$ в (2), то эллиптичность может вырождаться. Так линейный оператор $\Delta^m u - K d^{2m} u / dx_1^{2m}$ удовлетворяет (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s > t$, $n \geq 4$. Тогда если $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ – решение системы (1), то $u \in H_{a, \text{loc}}^s(\Omega)$, где $a = a(s, t, n) < 0$ не зависит от K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $y \in \Omega$ обозначим $r = |x - y|$, $\omega(x) = \min\{r^a, \tau\}$, $a \in (3 - n, 0)$, $\tau > 0$, $B_R = \{x : r < R\}$, $R < \text{dist}(y, \partial\Omega)/3$, $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_{2R})$ – неотрицательная срезающая функция: $\varphi = 1$ в B_R , $|D^j \varphi| \leq c_j R^{-j}$, буквой c будем обозначать различные положительные константы, величина которых несущественна. Пусть $v = \varphi D^t \Delta^k u$ – вектор-функция размерности Nn^t , $k = (s - t)/2$; $w = \Delta^{-t}(\omega v) - P$, где Δ^{-t} – интегральный оператор с символом $(-|\zeta|^2)^{-t}$, векторный полином P степени $\deg P < 2t$ и размерности Nn^t определен условиями

$$\int_Q D^\alpha w \, dx = 0, \quad |\alpha| < 2t, \quad Q = B_{2R} \setminus B_R.$$

Обозначим еще $\|f\|_{\omega, G} = \|f; L_2(G; \omega)\|$; если $\omega \equiv 1$ или $G = \mathbb{R}^n$, то соответствующий индекс опускаем.

Подставляя в интегральное тождество для системы (1) пробную функцию $\text{div}^t(w\varphi)$, получаем по структурному условию на A

$$\int (D^t \Delta^k u + B(x, D^s u)) D^t \text{div}^t(w\varphi) \, dx = 0. \quad (5)$$

Для первого слагаемого, интегрируя по частям, находим

$$\int D^t \Delta^k u D^t \text{div}^t(w\varphi) \, dx = \int D^t \Delta^k u \Delta^t(w\varphi) \, dx \geq \|v\|_\omega^2 - \frac{c}{R} \|D^s u\|_Q \|D^{2t-1} w\|_Q,$$

где члены, содержащие производные φ , оценены по неравенству Пуанкаре. Для второго слагаемого согласно (2) и неравенству Юнга получаем

$$\int B D^t \text{div}^t(w\varphi) \, dx \leq \frac{K^2}{2} \|\varphi D^s u\|_\omega^2 + \frac{1}{2} \|D^t \text{div}^t w\|_{1/\omega}^2 + \frac{c}{R} \|D^s u\|_Q \|D^{2t-1} w\|_Q.$$

Из (5) получаем

$$\|v\|_\omega^2 - \frac{K^2}{2} \|\varphi D^s u\|_\omega^2 - \frac{1}{2} \|D^t \text{div}^t w\|_{1/\omega}^2 \leq \frac{c}{R} \|D^s u\|_Q \|D^{2t-1} w\|_Q. \quad (6)$$

Отметим, что $D^t \text{div}^t w = (D \Delta^{-1} \text{div})^t(\omega v)$. Вес $1/\omega$ принадлежит классу Макенхаупта A_2 [5] при $a \in (-n, n)$. Его A_2 -норма не зависит от τ , поскольку веса с различными τ переходят друг в друга при радиальном растяжении координат. Поэтому оператор $D \Delta^{-1} \text{div}$, являющийся композицией проекторов Рисса, ограничен в $L_2(\mathbb{R}^n; 1/\omega)$, и его норма зависит от τ . Следовательно,

$$\|D^t \text{div}^t w\|_{1/\omega} \leq c \|v\|_\omega.$$

Если y – точка Лебега функции $D^s u$, то все слагаемые в (6) ограничены равномерно по $\tau \rightarrow \infty$, откуда следует справедливость неравенства (6) с $\omega(x) = r^a$.

