Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Прохоров, О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 256–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:26:58

О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения

И. В. Прохоров

В работе исследованы непрерывные свойства решения краевой задачи для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред. Установлена разрешимость краевой задачи и получены оценки типа принципа максимума. Показано, что френелевская составляющая в операторе сопряжения существенно усложняет структуру множества, на котором решение краевой задачи непрерывно.

Библиография: 11 названий.

В работе рассматривается краевая задача для стационарного интегродифференциального уравнения переноса излучения с условиями сопряжения, в которых содержится оператор, моделирующий френелевское и диффузное отражение на границах раздела многокомпонентной среды. Оператор сопряжения представляет собой линейную комбинацию двух ограниченных операторов. Один из них определяется с помощью показателей преломления контактных сред на основе формул Френеля [1], [2], а другой – интегрального типа, задается посредством индикатрисы отражения [2].

В последнее время указанная модель получила особенную популярность при построении реалистичных изображений трехмерных объектов в компьютерной графике [3], [4]. В теоретическом плане эта задача изучена недостаточно полно.

Данная статья продолжает исследования авторских работ [5]–[7]. В работе [5] изучались непрерывные свойства решения трехмерной краевой задачи с оператором сопряжения диффузного типа. В [6] рассматривалась краевая задача с френелевским оператором сопряжения, но решение находилось в слабых классах. В работе [7], в частности, исследовалась непрерывность решения краевой задачи для уравнения переноса в многослойной среде с обобщенными условиями сопряжения, описывающими френелевское и диффузное отражение. Было доказано, что в слоистой среде разрывы решения могут иметь место только на границах раздела сред. В общем трехмерном случае разрывы решения могут быть и внутри областей, причем множество непрерывности имеет гораздо более сложную структуру, чем для аналогичных задач с традиционными условиями сопряжения – типа непрерывной

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2810.2008.1) и гранта № 06-II-CY-01-001 конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями Сибирского и Уральского отделений РАН.

склейки решения на границе раздела сред [8]–[10]. В настоящей работе будет определена структура множества непрерывности решения краевой задачи и показано, что определяющую роль в формировании этого множества играет френелевская составляющая в операторе сопряжения.

1. Постановка задачи. Основные ограничения. Пусть G – выпуклая ограниченная область в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через G_i , $i = 1, \dots, p$, попарно непересекающиеся области такие, что

$$G_0 = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_p \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G_0} = \overline{G}.$$

Границу области G ($\partial G = \overline{G} \setminus G$) будем называть *внешней границей* G_0 , а множество $\partial G_0 \setminus \partial G$, представляющее собой объединение границ разделов областей G_i , будем обозначать через γ и называть *внутренней границей* множества G_0 . Области G_i можно интерпретировать как неоднородности или включения, входящие в состав многокомпонентной среды G , где происходит процесс распространения излучения.

Поверхность ∂G_0 предполагается гладкой класса C^2 [10]. Если $z \in \partial G$, то через $n(z)$ будем обозначать единичный вектор внешней нормали в точке z , если же $z \in \gamma$ и лежит на границе контакта двух областей G_i , G_j , $i < j$, то нормаль $n(z)$ выбирается внешней к поверхности ∂G_j (с большим индексом).

Пусть Ω – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, а $\Omega_{\pm}(z)$ – полусферы, $\Omega_{\pm}(z) = \{\omega \in \Omega : \text{sgn}(\omega \cdot n(z)) = \pm 1\}$, и пусть $\Gamma^{\pm} = \partial G \times \Omega_{\pm}(z)$. Будем использовать обозначения

$$f^{\pm}(z, \omega) = f(z \mp 0\omega, \omega), \quad \text{где} \quad f(z \pm 0\omega, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega \cup \Gamma^{\pm}.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется определить функцию $f(r, \omega)$, $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$, из уравнения

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \quad (1)$$

граничного условия

$$f^-(z, \omega) = h(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^-, \quad (2)$$

и условия сопряжения

$$f^-(z, \omega) = (\hat{B}f^+)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \quad (3)$$

Уравнение (1) часто называют *уравнением переноса излучения* или *линейным уравнением Больцмана*. Функция $f(r, \omega)$ интерпретируется как плотность потока частиц в точке r , летящих в направлении ω . Функции μ , μ_s , g и J называются *коэффициентом ослабления*, *коэффициентом рассеяния*, *индикатрисой рассеяния* и *плотностью внутренних источников* соответственно. Функция h описывает поток излучения, поступающий из вне в среду G через поверхность ∂G , а оператор сопряжения $\hat{B}$ моделирует перенос излучения через границы раздела сред γ .

Относительно функций, входящих в уравнение (1), предполагается, что

$$\mu(r), \mu_s(r) \in C_b(G_0), \quad J(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega),$$

где $C_b(X)$ – пространство ограниченных и непрерывных на множестве X функций с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Пусть $\mu_s \geq 0$ на G_0 , а μ удовлетворяет неравенству

$$0 < \underline{\mu} \leq \mu(r) \leq \bar{\mu}, \quad \text{где } \underline{\mu}, \bar{\mu} = \text{const.}$$

Функция g – неотрицательная, ограниченная и непрерывная на $G_0 \times [-1, 1]$ и удовлетворяет условию нормировки для любых $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$

$$\int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1. \quad (4)$$

Будем предполагать, что функция $h(z, \omega)$ в условии (2) принадлежит $C_b(\Gamma^-)$ и неотрицательная, а оператор $\hat{B}$ в условии сопряжения (3) является линейной комбинацией операторов сопряжения френелевского типа $\hat{B}_{\text{fr}}$ и диффузного $\hat{B}_{\text{d}}$, т.е.

$$(\hat{B}\phi)(z, \omega) = \beta_{\text{fr}}(z, \omega)(\hat{B}_{\text{fr}}\phi)(z, \omega) + \beta_{\text{d}}(z, \omega)(\hat{B}_{\text{d}}\phi)(z, \omega). \quad (5)$$

В соотношении (5) оператор $\hat{B}_{\text{fr}}$ задается формулой [6]:

$$(\hat{B}_{\text{fr}}f^+)(z, \omega) = R(z, \nu)f^+(z, \omega_R) + T(z, \nu)f^+(z, \omega_T). \quad (6)$$

Здесь

$$\omega_R = \omega - 2\nu n, \quad \omega_T = \psi(z, \nu)n + \tilde{\kappa}(z, \nu)(\omega - \nu n), \quad \nu = \omega \cdot n(z), \quad (7)$$

$$\tilde{\kappa}(z, \nu) = \begin{cases} \frac{\kappa_i}{\kappa_j}, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j, \quad 0 < \nu(z) \leq 1, \\ \frac{\kappa_j}{\kappa_i}, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j, \quad -1 \leq \nu(z) < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z, \nu) = \begin{cases} \text{sgn}(\nu)\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2(z, \nu)(1 - \nu^2)}, & \text{если } 1 - \tilde{\kappa}^2(z, \nu)(1 - \nu^2) \geq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

$$R(z, \nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2(z, \nu) + R_{\perp}^2(z, \nu)), \quad T(z, \nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2(z, \nu) + T_{\perp}^2(z, \nu)) \frac{\tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}{\psi(z, \nu)}, \quad (9)$$

