Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, Ф. Тулоне, Об интегрировании производных относительно $\mathcal{P}$ -ичных путей и аппроксимативных производных, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 283–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:46:34

Об интегрировании производных относительно $\mathcal{P}$ -ичных путей и аппроксимативных производных

В. А. Скворцов, Ф. Тулоне

В работе дана в терминах обобщенной абсолютной непрерывности дескриптивная характеристика первообразной относительно системы $\mathcal{P}$ -ичных путей и исследована связь между интегралом Данжуа–Хинчина и $H_{\mathcal{P}}$ -интегралом Хенстока.

Библиография: 7 названий.

Производные относительно $\mathcal{P}$ -ичных путей и соответствующий $H_{\mathcal{P}}$ -интеграл играют важную роль в гармоническом анализе на нуль-мерных группах (см. [1], [2] и [3]). В настоящей работе дана дескриптивная характеристика $\mathcal{P}$ -первообразной в терминах обобщенной абсолютной непрерывности. Эта характеристика затем использована для получения результатов, касающихся взаимосвязи между интегралом Данжуа–Хинчина и $H_{\mathcal{P}}$ -интегралом Хенстока при условии ограниченности числовой последовательности, определяющей систему $\mathcal{P}$ -ичных путей. При этом рассмотрен также вопрос о связи $\mathcal{P}$ -производной с аппроксимативной производной.

Приведем необходимые определения. Для заданной последовательности натуральных чисел

$$\mathcal{P} = \{p_j\}_{j=0}^{\infty}, \quad p_j \geq 2 \quad \text{при всех } j \geq 0, \quad (1)$$

определим

$$m_0 = 1 \quad \text{и} \quad m_k = \prod_{j=0}^{k-1} p_j \quad \text{при } k \geq 1.$$

Обозначим через $Q_{\mathcal{P}}$ множество всех $\mathcal{P}$ -ично-рациональных точек, т.е. точек вида r/m_k , где r – любое целое число, а через $I_{\mathcal{P}}$ – множество $\mathcal{P}$ -ично-иррациональных точек, т.е. дополнение множества $Q_{\mathcal{P}}$ на действительной прямой $\mathbb{R}$. При фиксированном $k \geq 0$ точки r/m_k будем называть $\mathcal{P}$ -ично-рациональными точками ранга k , а отрезки вида

$$\left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k} \right] = \Delta_r^{(k)}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00192) и Института математики Быдгощского университета, Польша.

– $\mathcal{P}$ -ичными отрезками ранга k . Отметим, что каждой $\mathcal{P}$ -ично-иррациональной точке x соответствует единственная последовательность $\mathcal{P}$ -ичных отрезков, содержащих x , а именно

$$\{\Delta^{(k)}(x)\} = \{[a_k(x), b_k(x)]\}_{k=0}^{\infty}, \quad (2)$$

а $\mathcal{P}$ -ично-рациональной точке x соответствуют две такие последовательности – левая и правая, – для которых x является, начиная с некоторого ранга k , общим концом.

Используя обозначение (2), определим для точки $x \in I_{\mathcal{P}}$ две числовые последовательности:

$$P_x^- = \{a_k(x)\} \quad \text{и} \quad P_x^+ = \{b_k(x)\}.$$

Для точки $x \in Q_{\mathcal{P}}$ определим так же обозначаемые последовательности P_x^- и P_x^+ , беря в качестве $a_k(x)$ левые концы отрезков ранга k из левой последовательности вида (2), а в качестве $b_k(x)$ – правые концы отрезков из правой последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $P_x = P_x^- \cup P_x^+ \cup \{x\}$ назовем $\mathcal{P}$ -ичным путем, ведущим к x . Семейство $\{P_x : x \in \mathbb{R}\}$ назовем системой $\mathcal{P}$ -ичных путей.

Понятие системы $\mathcal{P}$ -ичных путей представляет собой частный случай более общего понятия, рассмотренного в [4] (см. также [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определенную на множестве P_x действительную функцию F назовем непрерывной относительно $\mathcal{P}$ -ичного пути P_x или $\mathcal{P}$ -непрерывной в точке x , если

$$\lim_{y \rightarrow x, y \in P_x} F(y) = F(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Определенную на множестве P_x функцию F назовем дифференцируемой относительно $\mathcal{P}$ -ичного пути P_x или $\mathcal{P}$ -дифференцируемой в точке x , если существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow x, y \in P_x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x},$$

