Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Насибов, Об одном интегральном неравенстве и его применении к доказательству неравенства энтропии, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 231–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:29:10

Об одном интегральном неравенстве и его применении к доказательству неравенства энтропии

Ш. М. Насибов

В настоящей заметке доказывается одно точное интегральное неравенство, и оно применяется к доказательству неравенства энтропии.

Библиография: 11 названий.

1. Интегральное неравенство. Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения: $\|u\|_p = \{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx\}^{1/p}$, $p \geq 1$, – норма в $L_p(\mathbb{R}^n)$, индекс p в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p = 2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Для заданного ρ из интервала $(0, \rho_0)$, где $\rho_0 = +\infty$ при $n = 1, 2$, $\rho_0 = 4/(n-2)$ при $n \geq 3$, определим $\alpha = 0,5\rho n/(\rho + 2)$. Для заданного $\alpha \in (0, 1)$ определим $\chi = \sqrt{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}$. Пусть

$$\forall \theta > 0 \quad \Gamma(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\theta-1} dt$$

– гамма-функция Эйлера;

$$\forall \beta > 0, \gamma > 0 \quad B(\beta, \gamma) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1} dt$$

– бета-функция Эйлера, $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$,

$$k_g(\alpha) = \chi^{-1} \left[0,5\sigma_n B\left(\frac{n}{2}, \frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)^{\alpha/n} \right] = \chi^{-1} \cdot \pi^{\alpha/2} \left[\frac{\Gamma[(n-n\alpha)/2\alpha]}{\Gamma(n/2\alpha)} \right]^{\alpha/n}. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Пусть ρ, α – определенные выше числа, $\nu(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $r\nu \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $r = |x|$. Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство:

$$\|\nu\|_{(\rho+2)/(\rho+1)} \leq k_g(\alpha) \|r\nu\|^\alpha \|\nu\|^{1-\alpha}, \quad (2)$$

где $k_g(\alpha)$ – константа, определенная формулой (1).

Константа k_g является точной: неравенство (2) переходит в равенство при $\nu(x) = \nu_0(r) = \omega_1/(\omega_2 + \omega_3 r^2)^{1+1/\rho}$, где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – произвольные положительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a, b – пока не определенные положительные числа. Применяя неравенство Гёльдера–Юнга для интегралов, имеем

$$\begin{aligned} \|\nu\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nu|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[(a\nu\sqrt{a+br^2})^p \frac{1}{\sqrt{(a+br^2)^p}} \right] dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |a\nu|^2 dx + b \int_{\mathbb{R}^n} r^2 \nu^2 dx \right)^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(a+br^2)^{1+2/\rho}} \right)^{p/(2(\rho+2))}, \end{aligned}$$

здесь $p = (\rho+2)/(\rho+1)$. Выберем b , полагая $b = \|\nu\|^2/\|r\nu\|^2$, и вычислим интеграл

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{ax}{(a+br^2)^{1+2/\rho}}.$$

После подстановки $x = \sqrt{at}/\sqrt{b}$ для I_0 получаем, $I_0 = I_1/a^{[4-(n-2)\rho]/2\rho} \times b^{n/2}$, где

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|t|^2)^{-1-2/\rho} dt = \sigma_n \int_0^\infty \frac{\xi^{n-1} d\xi}{(1+\xi^2)^{1+2/\rho}} = \frac{\sigma_n B}{2}, \quad B = B\left[\frac{n}{2}, \frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right].$$

Из приведенных выше оценок для $\|\nu\|_p$ получаем следующее неравенство:

$$\|\nu\|_p \leq \sqrt{\frac{1+a}{a^{1-\alpha}}} (0,5\sigma_n B)^{\alpha/n} \|ru\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}.$$

Функция $f(a) = (1+a)/a^{1-\alpha}$, $0 < a < +\infty$, в точке $a_0 = (1-\alpha)/\alpha$ имеет минимум, равный $f(a_0) = 1/\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}$. В последнем неравенстве полагая $a = a_0$, получим неравенство (2) с константой k_g , определенной формулой (1). Остается показать, что k_g в неравенстве (2) является оптимальной константой. Предварительно проверив, что

$$\int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}\alpha t}{(\omega_2 + \omega_3 t^2)^\delta} = \frac{B(\mu/2, \delta - \mu/2)}{2\omega_2^{\delta-\mu/2}\omega_3^{\mu/2}}, \quad \text{где } \mu > 0, \delta > \frac{\mu}{2},$$