где константы κ_i обозначают показатели преломления сред G_i и

$$R_{\parallel}(z, \nu) = \frac{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) - \nu}{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z, \nu) = \frac{\psi(z, \nu) - \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}{\psi(z, \nu) + \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}, \quad (10)$$

$$T_{\parallel}(z, \nu) = \frac{2\psi(z, \nu)}{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(z, \nu) = \frac{2\psi(z, \nu)}{\psi(z, \nu) + \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}. \quad (11)$$

Вектора ω_R (или соответственно ω_T) характеризуют направление потока излучения, падающего на поверхность ∂G_j и в результате зеркального отражения (или соответственно преломления) по закону Снеллиуса [1], [2] меняющего свое направление на ω . Коэффициенты R и T в (6) характеризуют соответственно отражательную и пропускательную способность границы раздела сред G_i и G_j при френелевском отражении (соответственно преломлении) для неполяризованного излучения [1], [2]. В силу (8) при $1 - \tilde{\kappa}^2(z, \nu)(1 - \nu^2) < 0$ из (9) получаем, что $T(z, \omega) = 0$, $R(z, \omega) = 1$. В оптике этот случай называется полным внутренним отражением [1].

Оператор $\widehat{B}_d$ в (5), описывающий диффузное отражение, имеет вид

$$(\widehat{B}_d\phi)(z, \omega) = \int_{\Omega} g_d(z, \omega, \omega') \phi(z, \omega') d\omega', \quad (12)$$

где функция $g_d(z, \omega, \omega')$, называемая *индикатрисой отражения*, ограничена и непрерывна на $\gamma \times \Omega \times \Omega$ и удовлетворяет условию нормировки (4) для всех $(z, \omega) \in \gamma \times \Omega$. Функции

$$\beta_{fr}, \beta_d \in C_b(\gamma \times \Omega), \quad \beta_{fr}(z, \omega), \beta_d(z, \omega) \geq 0, \quad \beta_{fr}(z, \omega) + \beta_d(z, \omega) \leq 1,$$

определяют френелевскую и диффузную составляющую в отраженном свете.

2. Функциональные пространства. Пусть лучи

$$L_{r, \omega} = \{r + \omega t : t > 0\} \quad \text{и} \quad L_{r, -\omega} = \{r - \omega t : t > 0\}$$

при любых $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$ пересекают ∂G_0 в конечном числе точек

$$\begin{aligned} z_i(r, \omega) &= r + t_i(r, \omega)\omega, & i &= 1, \dots, q(r, \omega), \\ z_i(r, -\omega) &= r - t_i(r, -\omega)\omega, & i &= 1, \dots, q(r, -\omega), \end{aligned}$$

соответственно, причем

$$\sup_{r, \omega \in G_0 \times \Omega} q(r, \omega) < \infty.$$

Это условие называется *условием обобщенной выпуклости* [9], [10]. Будем считать, что при фиксированных r, ω функции $t_i(r, \omega)$ упорядочены по возрастанию, т.е. $t_i(r, \omega) < t_{i+1}(r, \omega)$. Для краткости через $d(r, \omega)$ будем обозначать расстояние от точки r до внешней границы ∂G в направлении ω , т.е. $d(r, \omega) = t_{q(r, \omega)}(r, \omega)$.

С каждой точкой $r \in G_0$ будем связывать пока произвольное множество направлений $\Omega_0(r) \subset \Omega$. Потребуем лишь, чтобы оно было плотное в Ω и $\text{mes}_2(\Omega \setminus \Omega_0(r)) = 0$, где через символ mes_n обозначена мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Нашей конечной целью является построение множества $G_0 \times \Omega_0(r)$, на котором решение краевой задачи $f(r, \omega)$ непрерывно. Непосредственно построением этого множества мы займемся в следующем пункте.

Через $\Omega_0^+(z)$ и $\Omega_0^-(z)$, где $z \in \partial G_0$, обозначим множества единичных векторов, порожденные множеством $\Omega_0(r)$. А именно, элемент $\omega \in \Omega_0^+(z)$, если существует такая точка $r \in G_0$, что справедливо представление $z = r + t_1(r, \omega)\omega$, и аналогично $\omega \in \Omega_0^-(z)$, если существует такая точка $r \in G_0$, что справедливо $z = r - t_1(r, -\omega)\omega$. Отметим, что при фиксированном z множества $\Omega_0^+(z)$ и $\Omega_0^-(z)$, вообще говоря, не совпадают, а для точек $z \in \partial G$ в силу выпуклости области G они не пересекаются. Учитывая введенные обозначения, построим множества

$$\Gamma_0^\pm = \{(z, \omega) \in \partial G \times \Omega_0^\pm(z)\}, \quad \Gamma_{\gamma, 0}^\pm = \{(z, \omega) \in \partial G_0 \times \Omega_0^\pm(z)\},$$

которые в дальнейшем нам понадобятся при исследовании поведения решения уравнения переноса в граничных точках.

Скалярное произведение вектора ω и градиента функции $f(r, \omega)$ по переменной r будем понимать в некотором обобщенном смысле [8]–[10], а именно

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) = \left. \frac{\partial f(r + t\omega, \omega)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Определим множество $D(G_0 \times \Omega_0(r))$, в котором будем искать решение краевой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $f(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$, если при любых $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$ функция $f(r + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по переменной t , $t \in (-t_1(r, -\omega), t_1(r, \omega))$ и функции $f, \omega \cdot \nabla_r f \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$.