который назовем $\mathcal{P}$ -производной функции F в точке x и обозначим $D_{\mathcal{P}}F(x)$. Естественным образом определяются также нижняя и верхняя $\mathcal{P}$ -производные:

$$\begin{aligned} \underline{D}_{\mathcal{P}}F(x) &= \liminf_{y \rightarrow x, y \in P_x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}, \\ \overline{D}_{\mathcal{P}}F(x) &= \limsup_{y \rightarrow x, y \in P_x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Семейство пар $\{([u_j, v_j], \xi_j)\}_{j=1}^k$ называется $\mathcal{P}$ -разбиением, если отрезки $[u_j, v_j]$ не перекрываются (т.е. не имеют общих внутренних точек) и для каждого j выполнены соотношения $u_j \leq \xi_j \leq v_j$, $u_j \in P_{\xi_j}$, $v_j \in P_{\xi_j}$. $\mathcal{P}$ -разбиение называется согласованным с заданной на $[a, b]$ положительной функцией δ , если $\max\{v_j - \xi_j, \xi_j - u_j\} < \delta(\xi_j)$. Если к тому же $[a, b] = \bigcup_{j=1}^k [u_j, v_j]$, то такое разбиение называется $\mathcal{P}$ -разбиением отрезка $[a, b]$.

Нетрудно показать, что для каждого отрезка $[a, b]$ и для каждой заданной на $[a, b]$ положительной функции δ существует $\mathcal{P}$ -разбиение отрезка $[a, b]$, согласованное с δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Хенстоку относительно $\mathcal{P}$ -ичных путей*, или *$H_{\mathcal{P}}$ -интегрируемой* на $[a, b]$, и значение интеграла равно числу A , если для любого $\varepsilon > 0$ существует определенная на $[a, b]$ положительная функция δ такая, что неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^k f(\xi_j)(v_j - u_j) - A \right| < \varepsilon$$

выполнено для любого $\mathcal{P}$ -разбиения $\{([u_j, v_j], \xi_j)\}_{j=1}^k$ отрезка $[a, b]$, согласованного с δ . Значение интеграла A обозначается через $(H_{\mathcal{P}}) \int_a^b f$.

$H_{\mathcal{P}}$ -интеграл обладает всеми обычными для интеграла свойствами, в частности, неопределенный $H_{\mathcal{P}}$ -интеграл $(H_{\mathcal{P}}) \int_a^x$ является $\mathcal{P}$ -непрерывной функцией, $\mathcal{P}$ -дифференцируемой почти всюду (см. [2]).

Определение 5 допускает следующее обобщение на случай функций, определенных лишь почти всюду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Определенная почти всюду на отрезке $[a, b]$ функция называется *$H_{\mathcal{P}}$ -интегрируемой* на $[a, b]$, если после доопределения ее нулем на множестве, где она не определена, она становится $H_{\mathcal{P}}$ -интегрируемой в смысле определения 5. В качестве значения интеграла берется интеграл доопределенной функции.

Нетрудно проверить, что определенная всюду и равная почти всюду нулю функция $H_{\mathcal{P}}$ -интегрируема в смысле определения 5 и ее интеграл на любом отрезке равен нулю. Поэтому в определении 6 можно использовать произвольное доопределение функции, и интеграл при этом не будет зависеть от способа доопределения.

В [2] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{P}$ -дифференцируема почти всюду и всюду, кроме, быть может, счетного множества G выполнено неравенство

$$-\infty < \underline{D}_{\mathcal{P}} F(x) \leq \overline{D}_{\mathcal{P}} F(x) < +\infty. \quad (3)$$

Пусть, кроме того, F $\mathcal{P}$ -непрерывна в точках множества G . Тогда определенная почти всюду функция $f(x) = D_{\mathcal{P}} F(x)$ $H_{\mathcal{P}}$ -интегрируема на $[a, b]$ (в смысле определения 6) и $F(x) - F(a)$ является ее неопределенным $H_{\mathcal{P}}$ -интегралом.