вычислим для $\nu_0 = \omega_1/(\omega_2 + \omega_2 r^2)^{1+1/\rho}$ нормы $\|\nu_0\|$, $\|r\nu_0\|$, $\|\nu_0\|_p$, $p = (\rho+2)/(\rho+1)$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \|\nu_0\|_{(\rho+2)/(\rho+1)} &= \frac{\omega_1(0,5\sigma_n B)^{1/2+\alpha/n}}{[\omega_2^{n(2-\alpha)/2\alpha}\omega_3^{n/2}]^{(n+2\alpha)/2n}}; \\ 2) \quad \|\nu_0\| &= \frac{\omega_1\sqrt{1-\alpha}(0,5\sigma_n B)^{1/2}}{[\omega_2^{1+n(1-\alpha)/2\alpha}\omega_3^{n/2}]^{1/2}}; \\ 3) \quad \|r\nu_0\| &= \frac{\omega_1\sqrt{\alpha}(0,5\sigma_n B)^{1/2}}{[\omega_2^{n(1-\alpha)/2\alpha}\omega_3^{1+n/2}]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Учтя эти интегралы в нестрогом неравенстве (2), легко убедиться, что оно переходит в равенство при k_g , определенной формулой (1).

Лемма 1 полностью доказана.

Неравенство (2) перепишем в следующем виде:

$$\|u\|_{2n/(n+2\alpha)} \leq k_g(\alpha) \|ru\|^\alpha \|u\|^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3)$$

Покажем, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} k_g(\alpha) = 1$, тем самым, неравенство (2) остается справедливым и при $\alpha = 0$. Будем пользоваться следующим соотношением для гамма-функции: пусть $\theta > 0$, тогда

$$\ln \Gamma(\theta) = \theta \ln \theta - \theta - \frac{1}{2} \ln \theta + \frac{1}{2} \ln 2\pi + R_0(\theta), \quad (4)$$

где

$$R_0(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)(m+2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\theta+j)^{m+1}}.$$

Используя формулу (4), для $\ln k_g(\alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} \ln k_g(\alpha) = & \frac{\alpha}{2} \ln \pi - \frac{1-\alpha}{2} \ln(1-\alpha) - \frac{\alpha \ln \alpha}{2} \\ & + \alpha \left[\frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{n-\alpha n}{2\alpha} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{n-\alpha n}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{n-\alpha n}{2\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{n}{2\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n}{n-\alpha n} \right) + \frac{R_1(\alpha) - R_2(\alpha)}{n} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(\alpha) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)(m+2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{m+1}}{(n-\alpha n+2\alpha j)^{m+1}}, \\ R_2(\alpha) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+1)(m+2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{m+1}}{(n+2\alpha)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \ln k_g(\alpha) = & \frac{\alpha}{2} \ln \pi - \frac{1-\alpha}{2} \ln(1-\alpha) - \frac{1}{2} \ln(n-\alpha n) - \frac{\alpha}{2} \ln(n-\alpha n) + \frac{\alpha}{2} \ln 2 \\ & - \frac{1}{2} \ln n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2n} \ln \frac{n}{n-\alpha n} + \frac{\alpha(R_1(\alpha) - R_2(\alpha))}{n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \ln[k_g(\alpha)] = \ln[k_g(0+0)] = 0,$$

отсюда $k_g(0+0) = 1$.

2. Неравенство энтропии.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $ru \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливо следующее неравенство энтропии:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2} \ln \frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{n}{2} \ln \left[\frac{2\pi \|ru\|^2}{n \|u\|^2} \right]. \quad (7)$$

Неравенство (7) является точным: оно переходит в равенство при

$$u(x) = a \exp(-b|x - \overset{\circ}{x}|^2),$$

где a, b – произвольные положительные постоянные, $\overset{\circ}{x} \in \mathbb{R}^n$ произвольно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \|u\|_{2n/(n+2\alpha)} - k_g(\alpha) \|ru\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}.$$

Так как $f(\alpha) \leq 0$ для всех $\alpha \in [0, 1]$, то $f'(0+0) \leq 0$. Полагая

$$\Phi_1(\alpha) = \|u\|_{2n/(n+2\alpha)}, \quad \Phi_2(\alpha) = \|ru\|^\alpha, \quad \Phi_3(\alpha) = \|u\|^{1-\alpha},$$

вычислим $f'(\alpha)$.