Имеет место

ЛЕММА 1. Пусть $\phi(r, \omega, t') \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times [s, t])$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(r, \omega, s, t) &= \int_s^t \phi(r + t'\omega, \omega, t') dt' \\ &\in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times [-d(r, -\omega), d(r, \omega)] \times [-d(r, -\omega), d(r, \omega)]), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Phi_1(r, \omega) = \int_0^{t_1(r, \pm\omega)} \phi(r \pm t\omega, \omega, t) dt \in D(G_0 \times \Omega_0(r)) \quad (14)$$

при

$$\begin{aligned} \phi(r, \omega, t) &\in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times [0, t_1(r, \pm\omega)]) \\ \phi'_t(r, \omega, t) &\in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times (0, t_1(r, \pm\omega))) \\ t_1(r, \pm\omega) &\in C_b(G_0 \times \Omega_0(r)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности функции ϕ и области G следует ограниченность функции Φ . Докажем непрерывность функции Φ на

$$X = G_0 \times \Omega_0(r) \times [-d(r, -\omega), d(r, \omega)] \times [-d(r, -\omega), d(r, \omega)].$$

Фиксируем произвольную точку $(r, \omega, s, t) \in X$. Для любой последовательности точек

$$(r_n, \omega_n, s_n, t_n) \in X, \quad (r_n, \omega_n, s_n, t_n) \rightarrow (r, \omega, s, t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

рассмотрим выражения

$$\begin{aligned} \Phi(r_n, \omega_n, s_n, t_n) &= \int_{s_n}^{t_n} \phi(r_n + t'\omega_n, \omega_n, t') dt' = \int_0^1 u_n(t') dt', \\ \Phi(r, \omega, s, t) &= \int_s^t \phi(r + t'\omega, \omega, t') dt' = \int_0^1 u(t') dt', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_n(t') &= (t_n - s_n)\phi(r_n + (s_n + (t_n - s_n)t')\omega_n, \omega_n, s_n + (t_n - s_n)t'), \\ u(t') &= (t - s)\phi(r + (s + (t - s)t')\omega, \omega, s + (t - s)t'). \end{aligned}$$

Заметим, что $|u_n(t')| \leq \text{const}$ для любого n . Докажем, что $u_n(t') \rightarrow u(t')$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду на $[0, 1]$. В силу условия обобщенной выпуклости при любом n прямая $\{r_n + t'\omega_n : -\infty < t' < \infty\}$ пересекает границу ∂G_0 в конечном числе точек. Пусть

$$r_n + (s_n + (t_n - s_n)t_{i,n})\omega_n, \quad i = 1, \dots, q_n, \quad q_n < \infty,$$

– точки пересечения отрезка $\{r_n + (s_n + (t_n - s_n)t')\omega_n : 0 \leq t' \leq 1\}$ с границей ∂G_0 . Обозначим

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{q_n} t_{i,k}.$$

Множество Y является счетным подмножеством отрезка $[0, 1]$, поскольку представляет собой счетное объединение конечных множеств.

Таким образом, поскольку $\phi(r, \omega, t') \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times [s, t])$, то все функции $u_j(t')$ из последовательности $\{u_n(t')\}$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны по t' , $t' \in [0, 1] \setminus Y$. Следовательно, $u_n(t') \rightarrow u(t')$ почти всюду на $[0, 1]$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(r_n, \omega_n, s_n, t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(t') dt' \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t') dt' = \int_0^1 u(t') dt' = \Phi(r, \omega, s, t). \end{aligned}$$

В итоге, мы доказали непрерывность функции $\Phi(r, \omega, s, t)$ на множестве X .

Поскольку $\Phi_1(r, \omega) = \Phi(r, \omega, 0, t_1(r, \omega))$, то из непрерывности функции t_1 на $G_0 \times \Omega_0(r)$ и из уже доказанного выше вытекает, что функция $\Phi_1(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$.

Так как для любых $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r \Phi_1(r, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t_1(r+t\omega, \omega)} \phi(r + t\omega + t'\omega, \omega, t') dt' \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t_1(r, \omega)-t} \phi(r + (t+t')\omega, \omega, t') dt' \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t_1(r, \omega)} \phi(r + t'\omega, \omega, t' - t) dt' \Big|_{t=0} \\ &= \int_0^{t_1(r, \omega)} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r + t'\omega, \omega, t' - t) \Big|_{t=0} dt' - \phi(r, \omega, 0) \end{aligned}$$

и

$$\phi(r, \omega, t) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times [0, t_1(r, \omega)]), \quad \phi'_t(r, \omega, t) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times (0, t_1(r, \omega))),$$

то функция $\Phi_1(r + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по t , $t \in (t_1(r, -\omega), t_1(r, \omega))$, и выполнено $\omega \cdot \nabla_r \Phi_1(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$. Следовательно, $\Phi_1(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$. Аналогично показывается, что

$$\int_0^{t_1(r, -\omega)} \phi(r - t\omega, \omega, t) dt = -\Phi(r, \omega, 0, -t_1(r, -\omega))$$

принадлежит пространству $D(G_0 \times \Omega_0(r))$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$ и $t_1(r, \pm\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$, тогда

$$\tilde{f}^\pm(r, \omega) = f(r \pm t_1(r, \pm\omega)\omega \mp 0\omega, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$, то $\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ и по лемме 1 функция

$$\int_0^{t_1(r, \omega)} \omega \cdot \nabla_r f(r + t\omega, \omega) dt + f(r, \omega)$$

принадлежит $C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$. Согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_0^{t_1(r, \omega)} \omega \cdot \nabla_r f(r + t\omega, \omega) dt = f(r + t_1(r, \omega)\omega - 0\omega, \omega) - f(r, \omega),$$

следовательно, $\tilde{f}^+(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$. Так как $\omega \cdot \nabla_r \tilde{f}^+(r, \omega) = 0$ для любых $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$, то $\tilde{f}^+(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$. Аналогично показывается, что $\tilde{f}^-(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$.

ЛЕММА 3. 1) Пусть функция $f(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$ и $t_1(r, \pm\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$. Тогда ее след $f^\pm(z, \omega)$ на граничном множестве $\Gamma_\gamma^\pm = \Gamma_\gamma^\pm \cup (\gamma \times \Omega)$ принадлежит пространству $C_b(\Gamma_{\gamma,0}^\pm)$, где $\Gamma_{\gamma,0}^\pm = \Gamma_0^\pm \cup (\gamma \times \Omega_0(z))$.

2) Пусть функция $\varphi(z, \omega)$ задана на множестве $\Gamma_\gamma^\pm$ и принадлежит $C_b(\Gamma_{\gamma,0}^\pm)$. Тогда ее продолжение $\tilde{\varphi}^\pm(r, \omega)$ в область G , построенное по формуле

$$\tilde{\varphi}^\pm(r, \omega) = \varphi(r \pm t_1(r, \pm\omega)\omega \mp 0\omega, \omega),$$

принадлежит пространству $D(G_0 \times \Omega_0(r))$, если $t_1(r, \pm\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (z, ω) – произвольная точка $\Gamma_{\gamma,0}^+$. Докажем, что $f^\pm(z, \omega)$ непрерывна в этой точке.