Далее будем считать, что y – точка Лебега $D^s u$ и $\omega(x) = r^a$.

Получим оценку оператора $D\Delta^{-1} \operatorname{div}$ в $L_2(\mathbb{R}^n; \sigma)$. Интегрируя по частям (на гладких финитных функциях f , плотных в $L_2(\mathbb{R}^n; \sigma)$), имеем

$$\begin{aligned} & \int |D\Delta^{-1} \operatorname{div} f|^2 \sigma \, dx \\ &= - \int \Delta^{-1} \operatorname{div} f (\sigma \operatorname{div} f + D\sigma D\Delta^{-1} \operatorname{div} f) \, dx \\ &= \int (f(\sigma D\Delta^{-1} \operatorname{div} f + D\sigma \Delta^{-1} \operatorname{div} f) - D\Delta^{-1} \operatorname{div} f D\sigma \Delta^{-1} \operatorname{div} f) \, dx. \end{aligned}$$

По неравенству Юнга

$$f(\sigma D\Delta^{-1} \operatorname{div} f + D\sigma \Delta^{-1} \operatorname{div} f) \leq \frac{1}{2}|f|^2 \sigma + \frac{1}{2}\sigma \left(D\Delta^{-1} \operatorname{div} f + \frac{D\sigma}{\sigma} \Delta^{-1} \operatorname{div} f \right)^2,$$

что влечет

$$\int |D\Delta^{-1} \operatorname{div} f|^2 \sigma \, dx \leq \int \left(|f|^2 \sigma + |\Delta^{-1} \operatorname{div} f|^2 \frac{|D\sigma|^2}{\sigma} \right) dx.$$

Для третьего слагаемого в (6) это дает

$$\|D^t \operatorname{div}^t w\|_{-a}^2 \leq \|v\|_a^2 + a^2 \sum_{j=0}^{t-1} \|(D\Delta^{-1} \operatorname{div})^j \Delta^{-1} \operatorname{div}(\omega v)\|_{-a-2}^2, \quad (7)$$

где через $\|\cdot\|_a$ обозначена норма в $L_{2,a} = L_2(\mathbb{R}^n; r^a)$. Если $a \in (3-n, 0)$, то $-a-2 \in (-2, n-5)$. Оператор $D\Delta^{-1} \operatorname{div}$ ограничен в $L_{2,b}$ равномерно по $b \in I$ для любого интервала $I \Subset (-n, n)$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{t-1} \|(D\Delta^{-1} \operatorname{div})^j \Delta^{-1} \operatorname{div}(\omega v)\|_{-a-2}^2 \leq c \|\Delta^{-1} \operatorname{div}(\omega v)\|_{-a-2}^2.$$

Далее,

$$\omega v = D(\omega \varphi D^{t-1} \Delta^k u) - D(\omega \varphi) D^{t-1} \Delta^k u,$$

так что

$$\|\Delta^{-1} \operatorname{div}(\omega v)\|_{-a-2} \leq c \|\varphi D^{t-1} \Delta^k u\|_{a-2} + c \|\Delta^{-1} \operatorname{div}(D(\omega \varphi) D^{t-1} \Delta^k u)\|_{-a-2}.$$

Для последнего члена по неравенству Харди и по ограниченности проекторов Рисса в $L_{2,-a}$

$$\|\Delta^{-1} \operatorname{div} f\|_{-a-2} \leq c \|D\Delta^{-1} \operatorname{div} f\|_{-a} \leq c \|f\|_{-a},$$

что дает

$$\sum_{j=0}^{t-1} \|(D\Delta^{-1} \operatorname{div})^j \Delta^{-1} \operatorname{div}(\omega v)\|_{-a-2}^2 \leq c \|D^{s-1} u\|_{a-2, B_{2R}}^2.$$