Напомним определение интеграла Данжуа–Хинчина (широкого интеграла Данжуа, см. [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Определенная на отрезке $[a, b]$ непрерывная функция F называется *ACG-функцией* на отрезке $[a, b]$, если имеет место представление $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и F абсолютно непрерывна на каждом множестве B_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Определенная на $[a, b]$ функция F называется *$[ACG]$ -функцией* на отрезке $[a, b]$, если имеет место представление $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где каждое множество B_n замкнуто, и F абсолютно непрерывна на каждом множестве B_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу условия непрерывности каждая ACG-функция является также $[ACG]$ -функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Определенная почти всюду на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на $[a, b]$ в смысле интеграла Даниэля–Хинчина (сокращенно D -интегрируема), если существует ACG -функция F такая, что $F'_{ap}(x) = f(x)$ почти всюду, где F'_{ap} означает аппроксимативную производную (см. [6]). Значение интеграла определяется как $(D) \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

В последующих утверждениях будем предполагать, что последовательность (1) ограничена и $c = \sup p_j$.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству (3) всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, счетного множества G и функция F $\mathcal{P}$ -непрерывна на G . Тогда F является $[ACG]$ -функцией на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку неравенство (3) в некоторой точке x влечет за собой $\mathcal{P}$ -непрерывность в этой точке x , функция F $\mathcal{P}$ -непрерывна всюду на отрезке $[a, b]$. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем считать, что $Q_{\mathcal{P}} \subset G$. Пусть $E = [a, b] \setminus G$ и

$$E_N = \left\{ x \in E : \left| \frac{F(x) - F(a_k)}{x - a_k} \right| < N \right. \\ \left. \text{и} \left| \frac{F(b_k) - F(x)}{b_k - x} \right| < N \text{ при всех } a_k \in P_x^-, b_k \in P_x^+, k \geq 0 \right\}.$$

Из определения множества E_N легко следует, что для произвольного $\mathcal{P}$ -разбиения $\{[y_j, z_j], x_j\}$, где $y_j, z_j \in P_{x_j}$, $y_j \leq x_j \leq z_j$ и $x_j \in E_N$, выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^k |F(z_j) - F(y_j)| \leq N \sum_{j=1}^k (z_j - y_j) \leq N(b - a) = C. \quad (4)$$

Для каждого целого i положим $E_N^i = E_N \cap [i - 1, i]$. В силу (3)

$$E = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} E_N^i. \quad (5)$$

Докажем, что F является абсолютно непрерывной функцией на каждом E_N^i . Заметим, что E_N^i содержит только $\mathcal{P}$ -ично-иррациональные точки. Пусть $x_1, x_2 \in E_N^i$ и $x_1 < x_2$. Мы можем найти неотрицательное целое q такое, что точки x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же $\mathcal{P}$ -ичному отрезку $[a_q, b_q]$ ранга q , но разным отрезкам ранга $q + 1$. Пусть $x_1 \in [a'_{q+1}, b'_{q+1}]$, $x_2 \in [a''_{q+1}, b''_{q+1}]$.

Теперь возможны два случая: либо найденные отрезки ранга $q + 1$ являются соседними, либо между ними расположен один или несколько других отрезков ранга $q + 1$. В первом случае обозначим через t общий конец соседних отрезков ранга $q + 1$, т.е. $t = b'_{q+1} = a''_{q+1}$. Точка t лежит между точками x_1 и x_2 , причем $t \in P_{x_1}^+ \cap P_{x_2}^-$. Применяя неравенства из определения множества E_N к парам точек $\{x_1, t\}$ и $\{t, x_2\}$, получим соотношения

$$\begin{aligned} -N(t - x_1) &< F(t) - F(x_1) < N(t - x_1), \\ -N(x_2 - t) &< F(x_2) - F(t) < N(x_2 - t). \end{aligned}$$

Почленно сложив эти неравенства, получим

$$-N(x_2 - x_1) < F(x_2) - F(x_1) < N(x_2 - x_1). \quad (6)$$

Во втором случае имеем

$$x_2 - x_1 \geq a''_{q+1} - b'_{q+1} \geq \frac{1}{m_{q+1}} \geq \frac{1}{cm_q} = \frac{b_q - a_q}{c} \quad (7)$$

и $a_q, b_q \in P_{x_1} \cap P_{x_2}$. Снова применяя неравенства из определения множества E_N к парам точек $\{a_q, x_1\}$, $\{a_q, x_2\}$, $\{x_1, b_q\}$ и $\{x_2, b_q\}$, приходим к соотношениям

$$-N(x_1 - a_q) \leq F(x_1) - F(a_q) \leq N(x_1 - a_q), \quad (8)$$

$$-N(b_q - x_1) \leq F(b_q) - F(x_1) \leq N(b_q - x_1), \quad (9)$$

$$-N(x_2 - a_q) \leq F(x_2) - F(a_q) \leq N(x_2 - a_q), \quad (10)$$

$$-N(b_q - x_2) \leq F(b_q) - F(x_2) \leq N(b_q - x_2). \quad (11)$$

Комбинируя левое неравенство в (10) с правым неравенством в (8), получаем с учетом (7) оценку снизу

$$F(x_2) - F(x_1) \geq -N(x_2 - a_q) - N(x_1 - a_q) \geq -2N(b_q - a_q) \geq -2cN(x_2 - x_1).$$