Пусть последовательность $(z_n, \omega_n) \in \Gamma_{\gamma,0}^+$ и $(z_n, \omega_n) \rightarrow (z, \omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\Gamma_{\gamma,0}^+ \subseteq \Gamma_\gamma^+$ и $(z, \omega) \in \Gamma_{\gamma,0}^+$, то существует точка $r \in G_0$ такая, что $z = r + t_1(r, \omega)\omega$. Так как множество G_0 открытое, то точка r принадлежит G_0 вместе с некоторой ε -окрестностью $V_\varepsilon(r) = \{r' \in \mathbb{R}^3 : |r' - r| < \varepsilon\}$. Поскольку $(z_n, \omega_n) \rightarrow (z, \omega)$, существует такой номер n_0 , что для любого $n > n_0$ луч $L_{z_n, -\omega_n}$ имеет непустое пересечение с окрестностью $V_\varepsilon(r)$. Поэтому в силу непрерывности функции $t_1(r, \omega)$, начиная с некоторого номера, для любых (z_n, ω_n) существуют точки $r_n \in V_\varepsilon(r)$, удовлетворяющие равенству $z_n = r_n + t_1(r_n, \omega_n)\omega_n$.

Согласно результатам предыдущей леммы для любой $f \in D$ функция $\tilde{f}^+(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$, поэтому

$$\tilde{f}^+(r_n, \omega_n) \rightarrow \tilde{f}^+(r, \omega) \quad \text{при} \quad (r_n, \omega_n) \rightarrow (r, \omega).$$

Следовательно, для указанных (z_n, ω_n) справедливо

$$f^+(z_n, \omega_n) = \tilde{f}^+(r_n, \omega_n) \rightarrow \tilde{f}^+(r, \omega) = f^+(z, \omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тем самым, непрерывность функции f^+ на множестве $\Gamma_{\gamma,0}^+$ доказана. Ее ограниченность очевидным образом вытекает из ограниченности $\tilde{f}^+$. Доказательство утверждения $f^- \in C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$ проводится аналогичным образом.

Утверждение второго пункта леммы вытекает из непрерывности функции $t_1(r, \omega)$ на множестве $G_0 \times \Omega_0(r)$ и соотношения $\omega \cdot \nabla_r \tilde{\varphi}^\pm(r, \omega) = 0$, справедливого на этом же множестве.

Приведенные леммы носят условный характер, поскольку в формулировке утверждений требуется непрерывность функций $t_1(r, \pm\omega)$ на $G_0 \times \Omega_0(r)$. В третьем пункте мы дадим конструктивное описание этого множества, которое, в частности, будет удовлетворять требованию

$$t_1(r, -\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r)).$$

Поэтому ниже мы это условие предполагаем выполненным.

Введем в рассмотрение оператор $\hat{L}: D(G_0 \times \Omega_0(r)) \rightarrow C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ по формуле

$$(\hat{L}f)(r, \omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega).$$

Поскольку $\mu \in C_b(G_0)$, из определения множества D вытекает, что определение оператора $\hat{L}$ корректно.

Введем обозначение

$$[f]_{\omega'}(r, \omega) = f(r + 0\omega', \omega) - f(r - 0\omega', \omega).$$

Величина $[f]_{\omega'}(r, \omega)$ представляет собой величину разрыва функции f в точке (r, ω) по переменной r в направлении ω' . Если положить $\omega' = \omega$ и $r = z \in \partial G_0$, то

$$[f]_{\omega}(z, \omega) = f(z + 0\omega, \omega) - f(z - 0\omega, \omega) = f^-(z, \omega) - f^+(z, \omega),$$

где $f^\pm$ были определены выше. Пусть

$$\tau(r, \omega, t) = \int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'$$

и $\tau_1(r, \omega) = \tau(r, \omega, t_1(r, -\omega))$. Учитывая ограничения на функцию μ и леммы 1–3, стандартным приемом [8]–[10] показывается, что для функции $f \in D$ справедливо представление

$$\begin{aligned} f(r, \omega) &= f^-(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp(-\tau_1(r, \omega)) \\ &\quad + \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, t)) (\hat{L}f)(r - t\omega, \omega) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \left\| \|f^-\| \exp(-\tau_1(r, \omega)) + \left\| \frac{\hat{L}f}{\mu} \right\| \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, t)) \mu(r - t\omega) dt \right\| \\ &\leq \max \left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{\hat{L}f}{\mu} \right\| \right\} \left\| \exp(-\tau_1(r, \omega)) + 1 - \exp(-\tau_1(r, \omega)) \right\| \\ &= \max \left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{\hat{L}f}{\mu} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16), (17) вытекает, что если для любых двух решений $f_1, f_2 \in D$ уравнения $\widehat{L}f = F$ соответствующие f_1^-, f_2^- совпадают всюду на $\Gamma_{\gamma,0}^-$, то $f_1 = f_2$ везде в $G_0 \times \Omega_0(r)$. Введем нормировку линейного множества $D(G_0 \times \Omega_0(r))$:

$$\|f\|_D = \max \left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{\widehat{L}f}{\mu} \right\| \right\}. \quad (18)$$

Покажем, что D образует банахово пространство. Из (17), (18) имеем

$$\|f\| \leq \|f\|_D, \quad (19)$$

следовательно, из сходимости последовательности функций в норме пространства D следует сходимость в C_b . Пусть последовательность f_n , $n = 1, 2, \dots$, — фундаментальна в D , т.е. $\|f_n - f_m\|_D \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Отсюда, учитывая (19), получаем

$$\|f_n^- - f_m^-\| \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{\widehat{L}f_n}{\mu} - \frac{\widehat{L}f_m}{\mu} \right\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Так как пространства $C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$ и $C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ банаховы, то существуют такие $f^- \in C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$ и $F \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$, что

$$\|f_n^- - f^-\| \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{\widehat{L}f_n - F}{\mu} \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку решение уравнения $\widehat{L}f = F$ в пространстве D при заданных значениях f на множестве $\Gamma_{\gamma,0}^-$ существует и единственно, то

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \|f_n^- - f^-\|, \left\| \frac{\widehat{L}f_n - F}{\mu} \right\| \right\} \\ &= \max \left\{ \|f_n^- - f^-\|, \left\| \frac{\widehat{L}(f_n - f)}{\mu} \right\| \right\} = \|f_n - f\|_D \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, D — банахово пространство.

3. Непрерывные свойства решения прямой задачи. Взглянув на условие (2), мы увидим, что на внешней границе среды эффекты отражения и преломления не учитываются. В краевой задаче эта фиктивная граница раздела служит для задания входящего в среду излучения в так называемой “дальней зоне”. Доопределим оператор сопряжения на внешней границе нулем, т.е. $(\widehat{B}\phi)(z, \omega) = 0$, $(z, \omega) \in \Gamma^-$. На внутренней границе γ согласно соотношению (5) он является линейной комбинацией двух операторов:

$$(\widehat{B}\phi)(z, \omega) = \beta_{\text{fr}}(z, \omega)(\widehat{B}_{\text{fr}}\phi)(z, \omega) + \beta_d(z, \omega)(\widehat{B}_d\phi)(z, \omega).$$

Введем в рассмотрение следующие множества. Пусть $\Omega'(z)$, $z \in \partial G_0$, — подмножество единичной сферы и $\overline{\Omega}'(z) = \Omega$, $\text{mes}_2(\Omega \setminus \Omega'(z)) = 0$. Дополнительно потребуем, что если $z \in \partial G$, то множество $\Omega'(z)$ содержит только те элементы ω из $\Omega'(z)$,

которые удовлетворяют неравенству $n(z) \cdot \omega > 0$. Множество $\Omega''(z)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega''(z) &= \{\omega \in \Omega : \omega_R(z, \omega), \omega_T(z, \omega) \in \Omega'(z)\} & \text{при } z \in \gamma, \\ \Omega''(z) &= \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega < 0\} & \text{при } z \in \partial G,\end{aligned}\quad (20)$$

где ω_R и ω_T определены в (7).