В (7) получаем

$$\|D^t \operatorname{div}^t w\|_{-a}^2 \leq \|v\|_a^2 + ca^2 \|D^{s-1} u\|_{a-2, B_{2R}}^2$$

и из (6) следует

$$\|v\|_a^2 - K^2 \|\varphi D^s u\|_a^2 - ca^2 \|D^{s-1} u\|_{a-2, B_{2R}}^2 \leq \frac{c}{R} \|D^s u\|_Q \|D^{2t-1} w\|_Q. \quad (8)$$

Отметим, что $v = \varphi \Delta^k (D^t u)$, $D^s u = D^{2k} (D^t u)$. Оценим $D^2 f$ через Δf в пространстве $L_{2,a}$. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int |\Delta f|^2 \omega \, dx &= - \int Df (\omega D \Delta f + D \omega \Delta f) \, dx \\ &= \int (|D^2 f|^2 \omega + 2 D_i f D_i D_j f D_j \omega + D_i f D_j f D_i D_j \omega) \, dx \\ &= \int (|D^2 f|^2 \omega + Df Df D^2 \omega - |Df|^2 \Delta \omega) \, dx \end{aligned}$$

и для веса $\omega = r^a$ получаем

$$\int |\Delta f|^2 r^a \, dx = \int (|D^2 f|^2 r^a - a(a+n-3) |Df|^2 r^{a-2} - a(a-2) |\partial_r f|^2 r^{a-2}) \, dx,$$

∂_r — производная по r . Для первого слагаемого в (8) находим

$$\|v\|_a^2 \geq \|\varphi D^s u\|_a^2 - a(a+n-3) \sum_{j=0}^{k-1} \|\varphi D^{s-1-2j} \Delta^j u\|_{a-2}^2 - cR^{a-2} \|D^{s-1} u\|_Q^2.$$

Приведем более простое доказательство теоремы 1, которое, однако, не охватывает случай $t \geq n/2$, n четное.

Пусть сначала $t < n/2$. Пусть, как и выше, $y \in \Omega$ — точка Лебега функции $D^s u$, $r = |x-y|$, $\omega(x) = r^a$, $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_{2R})$ — срезающая функция: $\varphi = 1$ в B_R , $|D^j \varphi| \leq c_j R^{-j}$. Обозначим $v = \Delta^k u$, $k = (s-t)/2$. Подставим в интегральное тождество пробную функцию $v\omega\varphi$ (такая подстановка допустима, если y — лебегова точка функции $D^s u$, $a > -n/2$, обоснование допустимости опускаем). По структурному условию на A имеем

$$\int (D^t \Delta^k u + B(x, D^s u)) D^t (v\omega\varphi) \, dx = 0.$$

Обозначая $w = D^t (v\omega) - \omega D^t v$, для первого слагаемого находим

$$\begin{aligned} \int D^t \Delta^k u D^t (v\omega\varphi) \, dx &= \int D^t \Delta^k u (\varphi (\omega D^t v + w) + \dots) \, dx \\ &\geq \|D^t \Delta^k u\|_{\omega\varphi}^2 + \int \varphi w D^t v \, dx - c_Q, \end{aligned}$$

где в многоточие включены члены, содержащие производные φ и соответственно распространённые только по $Q = B_{2R} \setminus B_R$. Для слагаемого с B по оценке (2) и неравенству Юнга

$$\left| \int B D^t (v\omega\varphi) \, dx \right| \leq \frac{1}{2} (K^2 \|D^s u\|_{\omega\varphi}^2 + \|D^t (v\omega)\|_{\varphi/\omega}^2) + c_Q.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\omega}|D^t(v\omega)|^2 = |D^t\Delta^k u|^2_{\omega} + 2wD^t v + \frac{1}{\omega}|w|^2,$$

получаем из интегрального тождества оценку

$$\|D^t\Delta^k u\|_{\omega\varphi}^2 - K^2\|D^s u\|_{\omega\varphi}^2 - \|w\|_{\varphi/\omega}^2 \leq c_Q.$$