Аналогичным образом, используя (9) и (11), получаем оценку сверху

$$F(x_2) - F(x_1) \leq 2cN(x_2 - x_1).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$-2cN(x_2 - x_1) \leq F(x_2) - F(x_1) \leq 2cN(x_2 - x_1), \quad (12)$$

которое с учетом уже полученного в первом случае неравенства (6) выполняется для любой пары точек $x_1, x_2 \in E_N^i$.

Из неравенства (12) легко следует, что F является абсолютно непрерывной функцией на E_N^i .

Теперь мы докажем, что F является абсолютно непрерывной функцией на замыкании $\overline{E_N^i}$. Достаточно доказать, что $F|_{\overline{E_N^i}}$ непрерывна, ибо тогда нужный результат получается предельным переходом.

Напомним, что из условий теоремы следует $\mathcal{P}$ -непрерывность F всюду на $[a, b]$.

Докажем сначала, что если $x_0 \in \overline{E_N^i}$, то

$$\lim_{x \uparrow x_0, x \in E_N^i} F(x) = F(x_0). \quad (13)$$

Допустим, что это соотношение не выполняется. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ и строго возрастающая сходящаяся к x_0 последовательность $\{x_k\} \subset E_N^i$ такая, что

$$|F(x_k) - F(x_0)| > \varepsilon \quad (14)$$

при всех $k = 1, 2, \dots$. В силу $\mathcal{P}$ -непрерывности F в точке x_0 при некотором $\eta > 0$ будет выполнено неравенство

$$|F(a_k(x_0)) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

для всех $a_k(x_0) \in P_{x_0}^-$ таких, что $|x_0 - a_k(x_0)| < \eta$. Возьмем такое n_1 , что $1/m_{n_1} < \eta$, и найдем j , при котором $x_0 \in \Delta_j^{(n_1)} = [a_{n_1}, b_{n_1}]$. Из последовательности $\{x_k\}$ выберем $x_{k_1} \in [a_{n_1}, b_{n_1}]$. Тогда $a_{n_1} = a_{n_1}(x_{k_1}) = a_{n_1}(x_0)$ (т.е. $a_{n_1} \in P_{x_0}^- \cap P_{x_{k_1}}^-$). Поскольку $|x_0 - a_{n_1}(x_0)| < \eta$, в силу (15)

$$|F(a_{n_1}(x_0)) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Используя (14) при $x_k = x_{k_1}$ и (16), получаем оценку

$$|F(x_{k_1}) - F(a_{n_1})| \geq |F(x_{k_1}) - F(x_0)| - |F(a_{n_1}) - F(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $a_{n_1} = y_1$. Далее возьмем отрезок $\Delta_r^{(n_2)} = [a_{n_2}, b_{n_2}]$ ранга $n_2 > n_1$, которому принадлежит точка x_0 и для которого $a_{n_2} > x_{k_1}$, и выберем из нашей последовательности точку $x_{k_2} \in \Delta_r^{(n_2)}$. Тогда $a_{n_2} = a_{n_2}(x_{k_2}) = a_{n_2}(x_0) < x_{k_2}$ и, рассуждая как и выше и полагая $a_{n_2} = y_2$, мы получим неравенство

$$|F(x_{k_2}) - F(y_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Продолжая построение по индукции, мы получим $\mathcal{P}$ -разбиение $\{[y_i, x_{k_i}], x_{k_i}\}$ с $y_i \in P_{x_{k_i}}$ и $x_{k_i} \in E_N^i$, для которого

$$\sum_{i=1}^n |F(x_{k_i}) - F(y_i)| \geq n \frac{\varepsilon}{2} > C$$

при достаточно большом n . Это противоречит неравенству (4) и, тем самым, доказывает (13). Так же доказывается соотношение, аналогичное (13), со строго убывающей последовательностью $\{x_k\} \subset E_N^i$, сходящейся к x_0 . Тем самым, для любого $x_0 \in \overline{E_N^i}$ мы получаем

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E_N^i} F(x) = F(x_0). \quad (17)$$