ЛЕММА 4. Оператор $\widehat{B}_{\text{fr}}$ переводит пространство $C_b(\partial G_0 \times \Omega'(z))$ в $C_b(\partial G_0 \times \Omega''(z))$, а оператор $\widehat{B}_{\text{d}}: C_b(\partial G_0 \times \Omega'(z)) \rightarrow C_b(\partial G_0 \times \Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \gamma$. Поскольку поверхность γ предполагается достаточно гладкой, функция $n(z)$, $z \in \gamma$, будет непрерывной, что влечет за собой непрерывность функций $\omega_R(z, \nu)$, $\psi(z, \nu)$ и $\omega_T(z, \nu)$ в области их определения. Следовательно, согласно (9)–(11) коэффициенты $R(z, \nu)$ и $T(z, \nu)$ непрерывны и ограничены на множестве $\gamma \times \Omega$. Ввиду этого, если функция $\phi(z, \omega) \in C_b(\gamma \times \Omega'(z))$, то функция

$$(\widehat{B}_{\text{fr}}\phi)(z, \omega) = R(z, \nu)\phi(z, \omega_R) + T(z, \nu)\phi(z, \omega_T)$$

может иметь разрыв только в тех точках $\omega \in \Omega$, для которых единичные вектора $\omega_R(z, \omega)$, $\omega_T(z, \omega) \notin \Omega'(z)$. То есть,

$$(\widehat{B}_{\text{fr}}\phi)(z, \omega) \in C_b(\gamma \times \Omega''(z)), \quad \text{если } \phi(z, \omega) \in C_b(\gamma \times \Omega'(z)).$$

Так как индикатриса отражения $g_d(z, \omega, \omega')$ непрерывна и ограничена на множестве $\gamma \times \Omega \times \Omega$, то диффузный оператор сопряжения, определяемый соотношением (12), будет обладать сглаживающими свойствами для функции $\phi(z, \omega)$ по угловой переменной ω , не изменяя непрерывных свойств по переменной z . Этот факт нетрудно получить, применив общую теорему о непрерывности интеграла Лебега по параметру [11].

Если $z \in \partial G$, то утверждение леммы вытекает в силу доопределения оператора сопряжения на внешней границе.

Теперь, как и обещали, перейдем к определению множества $\Omega_0(r)$, которое строится рекуррентным образом. Пусть

$$\Omega_1(r) = \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega \neq 0, \text{ где } z = r - t_1(r, -\omega)\omega\}, \quad (21)$$

а множество $\Omega_1^+(z)$ образовано такими единичными векторами ω , для которых существует хотя бы одна точка $r \in G_0$ такая, что $z = r + t_1(r, \omega)\omega$, причем $\omega \in \Omega_1(r)$ и $n(z) \cdot \omega \neq 0$.

При сформулированных выше ограничениях на гладкость ∂G_0 из [10] следует, что функция $t_1(r, \omega): G_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна для всех $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$ таких, что отрезок $\{r + t\omega, 0 \leq t \leq t_1(r, \omega)\}$ не является касательным к поверхности ∂G_0 в точке $r + t_1(r, \omega)\omega$. Следовательно, функция $t_1(r, -\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_1(r))$, где $\Omega_1(r)$ определено в (21). Из определения множеств $\Omega_1(r)$ и $\Omega_1^+(z)$ и из леммы 3 вытекает, что для любой $f \in D(G_0 \times \Omega_1(r))$ ее след – функции f^+ на Γ_γ^+ и f^- на Γ_γ^- – принадлежат соответственно $C_b(\partial G_0 \times \Omega_1^+(z))$ и $C_b(\partial G_0 \times \Omega_1^-(z))$.

Построим следующую цепочку множеств для $i = 1, 2, \dots$:

$$\Omega_i^+(z) = \{\omega \in \Omega_i(r) : r \in G_0, z = r + t_1(r, \omega)\omega, n(z) \cdot \omega \neq 0\}, \quad z \in \partial G_0, \quad (22)$$

$$\Omega_i^-(z) = \begin{cases} \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega < 0\}, & z \in \partial G; \\ \{\omega \in \Omega : \omega_R(z, \omega) \in \Omega_i^+(z), \text{ если } \beta_{\text{fr}}(z, \omega) \neq 0, \\ \omega_T(z, \omega) \in \Omega_i^+(z), \text{ если } \beta_{\text{fr}}(z, \omega), T(z, \omega) \neq 0\}, & z \in \gamma. \end{cases} \quad (23)$$

$$\Omega_{i+1}(r) = \{\omega \in \Omega_i(r) : \omega_R(z, \omega), \omega_T(z, \omega) \in \Omega_i^-(z), z = r - t_1(r, -\omega)\omega\}, \quad r \in G_0. \quad (24)$$

Нетрудно заметить, что для всех $r \in G_0$ имеют место включения

$$\Omega_1(r) \supseteq \Omega_2(r) \supseteq \Omega_3(r) \supseteq \dots$$

Прокомментируем приведенное построение множеств $\Omega_i(r)$. Из определения функции расстояния вытекает, что $t_1(r, -\omega)$, имеющая ненулевой разрыв $[t_1]_{\omega'}$ в некоторой точке (r^*, ω^*) , $\omega^* \neq \omega'$, имеет его и для всех (r', ω^*) таких, что r' лежит на луче $L_{r^*, -\omega^*}$. Поэтому $G_0 \times \Omega_2(r)$ представляет собой множество непрерывности функции $t_1(r, -\omega)$, в котором помимо точек ее разрыва, удалены также такие точки (r', ω'') , что r' лежит на лучах $L_{r, \omega''}$, образованных в результате “зеркального отражения и преломления по закону Снеллиуса указанных разрывов от поверхности раздела сред”. Множество $G_0 \times \Omega_3(r)$ получается из $G_0 \times \Omega_1(r)$ удалением точек, которые появляются в результате “однократных и двукратных переотражений” разрывов функции расстояния t_1 .

Пусть $\Omega_0(r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r)$, и будем предполагать, что $\bar{\Omega}_0(r) = \Omega$, $\text{mes}_2(\Omega \setminus \Omega_0(r)) = 0$. Таким образом, множество $\Omega_0(r)$ построено.