В третьем члене имеем

$$|w| = |D^t(v\omega) - \omega D^t v| \leq c|a| \sum_{j=1}^t r^{a-j} |D^{t-j} v|,$$

что дает

$$\|w\|_{\varphi/\omega}^2 \leq ca^2 \sum_{j=1}^t \|r^{-j} D^{t-j} v\|_{\omega\varphi}^2.$$

По неравенству Харди отсюда следует

$$\begin{aligned} \|w\|_{\varphi/\omega}^2 &\leq ca^2 \left(1 + \sum_{j=2}^t \prod_{i=2}^j \left(\frac{2}{n+a-2i}\right)^2\right) \|r^{-1} D^{t-1} v\|_{\omega\varphi}^2 + c_Q \\ &\leq ca^2 \|r^{-1} D^{t-1} v\|_{\omega\varphi}^2 + c_Q, \end{aligned}$$

где константа c может быть выбрана не зависящей от $a \in (b, 0)$ при $b > 2t - n$.

Для первого члена полученная ранее оценка $D^2 u$ через Δu в $L_{2,a}$ дает

$$\|D^t\Delta^k u\|_{\omega\varphi}^2 \geq \|D^s u\|_{\omega\varphi}^2 - a(a+n-3) \sum_{j=0}^{k-1} \|D^{s-2j-1}\Delta^j u\|_{\omega\varphi}^2 - c_Q,$$

что влечет

$$(1 - K^2)\|D^s u\|_{\omega\varphi}^2 - a(n-3+ca)\|r^{-1} D^{s-1} u\|_{\omega\varphi}^2 \leq c_Q.$$

Если $a < 0$ достаточно малое по модулю (такое, что $a \in (b, 0)$ и $n-3+ca > 0$), отсюда следует

$$(1 - K^2)\|\varphi D^s u\|_a^2 + \mu\|\varphi D^{s-1} u\|_{a-2}^2 \leq c_Q, \quad (9)$$

где $\mu > 0$ зависит только от s, t, n . Ввиду плотности множества лебеговых точек $D^s u$ в Ω отсюда вытекает $u \in H_{a,\text{loc}}^s(\Omega)$.

Пусть теперь $t > n/2$, n нечетное. Положим $v = \Delta^k u - P$, где полином P степени $< t - n/2$ определим условиями $D^\alpha v(y) = 0$, $|\alpha| < t - n/2$. По теореме вложения Соболева коэффициенты такого полинома оцениваются через норму u в $H^s(B_R)$. Тогда все приведенные выше рассуждения остаются справедливыми с тем небольшим отличием, что при оценке w по неравенству Харди константа c может быть выбрана не зависящей от $a \in (b, 0)$ при $b > -1$.

Отметим, что в случае $t \geq n/2$ и четного n именно необходимость оценки нормы w по неравенству Харди не позволяет использовать это доказательство: не получается оценка с константой вида $o(|a|)$ при $a \rightarrow -0$.

По вложению пространств Морри в пространства Гёльдера из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $s > t$, $n \geq 4$, $s \geq n/2$. Тогда если $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ – решение системы (1), то $u \in C_{\text{loc}}^\gamma(\Omega)$, где $\gamma > s - n/2$ не зависит от K .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически мы доказали, что решения принадлежат пространству Морри–Кордеса $\tilde{H}_a^s$ функций, для которых конечна величина

$$\|u; \tilde{H}_a^s\| = \sup_y \left(\int |D^s u(x)|^2 |x - y|^a dx \right)^{1/2}.$$

Однако это не усиливает приведенной формулировки теоремы 1, так как локально имеет место вложение $H_b^s \subset \tilde{H}_a^s \subset H_a^s$ при любом $b < a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно допустить наличие в системе (1) младших членов, подчиненных главной части по теоремам вложения. Так для системы

$$\operatorname{div}^t A(x, u, \dots, D^s u) = 0$$

можно заменить (2) условием

$$|B(x, \xi_0, \dots, \xi_s)| \leq K |\xi_s| + c \sum_{j=0}^{s-1} |\xi_j|^{p_j} + f(x), \quad K < 1,$$

где $p_j = n/(n + 2j - 2s)$ при $j > s - n/2$, $p_j < \infty$ при $j \leq s - n/2$, $f \in H_b^0$, $b < 0$. Отсутствие младших членов в (1) предполагается ради краткости.

