Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт, Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:23:46

Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей

Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт

Для автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен результат Барбашина [1], усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ достаточно существования положительно определенной функции $v(x)$ такой, что производная вдоль траекторий системы $\dot{v}(x) \leq 0$ и при этом поверхности уровня $v = \text{const} > 0$ не содержат целых траекторий. В работах [2], [3] показано, что этот результат распространяется на неавтономные системы $\dot{x} = f(x, t)$ при условии, что правая часть системы и функция Ляпунова $v(x, t)$ почти периодичны по t (в случае линейных систем речь идет об экспоненциальной устойчивости). В [4] получен разностный аналог результата работы [2]. Рассматривается разностная система

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad x_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

где A_n – почти периодическая матрица с отделенным от нуля определителем

$$|\det A_n| \geq \text{const} > 0. \quad (2)$$

Почти периодичность означает выполнение критерия компактности Бохнера [5]: семейство сдвигов A_{n+k} , $k \in \mathbb{Z}$, – предкомпакт в банаховом пространстве $\mathcal{M}$ ограниченных функций $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ с равномерной нормой. Установлен признак экспоненциальной устойчивости в терминах эрмитовой формы

$$v(x, n) = \langle G_n x, x \rangle \quad (3)$$

с положительно определенной почти периодической матрицей G_n с ослабленным условием на разностную производную формы (3) вдоль траекторий системы (1)

$$\dot{v}(x, n) = \langle F_n x, x \rangle, \quad F_n = A_n^* G_{n+1} A_n - G_n; \quad (4)$$

для экспоненциальной устойчивости решения $x_n = 0$ достаточно лишь, чтобы форма (4) была неположительна и отлична от тождественного нуля на каждом решении $x \neq 0$ системы (1). В основе обоснования лежат свойства некоторых функций на компакте $K = H \times S$, где H – оболочка почти периодической матрицы A_n , S – единичная сфера в $\mathbb{C}^N$. В [6]–[12] результаты работ [2]–[4] распространены на другие классы почти периодических уравнений.

Данное сообщение является продолжением работы [4]. Исследуется в рамках прямого метода Ляпунова экспоненциальная дихотомия решений почти периодической разностной системы (1).

Обозначим через U_n матрицу Коши системы (1): $x_n = U_n x_0$ для решений (1). В силу условия (2) матрица Коши определена при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Будем, следуя [13], называть *взаимным наклоном подпространств* E_1, E_2 пространства $E = \mathbb{C}^N$ число

$$\text{Sn}(E_1, E_2) = \inf |z_1 + z_2|, \quad z_k \in E_k, \quad |z_k| = 1.$$

Здесь и далее $|\cdot|$ – эрмитова норма в E , так же обозначается согласованная с ней матричная норма. В частном случае, когда E_1, E_2 – вещественные прямые, $\text{Sn}(E_1, E_2) = 2 \sin(\alpha/2)$, где α – наименьший угол между прямыми.

Будем говорить, что для системы (1) имеет место свойство экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии), если фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств E_1, E_2 так, что

1) при некоторых $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2 > 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} x \in E_1 & \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_1 e^{-\nu_1(n-m)} |U_m x|, \quad n \geq m, \\ x \in E_2 & \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_2 e^{-\nu_2(m-n)} |U_m x|, \quad n \leq m, \end{aligned}$$

2) взаимный наклон движущихся подпространств $E_k(n) = U_n E_k$ отделен от нуля:

$$\text{Sn}(E_1(n), E_2(n)) \geq \text{const} > 0.$$

В случае произвольной ограниченной A_n для выполнения свойства э-дихотомии необходимо и достаточно существование эрмитовой индефинитной невырожденной ограниченной матрицы G_n такой, что при некотором $m > 0$ выполняется неравенство

$$F_n \leq -mI. \quad (5)$$

Обоснование проводится повторением с очевидными видоизменениями доказательства известного критерия э-дихотомии для систем $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$ [14]; см. также [13; с. 280].

В классе почти периодических систем (1) имеет место усиление этого результата в сторону достаточности.

Обозначим через $\mathcal{J}$ класс матриц $G_n: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ со свойствами

- 1) $G_n^* = G_n$, $|\det G_n| \geq \text{const} > 0$;
- 2) G_n почтипериодична;
- 3) эрмитова форма (3) индефинитна.

ТЕОРЕМА 1. Если для системы (1) с почти периодической матрицей A_n существует матрица $G_n \in \mathcal{J}$ такая, что

$$1^\circ F_n \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2^\circ \text{ форма (4) отлична от тождественного нуля на каждом решении } x_n \neq 0 \text{ системы (1): } \dot{v}(x_n, n) \neq 0;$$

то система (1) э-дихотомична.

В основе обоснования лежат приемы, аналогичные развитым в [2]–[4].

ПРИМЕР. Пусть в (1) $x_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A_n = \begin{bmatrix} \sqrt{1+a_n} & \sqrt{a_n^{-1}} \\ 1 & \sqrt{1+a_n^{-1}} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \leq a_n < 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (6)$$

a_n – почти периодическая функция $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Покажем, что система $x_{n+1} = A_n x_n$ э-дихотомична.

Ввиду $a_n \geq \varepsilon$ матрица A_n почти периодична, $\det A_n = \sqrt{a_n} \geq \sqrt{\varepsilon}$. Положим $G = \text{diag}(1, -1)$. Тогда

$$F_n = A_n^* G A_n - G = \text{diag}(a_n - 1; 0) \leq 0.$$

Нетрудно убедиться: если $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ – ненулевое решение системы $x_{n+1} = A_n x_n$, то $\xi_n \neq 0$, поэтому

$$\dot{v}(x_n, n) = x_n^* F_n x_n = (a_n - 1) \xi_n^2 \neq 0.$$

Выполнены все условия теоремы 1, тем самым утверждение доказано.

Отметим, что здесь не выполняется условие (5), гарантирующее выполнение свойства э-дихотомии при любой a_n со свойством (6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Барбашин, *Функция Ляпунова*, Наука, М., 1970. [2] С. М. Добровольский, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский, *Матем. заметки*, **52**:6 (1992), 10–14. [3] С. М. Добровольский, Р. К. Романовский, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 151–153. [4] О. В. Кириченко, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский, *Сиб. матем. журн.*, **37**:1 (1996), 170–174. [5] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [6] Т. М. Стругова, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 472–475. [7] О. В. Кириченко, *Сиб. матем. журн.*, **39**:1 (1998), 45–48. [8] Н. В. Алексенко, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 2, 3–6. [9] Н. В. Алексенко, Р. К. Романовский, *Дифференц. уравнения*, **37**:2 (2001), 147–153. [10] Р. К. Романовский, Г. А. Троценко, *Сиб. матем. журн.*, **44**:2 (2003), 444–453. [11] Г. А. Троценко, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 6, 77–81. [12] С. М. Добровольский, А. В. Рогозин, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 98–105. [13] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970. [14] А. Д. Майзель, *Тр. УрПИ. Сер. матем.*, **51** (1954), 20–50.

Р. К. Романовский

Омский государственный технический университет

Поступило

11.04.2008

Л. В. Бельгарт

Омский государственный технический университет

E-mail: belgart@mail.rambler.ru