Из леммы 4 и результатов предыдущего пункта вытекает, что $\hat{B}: C_b(\Gamma_{\gamma,0}^+) \rightarrow C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$, и что функция $(\hat{B}f^+)(z, \omega)$ принадлежит пространству $C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$ при условии, что $f \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$. Действительно, если $f \in D$, то по лемме 3 ее след на Γ_{γ}^+ принадлежит $C_b(\Gamma_{\gamma,0}^+)$ и, следовательно, $\hat{B}f^+ \in C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$.

Обозначим через $\hat{S}$ оператор, действующий из $C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ в $C_b(G_0 \times \Omega)$ и определенный формулой

$$(\hat{S}f)(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega'.$$

Учитывая ограничения на функции g , проверка вложения образа оператора $\hat{S}$ в пространство $C_b(G_0 \times \Omega)$ осуществляется с использованием теоремы о непрерывности интеграла Лебега по параметру [11]. Непосредственное доказательство этого факта при более слабых ограничениях содержится в [10].

Введем оператор $\hat{A}$, действующий по формуле

$$(\hat{A}f)(r, \omega) = \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, t)) f(r - t\omega, \omega) dt. \quad (25)$$

Из свойств пространства $D(G_0 \times \Omega_0(r))$, изученных в п. 2, вытекает, что функция оптического расстояния $\tau(r, \omega, t)$ принадлежит $C_b(G_0 \times \Omega_0(r) \times (0, t_1(r, -\omega)))$, причем

функция $\tau'_t(r, \omega, t) = \mu(r - t\omega)$ тоже принадлежит ему. Следовательно, по лемме 1 получаем, что $\hat{A}: C_b(G_0 \times \Omega_0(r)) \rightarrow D(G_0 \times \Omega_0(r))$. Так как $C_b(G_0 \times \Omega) \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$, то оператор $\hat{A}$ переводит и пространство $C_b(G_0 \times \Omega)$ в $D(G_0 \times \Omega_0(r))$. Оператор $\hat{T}: D(G_0 \times \Omega_0(r)) \rightarrow D(G_0 \times \Omega_0(r))$ определяется через введенные ранее $\hat{A}$, $\hat{S}$ и $\hat{B}$:

$$(\hat{T}f)(r, \omega) = (\hat{B}f^+)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp(-\tau_1(r, \omega)) + (\hat{A}\hat{S}f)(r, \omega). \quad (26)$$

Используя представление (16), как обычно делается в теории переноса [6], [8]–[10], можно перейти от краевой задачи (1)–(3) к эквивалентной задаче нахождения функции $f \in D$ из уравнения

$$f = f_0 + \hat{T}f, \quad \text{где} \quad f_0(r, \omega) = J_\Gamma(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp(-\tau_1(r, \omega)) + (\hat{A}J)(r, \omega). \quad (27)$$

В (27) функция J_Γ определяется следующим образом:

$$J_\Gamma(z, \omega) = \begin{cases} h(z, \omega), & \text{если } (z, \omega) \in \Gamma^-, \\ 0, & \text{если } (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \end{cases} \quad (28)$$

Так как $h \in C_b(\Gamma^-)$ и $\Gamma^- \cap \gamma \times \Omega = \emptyset$, то $J_\Gamma \in C_b(\Gamma_{\gamma,0}^-)$. Поэтому, поскольку $J \in C_b(G_0 \times \Omega)$, из леммы 3 заключаем, что $f_0 \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$. Прежде чем исследовать исходную краевую задачу (1)–(3), мы рассмотрим более общую вспомогательную задачу, в которой нам будет удобно предполагать, что функция $J_\Gamma(z, \omega)$, заданная формулой (28), может принимать ненулевые значения не только на $\partial G \times \Omega$, но и на внутренней границе $\gamma \times \Omega$ с сохранением непрерывности на $\Gamma_{\gamma,0}^-$.

Обозначим $\lambda(r) = \mu_s(r)/\mu(r)$ и $\bar{\lambda} = \|\lambda(r)\|$. Имеет место

ЛЕММА 5. Пусть $\bar{\lambda} < 1$ и $\|\hat{B}\| < 1$, тогда существует единственное решение следующей краевой задачи:

$$(\hat{L}f)(r, \omega) = (\hat{S}f + J)(r, \omega), \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r), \quad (29)$$

$$f^-(z, \omega) = (\hat{B}f^+ + J_\Gamma)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma_{\gamma,0}^-. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что при сформулированных условиях уравнение (26) однозначно разрешимо в D . Покажем, что норма оператора $\hat{T}$, переводящего банахово пространство D в себя, меньше единицы. Отсюда немедленно будет следовать разрешимость краевой задачи (29), (30) и, кроме того, справедливость представления решения в виде ряда Неймана

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{T}^i f_0, \quad (31)$$

сходящегося в норме пространства D . Учитывая условие нормировки (4), для любой функции $f \in D$ имеем

$$\|\hat{T}f\|_D = \max \left\{ \|(\hat{T}f)^-\|, \left\| \frac{\hat{L}\hat{T}f}{\mu} \right\| \right\} = \max \left\{ \|\hat{B}f^+\|, \left\| \frac{\hat{S}f}{\mu} \right\| \right\} \leq \max \{ \|\hat{B}\|, \bar{\lambda} \} \|f\|.$$

Применяя оценку (19), получаем

$$\|\hat{T}f\|_D \leq \max \{ \|\hat{B}\|, \bar{\lambda} \} \|f\|_D.$$

Так как $\bar{\lambda} < 1$ и $\|\hat{B}\| < 1$, то $\|\hat{T}\| < 1$.

Поскольку нормы операторов $\hat{B}_{\text{fr}}$ и $\hat{B}_{\text{d}}$ равны единице, то ограничение $\|\hat{B}\| < 1$ на оператор сопряжения в доказанной лемме выполняется, если $\beta_{\text{fr}}(z, \omega) + \beta_{\text{d}}(z, \omega) \leq \text{const} < 1$. С физической точки зрения это означает, что на поверхности раздела сред происходит сколь угодно малое поглощение излучения.

В условиях леммы 5 при $J \geq 0$, $J_{\Gamma} \geq 0$ решение $f \geq 0$ всюду в $G_0 \times \Omega_0(r)$. Это вытекает из того факта, что в ряде (31) все слагаемые – неотрицательные функции. Сейчас мы докажем утверждение о неотрицательности решения при выполнении условия $\lambda(r) \leq 1$, более слабого, нежели условие $\bar{\lambda} < 1$.