В случае дивергентных систем хорошо известно, что если коэффициенты системы дифференцируемы с сохранением структурных условий, то решения из H^s принадлежат H^{s+1} . Также известно, что в этом случае решения принадлежат H_a^{s+1} , где, как и для недифференцируемых коэффициентов, $a < 0$ определяется модулем эллиптичности и стремится к нулю при вырождении эллиптичности [3]. Рассмотрим ситуацию дифференцируемых коэффициентов для системы (1).

Пусть функция A один раз дифференцируема по всем аргументам,

$$\left| \frac{\partial A(x, \xi)}{\partial x} \right| \leq c |\xi|, \quad (10)$$

и функция B (см. выше) удовлетворяет условию

$$\left\| \frac{\partial B(x, \xi)}{\partial \xi} \right\| \leq K < 1, \quad (11)$$

где норма обозначает норму конечномерного линейного оператора из $\mathbb{R}^{Nn^s}$ в $\mathbb{R}^{Nn^t}$. Для дивергентных систем ($s = t = m$) потребуем выполнения добавочного структурного условия

$$|\operatorname{div} B(x, D^m u)| \leq |D^{m+1} u| + c |D^m u| \quad (12)$$

на функциях u , имеющих $m+1$ производную. Это условие фактически означает, что производная $\partial B(x, \xi)/\partial \xi$, рассматриваемая как линейный оператор из $\mathbb{R}^{Nn^{m+1}}$ в $\mathbb{R}^{Nn^{m-1}}$, имеет норму ≤ 1 . Простой пример оператора, удовлетворяющего (11), (12) и вырождающегося при $K \rightarrow 1$, дают нелинейные операторы вида $\Delta^m u - (d/dx_1)^m \psi(d^m u/dx_1^m)$, где $\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – дифференцируемая функция, $\psi(0) = 0$, производная $|\psi'(z)| \leq K$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$, а также $\psi'(z) \equiv K$ на некотором отрезке (или полуоси), содержащем нуль.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \geq t$, $n \geq 4$, выполнены условия (10), (11), а в случае $s = t$ также (12). Тогда если $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ – решение системы (1), то $u \in H_{a,\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$, где $a = a(s, t, n) < 0$ не зависит от K .

В силу вложения пространств Морри в пространства Гёльдера получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 2 $s \geq n/2 - 1$. Тогда если $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ – решение системы (1), то $u \in C_{\text{loc}}^\gamma(\Omega)$, где $\gamma > s + 1 - n/2$ не зависит от K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $s > t$. Стандартным путем так же, как и для дивергентных систем, устанавливается, что при условиях (10), (11) $u \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$. Тогда система может быть один раз продифференцирована по независимой переменной. Учитывая структуру функции A , получаем, что функция $\tilde{u} = Du$ размерности nN является H^s -решением линейной системы с измеримыми ограниченными коэффициентами

$$\Delta^m \tilde{u} + \operatorname{div}^t (\tilde{B}(x) D^s \tilde{u} + f(x)) = 0,$$

где $\tilde{B}(x) = B_\xi(x, D^s u(x))$, $B_\xi = \partial B(x, \xi) / \partial \xi$, $f(x) = B_x(x, D^s u(x))$, $B_x = \partial B(x, \xi) / \partial x$. По условию (11)

$$|\tilde{B}(x) D^s \tilde{u}| \leq K |D^s \tilde{u}|,$$

т.е. выполнено условие (2). Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получаем $\tilde{u} \in H_a^s$, т.е. $u \in H_a^{s+1}$. Покажем только, как оценивается добавочный член, содержащий f .