Остается показать, что в соотношении (17) точки x могут быть взяты из $\overline{E_N^i}$. Пусть $\{x_k\}$ – любая последовательность такая, что $x_k \in \overline{E_N^i}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. В соответствии с (17) мы найдем для каждого k точку $y_k \in E_N^i$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$ и

$$|F(y_k) - F(x_k)| < \frac{1}{k}. \quad (18)$$

Еще раз используя (17) для последовательности $\{y_k\}$, мы получаем с учетом (18), что $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x_0)$. Тем самым, доказана непрерывность функции $F|_{\overline{E_N^i}}$, откуда, как уже отмечалось, следует, что F является абсолютно непрерывной функцией на $\overline{E_N^i}$. Отсюда в силу представления (5) и с учетом того, что на одноточечном множестве каждую функцию можно считать абсолютно непрерывной, получаем, что F является $[ACG]$ -функцией на $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Остается открытым вопрос, обобщается ли утверждение теоремы 2 на случай, когда F – неопределенный интеграл произвольной $H_{\mathcal{P}}$ -интегрируемой функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция F определена на множестве $\bigcup_{x \in A} P_x$, где A – некоторое измеримое множество в $\mathbb{R}$, и $\mathcal{P}$ -непрерывна на A . Тогда F измерима на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим $\mathcal{P}$ -ично-рациональные точки ранга k , содержащиеся в $\bigcup_{x \in A} P_x$, и построим на $\mathbb{R}$ непрерывную кусочно-линейную функцию F_k , совпадающую с F в этих точках и постоянную в окрестности $-\infty$ и $+\infty$ (в случае ограниченности множества A). Ясно, что F_k измерима на $\mathbb{R}$. Для каждого $x \in A$ и $k \geq 0$ выполняется одно из неравенств: $F(a_k(x)) \leq F_k(x) \leq F(b_k(x))$ или $F(a_k(x)) \geq F_k(x) \geq F(b_k(x))$. Поскольку в силу $\mathcal{P}$ -непрерывности F

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(b_k(x)) = F(x),$$

из указанных неравенств следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = F(x)$ при $x \in A$. Итак, F измерима на A как поточечный предел измеримых функций F_k на измеримом множестве.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция F , определенная на множестве $\bigcup_{x \in A} P_x$, где A – некоторое измеримое множество в $\mathbb{R}$, удовлетворяет на A неравенству (3). Тогда F аппроксимативно дифференцируема и $\mathcal{P}$ -дифференцируема почти всюду на A , причем $D_{\mathcal{P}}F(x) = F'_{ap}(x)$ почти всюду на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема является некоторым обобщением леммы 5 из [1]. Мы воспользуемся здесь основными идеями доказательства упомянутой леммы, дополнив в то же время некоторый пробел в этом доказательстве, относящийся к проверке измеримости рассматриваемых множеств.

Прежде всего отметим, что неравенство (3) на A влечет за собой в силу свойства Варда (см. [7]) существование конечной производной $D_{\mathcal{P}}F(x)$ почти всюду на A . Поэтому существует множество $B \subset A \cap I_{\mathcal{P}}$ с $|B| = |A|$, в каждой точке которого существует конечная производная $D_{\mathcal{P}}F(x)$. Пусть $\{r_n\}$ – множество всех рациональных чисел и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества $B_{n,\varepsilon,N}$ всех точек из B , для которых

$$r_n - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a_k)}{x - a_k} < r_n + \varepsilon, \quad (19)$$

$$r_n - \varepsilon < \frac{F(b_k) - F(x)}{b_k - x} < r_n + \varepsilon \quad (20)$$

при всех $k > N$, где $a_k, b_k \in P_x$.

Определим

$$B_{n,\varepsilon,N}^i = B_{n,\varepsilon,N} \cap \left[\frac{i-1}{m_N}, \frac{i}{m_N} \right].$$

Очевидно,

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} B_{n,\varepsilon,N}^i. \quad (21)$$

Используя неравенства (19) и (20), при помощи рассуждений, сходных с теми, которые применялись в доказательстве теоремы 2, получаем, что F абсолютно непрерывна на каждом $B_{n,\varepsilon,N}^i$. Проверим, что $B_{n,\varepsilon,N}$ (а тем самым, и $B_{n,\varepsilon,N}^i$) измеримы.