ЛЕММА 6. Пусть f – решение краевой задачи (29), (30) и $J \geq 0$, $J_{\Gamma} \geq 0$, $\lambda(r) \leq 1$, $\|\hat{B}\| < 1$. Тогда $f(r, \omega) \geq 0$ в $G_0 \times \Omega_0(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: f есть решение краевой задачи, но

$$f_{\text{inf}} = \inf_{(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)} (f(r, \omega)) < 0.$$

В этом случае из неотрицательности оператора $\hat{B}$ вытекает $(\hat{B}f_{\text{inf}}) \geq f_{\text{inf}}\|\hat{B}\| \geq f_{\text{inf}}\|\hat{B}\|$. Так как f удовлетворяет уравнению (26) и $J, J_{\Gamma} \geq 0$, то при всех $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$

$$\begin{aligned} f(r, \omega) &\geq (\hat{B}(f^+ - f_{\text{inf}} + f_{\text{inf}}) + J_{\Gamma})(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp(-\tau_1(r, \omega)) \\ &\quad + \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, t))(\mu_s(r - t\omega)f_{\text{inf}} + J(r - t\omega, \omega)) dt \\ &\geq f_{\text{inf}}\|\hat{B}\| \exp(-\tau_1(r, \omega)) + f_{\text{inf}}(1 - \exp(-\tau_1(r, \omega))) \\ &= f_{\text{inf}}(1 - (1 - \|\hat{B}\|) \exp(-\tau_1(r, \omega))) \geq f_{\text{inf}}(1 - (1 - \|\hat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) вытекает, что $f_{\text{inf}} \leq f_{\text{inf}}(1 - (1 - \|\hat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d))$, следовательно, $f_{\text{inf}}(1 - \|\hat{B}\|) \times \exp(-\bar{\mu}d) \geq 0$. Поскольку $\|\hat{B}\| < 1$, то $f_{\text{inf}} \geq 0$. Получили противоречие.

ЛЕММА 7. Пусть f – решение краевой задачи (29), (30), а функция $\tilde{f}$ есть решение следующей краевой задачи:

$$\omega \cdot \nabla_r \tilde{f}(r, \omega) + \tilde{\mu}(r) \tilde{f}(r, \omega) = \tilde{\mu}_s(r) \int_{\Omega} \tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') \tilde{f}(r, \omega') d\omega' + \tilde{J}(r, \omega), \quad (33)$$

$$\tilde{f}^-(z, \omega) = (\hat{B}\tilde{f}^+ + \tilde{J}_{\Gamma})(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma_{\gamma, 0}^-, \quad (34)$$

и выполняются условия

$$\begin{aligned} \lambda(r) \leq 1, \quad \tilde{\lambda}(r) \leq 1, \quad \|\hat{B}\| < 1, \quad \|\hat{\tilde{B}}\| < 1, \quad \tilde{\mu}(r) \leq \mu(r), \quad \tilde{\mu}_s(r) \geq \mu_s(r), \\ \tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') \geq g(r, \omega \cdot \omega'), \quad \tilde{J}(r, \omega) \geq |J(r, \omega)|, \quad \tilde{J}_{\Gamma}(r, \omega) \geq |J_{\Gamma}(r, \omega)|, \\ ((\hat{\tilde{B}} - \hat{B})\phi)(z, \omega) \geq 0 \quad \text{при} \quad \phi \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда $|f(r, \omega)| \leq \tilde{f}(r, \omega)$ везде в $G_0 \times \Omega_0(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично тому, что имеется в [6]. А именно, рассматривается разность $\tilde{f} - |f|$ соответствующих краевых задач и с помощью предыдущей леммы устанавливается ее неотрицательность на множестве $G_0 \times \Omega_0(r)$.

ЛЕММА 8. Пусть $\lambda(r) \leq 1$, $\|\widehat{B}\| < 1$. Тогда существует единственное решение краевой задачи (29), (30), которое удовлетворяет неравенству

$$|f(r, \omega)| \leq M \equiv \frac{\exp(\bar{\mu}d)}{1 - \|\widehat{B}\|} \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\} \quad (35)$$

всюду в $G_0 \times \Omega_0(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – решение задачи (29), (30), тогда f удовлетворяет уравнению (26) и, следовательно, при всех $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |f(r, \omega)| &\leq (\|\widehat{B}\| \|f^+\| + \|J_\Gamma\|) \exp(-\tau_1(r, \omega)) + \left(\bar{\lambda} \|f\| + \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right) (1 - \exp(-\tau_1(r, \omega))) \\ &\leq \|f\| (1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)) + \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|f\| \leq \|f\| (1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)) + \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\},$$

а затем и оценку (35). Из неравенства (35) в силу линейности краевой задачи очевидным образом вытекает единственность решения задачи (29), (30). Докажем его существование.

Пусть функции $f_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, – решения следующих краевых задач:

$$\widehat{L}f_n = \widehat{S}_n f_n + J, \quad f_n^- = \widehat{B}f_n^+ + J_\Gamma, \quad (37)$$

где

$$(\widehat{S}_n f)(r, \omega) = \mu_s(r) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega'.$$

Так как

$$\left\| \frac{\mu_s}{\mu} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\| < 1,$$

то по лемме 5 решение краевой задачи (37) существует и единственно. Причем согласно лемме 7 и только что доказанному последовательность f_n не убывает с ростом n и для любого n справедливо неравенство $\|f_n\| \leq M$, где M определена в (35).

Составим разность $f_{n,m} = f_n - f_m$. Эта функция удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\widehat{L}f_{n,m} = \widehat{S}_n f_{n,m} + (\widehat{S}_n - \widehat{S}_m) f_m, \quad f_{n,m}^- = \widehat{B}f_{n,m}^+. \quad (38)$$

Из оценки (35) вытекает, что для функции $f_{n,m}$ справедливы неравенства

$$\|f_{n,m}\| \leq \frac{\exp(\bar{\mu}d)}{1 - \|\widehat{B}\|} \left\| \frac{(\widehat{S}_n - \widehat{S}_m) f_m}{\mu} \right\| \leq \frac{M \exp(\bar{\mu}d)}{1 - \|\widehat{B}\|} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|. \quad (39)$$

Из (39) следует, что $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Поэтому согласно (38) имеем

$$\|\widehat{L}(f_n - f_m)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty,$$

что, в свою очередь, в совокупности с представлением (16) влечет $\|f_n^- - f_m^-\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Таким образом, $\|f_n - f_m\|_D \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Поскольку пространство D банахово, существует функция $f \in D$ такая, что $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Подставляя разность $f - f_n$ в (38), получаем

$$\begin{aligned}\widehat{L}f &= \widehat{S}f + J + \widehat{L}(f - f_n) - \widehat{S}(f - f_n) - (\widehat{S} - \widehat{S}_n)f_n, \\ f^- &= \widehat{B}f^+ + J_\Gamma + (f^- - f_n^-) - \widehat{B}(f^+ - f_n^+).\end{aligned}$$

Так как $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из последних соотношений выводим, что f есть решение краевой задачи (29), (30).