Имеем

$$f'(\alpha) = \Phi_1'(\alpha) - k_g(\alpha)\Phi_2'(\alpha)\Phi_3'(\alpha) - k_g(\alpha)\Phi_2(\alpha)\Phi_3'(\alpha) - k'(\alpha)\Phi_2'(\alpha)\Phi_3(\alpha), \quad (8)$$

где

$$\Phi_2'(\alpha) = \|ru\|^\alpha \ln(\|ru\|), \quad \Phi_3'(\alpha) = -\|u\|^{1-\alpha} \ln(\|u\|).$$

Легко показать, что

$$\Phi_1'(\alpha) = \Phi(\alpha) \left[\frac{1}{n} \ln \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2n/(n+2\alpha)} dx \right] - \frac{2}{(n+2\alpha)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2n/(n+2\alpha)} \ln |u| dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2n/(n+2\alpha)} dx} \right].$$

Отсюда

$$\Phi_1'(0+0) = \frac{\|u\|}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\|u\|^2} \ln \left(\frac{|u|^2}{\|u\|^2} \right) dx. \quad (9)$$

Очевидно, что

$$\Phi_2'(0+0) = \ln \|ru\|, \quad (10)$$

$$\Phi_3'(0+0) = -\|u\| \ln \|u\|, \quad (11)$$

$$\Phi_2(0+0) = 1, \quad (12)$$

$$\Phi_3(0+0) = \|u\|. \quad (13)$$

Позже мы докажем, что

$$k_g'(0+0) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{n} \right). \quad (14)$$

Из (8) в силу $f'(0+0) \leq 0$ на основании (9)–(14) имеем (7), что и требовалось. Остается показать (14). Для $k_g(\alpha)$ имеем

$$\ln k_g(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \ln \pi - \frac{\alpha}{2} \ln \alpha - \frac{1-\alpha}{2} \ln(1-\alpha) + \frac{\alpha}{n} \ln \left[\Gamma \left(\frac{n-n\alpha}{2\alpha} \right) \right] - \frac{\alpha}{n} \ln \left[\Gamma \left(\frac{n}{2\alpha} \right) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{k_g'(\alpha)}{k_g(\alpha)} &= \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln \alpha + \frac{1}{2} \ln(1-\alpha) + \frac{1}{n} \ln \left[\Gamma \left(\frac{n-n\alpha}{2\alpha} \right) \right] - \frac{1}{n} \ln \left[\Gamma \left(\frac{n}{2\alpha} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma'(n/(2\alpha))}{\Gamma(n/(2\alpha))} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma'((n-n\alpha)/(2\alpha))}{\Gamma((n-n\alpha)/(2\alpha))}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (4) следует

$$\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)} = \ln \theta - \frac{1}{2\theta} - R(\theta), \quad (16)$$

где

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m+2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\theta+j)^{m+2}}.$$

В силу (15) имеем

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma'(n/(2\alpha))}{\Gamma(n/(2\alpha))} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{n}{2\alpha} - \frac{1}{2n} - R_3(\alpha), \quad (17)$$

где

$$R_3(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m+2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{m+1}}{(n+2\alpha j)^{m+2}}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma'((n-n\alpha)/(2\alpha))}{\Gamma((n-n\alpha)/(2\alpha))} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{n-n\alpha}{2\alpha} \right) - \frac{1}{2n(1-\alpha)} - R_4(\alpha),$$

где

$$R_4(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m+2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{m+1}}{(n-n\alpha+2\alpha j)^{m+2}}.$$