В правой части (6) возникает добавочное слагаемое $|\int f D^t \operatorname{div}^t(w\varphi) dx|$; обозначения те же, что и при доказательстве теоремы 1. По неравенству Гёльдера

$$\left| \int f D^t \operatorname{div}^t(w\varphi) dx \right| \leq \|f\|_{2a, B_{2R}} \|D^t \operatorname{div}^t(w\varphi)\|_{-2a}.$$

Для второго множителя при $|a| < n/2$ в силу ограниченности проекторов Рисса

$$\|D^t \operatorname{div}^t(w\varphi)\|_{-2a} \leq c \|\varphi D^s \tilde{u}\| = c \|\varphi D^{s+1} u\|.$$

Для f по условию (10) $|f| \leq c |D^s u| \in L_{2n/(n-2)}$, поскольку $u \in H^{s+1}$. Поэтому при $a > -1$

$$\|f\|_{2a, B_{2R}} \leq \|f; L_{2n/(n-2)}(B_{2R})\| \left(\int_{B_{2R}} r^{na} dx \right)^{1/n} \leq c R^{a+1} \|D^s u; L_{2n/(n-2)}(B_{2R})\|.$$

Рассмотрим случай $s = t = m$. По условиям (10), (11) $u \in H_{\text{loc}}^{m+1}(\Omega)$. Поэтому система может быть представлена в виде (1) с $s = m + 1$, $t = m - 1$:

$$\Delta^m u + \operatorname{div}^{m-1} (\operatorname{div} B(x, D^m u)) = 0,$$

для $\operatorname{div} B$ справедлива оценка (12). Следуя доказательству теоремы 1, получаем вместо (9)

$$\begin{aligned} \mu \|\varphi D^{s-1} u\|_{a-2}^2 &\leq c R^{a-2} \|D^{s-1} u\|_Q^2 + c R^a \|D^s u\|_{B_{2R}}^2 \\ &\quad + c R^{a+1} \|D^{m+1} u\|_{B_{2R}} \|D^m u; L_{2n/(n-2)}(B_{2R})\|, \end{aligned}$$

где первый член в (9) исчезает, так как в (12) $K = 1$; добавочный член, связанный со слагаемым $c|D^m u|$ в (12), оценен выше при доказательстве теоремы 2. Следовательно, $u \in H_{a-2}^{s-1} = H_{a-2}^m$.

В дивергентном случае условие (11) равносильно стандартной паре структурных условий

$$(A_\xi(x, \xi)\eta, \eta) \geq \nu_1 |\eta|^2, \quad \|A_\xi(x, \xi)\| \leq \nu_2,$$

где

$$A_\xi = \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad \nu_1 \geq \frac{1-K}{\kappa}, \quad \nu_2 \leq \frac{1+K}{\kappa}.$$

При этих условиях и (10) для решений справедлива простейшая оценка

$$\|D^{m+1}u\|_{B_\rho} \leq \frac{c}{\rho} \|D^m u\|_{B_{2\rho}}, \quad \rho < \min\{R; 1\}.$$

Поэтому из $u \in H_{a-2}^m$ получаем $u \in H_a^{m+1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Morrey C. B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43. P. 126–166.
- [2] Widman K.-O. Hölder continuity of solutions of elliptic systems // Manuscr. Math. 1971. V. 5. № 4. P. 299–308.
- [3] Солонников В. А. О дифференциальных свойствах слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 39. С. 110–119.
- [4] Cordes H. O. Zero order *a priori* estimates for solutions of elliptic differential equations // Proc. Symp. Pure Math. 1961. V. 4. P. 157–166.
- [5] Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 42–129.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: kalita@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
06.02.1998