Действительно,

$$B_{n,\varepsilon,N} = \bigcap_{k>N} \bigcup_j \left(\left\{ x \in \Delta_j^{(k)} : r_n - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a_k)}{x - a_k} < r_n + \varepsilon \right\} \right. \\ \left. \cap \left\{ x \in \Delta_j^{(k)} : r_n - \varepsilon < \frac{F(b_k) - F(x)}{b_k - x} < r_n + \varepsilon \right\} \right),$$

где $\Delta_j^{(k)} = [a_k, b_k]$ и множества в фигурных скобках измеримы в силу теоремы 3. Повторяя далее рассуждения из [1], получаем, что $F'_{ap}(x) = D_{\mathcal{P}}F(x)$ почти всюду на B , а значит, и почти всюду на A .

ТЕОРЕМА 5. Пусть действительная функция F и D -интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция f удовлетворяют неравенству

$$-\infty < \underline{D}_{\mathcal{P}}F(x) \leq f(x) \leq \overline{D}_{\mathcal{P}}F(x) < +\infty$$

всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, счетного множества G , на котором функция F $\mathcal{P}$ -непрерывна. Тогда F является D -первообразной функции f и $(D) \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ является неопределенным D -интегралом функции f . Тогда $\Phi'_{ap}(x) = f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. В силу теоремы 4 $D_{\mathcal{P}}F(x) = f(x) = F'_{ap}(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Пусть $R = \Phi - F$. Тогда

$$R'_{ap}(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } [a, b]. \quad (22)$$

По теореме 2 функция R является $[ACG]$ -функцией (см. замечание 1), $\mathcal{P}$ -непрерывной всюду на $[a, b]$. Обозначим через K множество всех точек $x \in [a, b]$, которые не содержатся ни в каком интервале постоянства функции R . Ясно, что множество K замкнуто. Из $\mathcal{P}$ -непрерывности R в каждой точке отрезка $[a, b]$ следует, что K совершенно. Предположим, что K непусто. Тогда из определения свойства $[ACG]$ и из теоремы Бэра следует, что существует непустая порция L (с концевыми точками c и d) множества K , на которой R абсолютно непрерывна и $\mathcal{P}$ -непрерывна.

Смежные интервалы к множеству L на отрезке $[c, d]$ являются интервалами постоянства функции R . Из $\mathcal{P}$ -непрерывности R в точках L следует, что R постоянна на замыканиях смежных интервалов. Отсюда вытекает, что R абсолютно непрерывна на всем отрезке $[c, d]$, и поэтому в силу (22) R постоянна на $[c, d]$, что противоречит предположению о непустоте порции L . Таким образом, K пусто, откуда легко следует, что R постоянна на $[a, b]$. Тогда F является ACG -функцией и $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = (D) \int_a^b f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. С учетом теоремы 1 условия теоремы 5 влекут за собой $H_{\mathcal{P}}$ -интегрируемость функции f , причем F является ее неопределенным $H_{\mathcal{P}}$ -интегралом. Поэтому теорема 5 фактически утверждает, что при данных условиях D -интеграл функции f совпадает с ее $H_{\mathcal{P}}$ -интегралом. Отсюда, в частности, следует, что $H_{\mathcal{P}}$ -интеграл Ньютона (т.е. интеграл, определяемый как приращение первообразной относительно $\mathcal{P}$ -дифференцирования) и D -интеграл на функциях, интегрируемых в обоих смыслах, совпадают. Вопрос о совместимости $H_{\mathcal{P}}$ -интеграла и D -интеграла в общем случае остается открытым (см. замечание 2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Скворцов, М. П. Королева, “О рядах по мультипликативным системам, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа”, *Матем. сб.*, **186**:12 (1995), 129–150.
- [2] В. А. Скворцов, Ф. Тулоне, “Обобщенные интегралы Хенстока в теории рядов по мультипликативным системам”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2004, № 2, 7–11.
- [3] V. A. Skvortsov, F. Tulone, “On the problem of recovering the coefficients of series with respect to characters of zero-dimensional groups”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **34**:2 (2006), 307–320.
- [4] A. M. Bruckner, R. J. O’Malley, B. S. Thomson, “Path derivatives: a unified view of certain generalized derivatives”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **283**:1 (1984), 97–125.
- [5] Shu Sheng Fu, “Path integral: an inversion of path derivatives”, *Real Anal. Exchange*, **20**:1 (1995), 340–346.
- [6] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.
- [7] F. Tulone, “On the Ward theorem for $\mathcal{P}$ -adic-path bases associated with a bounded sequence”, *Math. Bohem.*, **129**:3 (2004), 313–323.

В. А. Скворцов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vaskvor2000@yahoo.com

Поступило

11.01.2007

Исправленный вариант

20.05.2008

Ф. Тулоне

University of Palermo, Италия

E-mail: tulone@dipmat.math.unipa.it