В силу (4) имеем

$$\ln \Gamma \left(\frac{n-\alpha n}{2\alpha} \right) = \frac{n-\alpha n}{2n} \ln \left(\frac{n-\alpha n}{2\alpha} \right) - \frac{n-\alpha n}{2\alpha} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n-\alpha n}{2\alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + R_1(\alpha), \quad (19)$$

$$\ln \Gamma \left(\frac{n}{2\alpha} \right) = \frac{n}{2\alpha} \ln \frac{n}{2\alpha} - \frac{n}{2\alpha} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2\alpha} + \frac{1}{2} \ln 2\pi + R_1(\alpha). \quad (20)$$

Учитывая соотношения (17)–(20) в (15), получаем

$$k'_g(\alpha) = k_g(\alpha) \left[\frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(1-\alpha)} + \frac{1}{2} \ln(1-\alpha) + \frac{1}{2n} \ln \frac{n}{n-\alpha n} - \frac{1}{2} \ln(n-\alpha n) + R_5(\alpha) \right], \quad (21)$$

где

$$R_5(\alpha) = R_4(\alpha) - R_3(\alpha) + \frac{R_1(\alpha) - R_2(\alpha)}{n}.$$

В (21) перейдя к пределу при $\alpha \rightarrow 0+0$, имеем

$$k'_g(0+0) = \left(\frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi e}{n},$$

т.е.

$$k'_g(0+0) = \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi e}{n},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 полностью доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Настоящая заметка анонсирована в [1]. Неравенство энтропии применяется для энтропийной характеристики сильного обобщенного решения из класса

$$C^0([0, +\infty); W_2^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); H^{-1}(\mathbb{R}^n))$$

задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = k|u|^\rho u & \text{в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{в } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Здесь k, ρ – заданные действительные числа, причем $k \neq 0, \rho > 0$; u_0 – заданная в $\mathbb{R}^n$ функция.

Вопросы существования в целом сильного обобщенного решения задачи Коши, а также слабого обобщенного решения первой однородной начально-краевой задачи для вышеуказанного нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера исследованы соответственно в [1] и [2], используя некоторые идеи и подходы из [3] и [4].

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Неравенство (2) также применяется к выводу следующего интерполяционного неравенства:

$$\|u\|_{\rho+2} \leq \text{const} \|Du\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha},$$

справедливого для всех $u \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ при условии, что $\rho \in (0, +\infty)$ при $n = 1, 2$; $\rho \in (0, 4/(n-2))$ при $n \geq 3$. Здесь через const обозначена некоторая положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$; $\alpha = \rho n / [2(\rho + 2)]$.

Это неравенство впервые доказано в [5]–[7]. Другие способы доказательства этого неравенства приведены в работах [1], [8]–[10]. Это неравенство применяется при исследовании вопроса глобальной разрешимости задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера [1], [2], а также в спектральной теории для оператора Шрёдингера [10].

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (7) при $n = 1$ приведено в [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ш. М. Насибов, “Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шрёдингера”, *Докл. АН СССР*, **307**:3 (1989), 538–542.
- [2] Ш. М. Насибов, “Одно нелинейное уравнение типа Шрёдингера”, *Дифференц. уравнения*, **16**:4 (1980), 660–670.
- [3] Ю. А. Дубинский, “Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка”, *УМН*, **23**:1 (1968), 45–90.
- [4] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [5] B. v. Sz. Nagy, “Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **10** (1941), 64–74.
- [6] L. Nirenberg, “On elliptic partial differential equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **13** (1959), 115–162.
- [7] E. Gagliardo, “Proprietà di alcune classi di funzioni in piu variabili”, *Ricerche Mat.*, **7** (1958), 102–137.

- [8] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [9] Н. А. Levine, “An estimate for the best constant in a Sobolev inequality involving three integral norms”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **124**:1 (1980), 181–197.
- [10] E. J. M. Veling,, “Lower bounds for the infimum of the spectrum of the Schrodinger operator in $\mathbb{R}^N$ and the Sobolev inequalities”, art. 63, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**:4 (2002).
- [11] I. I. Hirschman, jr., “A note on entropy”, *Amer. J. Math.*, **79**:1 (1957), 152–156.

Ш. М. Насибов

Институт прикладной математики Бакинского
государственного университета, Баку, Азербайджан
E-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

Поступило
12.03.2007