Заметим, что при доказательстве лемм 5–8 от оператора сопряжения $\widehat{B}$ требовались только его неотрицательность и сжимаемость из $C_b(\Gamma_{0,\gamma}^-)$ в $C_b(\Gamma_{0,\gamma}^+)$.

Вернемся теперь к изучению основной краевой задачи (1)–(3). Покажем, что для задачи (1)–(3) имеют место более тонкие оценки, нежели для (29), (30).

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор сопряжения $\widehat{B}$ определяется соотношением (5) и $\beta_{\text{нр}}(z, \omega) + \beta_{\text{д}}(z, \omega) \leq \text{const} < 1$. Тогда краевая задача

$$\widehat{L}f = \widehat{S}f + J, \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r), \quad (40)$$

$$f^- = h, \quad (z, \omega) \in \Gamma_0^-, \quad f^- = \widehat{B}f^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega_0(z), \quad (41)$$

имеет единственное решение, которое на $G_0 \times \Omega_0(r)$:

1) при $\bar{\lambda} < 1$ удовлетворяет неравенству

$$|f(r, \omega)| \leq \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} \max \left\{ \|h\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}; \quad (42)$$

2) при выполнении условий $\bar{\lambda} \leq 1$, $J \equiv 0$ удовлетворяет неравенству

$$f(r, \omega) \leq \|h\|. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что из условий теоремы и соотношений (5), (6), (12) имеем $\|\widehat{B}\| < 1$, поэтому согласно лемме 8 существование и единственность решения задачи (40), (41) вытекает из разрешимости задачи (29), (30).

Пусть функция $\tilde{f}$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\widehat{L}\tilde{f} = \widehat{S}\tilde{f} + \mu(r)C_1, \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r), \quad (44)$$

$$\tilde{f}^- = C, \quad (z, \omega) \in \Gamma_0^-, \quad \tilde{f}^- = \widehat{B}\tilde{f}^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega_0(z), \quad (45)$$

где $C = C_1/(1 - \bar{\lambda})$ и

$$(\widehat{S}\tilde{f})(r, \omega) = \bar{\lambda}\mu(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') \tilde{f}(r, \omega') d\omega', \quad C_1 = \max \left\{ \|h\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}.$$

Так как $|J(r, \omega)| \leq \mu(r)C_1$, $h \leq C$, и $\mu_{\text{с}}(r) \leq \bar{\lambda}\mu(r)$, то из леммы 7 о сравнении решений вытекает, что $f(r, \omega) \leq \tilde{f}(r, \omega) \equiv C$.

Обозначим $\beta(z, \omega) = \widehat{B}1$. Так как $\|\widehat{B}\| < 1$, то $\beta(z, \omega) < 1$. Учитывая обозначения, для доказательства пункта 2) теоремы возьмем в качестве мажорирующей функции $\tilde{f}$ решение следующей краевой задачи:

$$\widehat{L}\tilde{f} = \widehat{S}\tilde{f} + (\mu(r) - \mu_s(r))\|h\|, \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r), \quad (46)$$

$$\tilde{f}^- = \|h\|, \quad (z, \omega) \in \Gamma_0^-, \quad \tilde{f}^- = \widehat{B}\tilde{f}^+ + \|h\|(1 - \beta), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega_0(z). \quad (47)$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{f}(r, \omega)$ равна постоянной величине $\|h\|$, следовательно, $f(r, \omega) \leq \|h\|$.

В заключение приведем простой пример множества непрерывности для решения краевой задачи (1)–(3). Пусть область G есть шар радиуса a_3 с центром в начале координат, а разбиение G_0 представлено тремя сферически симметричными областями G_1, G_2, G_3 , где

$$G_1 = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| < a_1\}, \quad G_2 = \{r \in \mathbb{R}^3 : a_1 < |r| < a_2\}, \\ G_3 = \{r \in \mathbb{R}^3 : a_2 < |r| < a_3\}.$$

Областям G_i соответствуют показатели преломления κ_i . Оператор сопряжения $\widehat{B}$ представлен только френелевской составляющей, т.е. $\beta_d(z, \omega) = 0$ и $0 < \beta_{fr}(z, \omega) < 1$, $(z, \omega) \in \gamma \times \Omega$.

Выпишем множества $\Omega_1(r)$ и $\Omega_2(r)$, возникающие при построении соответствующей последовательности $\Omega_1(r), \Omega_2(r), \dots, \Omega_n(r), \dots$ (см. формулы (21)–(23)). В рассматриваемом случае они имеют вид

$$\Omega_1(r) = \begin{cases} \Omega, & r \in G_1, \\ \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot r) \neq \sqrt{|r|^2 - a_1^2}\}, & r \in G_2, \\ \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot r) \neq \sqrt{|r|^2 - a_2^2}\}, & r \in G_3, \end{cases}$$

$$\Omega_1^+(z) = \begin{cases} \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot z) \neq 0\}, & |z| = a_1, \\ \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot z) \neq \sqrt{a_2^2 - a_1^2}, (\omega \cdot z) \neq 0\}, & |z| = a_2, \\ \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot z) \neq \sqrt{a_3^2 - a_2^2}, (\omega \cdot z) > 0\}, & |z| = a_3, \end{cases}$$

$$\Omega_1^-(z) = \begin{cases} \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot z) \neq 0\}, & |z| = a_1, \\ \left\{ \omega \in \Omega : (\omega \cdot z) \neq -\sqrt{a_2^2 - a_1^2}, (\omega \cdot z) \neq \sqrt{a_2^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right)^2 a_1^2} \right\}, & |z| = a_2, \\ \{\omega \in \Omega : (\omega \cdot z) < 0\}, & |z| = a_3, \end{cases}$$

$$\Omega_2(r) = \begin{cases} \Omega, & r \in G_1, \\ \{\omega \in \Omega_1(r) : (\omega \cdot r) \neq -\sqrt{|r|^2 - a_1^2}\}, & r \in G_2, \\ \left\{ \omega \in \Omega_1(r) : (\omega \cdot r) \neq \sqrt{|r|^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right)^2 a_1^2} \right\}, & r \in G_3. \end{cases}$$

Все последующие множества $\Omega_3(r), \Omega_4(r), \dots$ совпадают с $\Omega_2(r)$. Таким образом,

$$\Omega_0(r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) = \Omega_2(r).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, М., 1973.
- [2] А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*. Т. 1. *Однократное рассеяние и теория переноса*, Мир, М., 1981; *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*. Т. 2. *Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование*, Мир, М., 1981.
- [3] H. W. Jensen, S. R. Marschner, M. Levoy, P. Hanrahan, "A practical model for subsurface light transport", *Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, ACM, New York, 2001, 511–518.
- [4] H. W. Jensen, *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping*, With a foreword by Pat Hanrahan, A. K. Peters, LTD, Natick, MA, 2001.
- [5] И. В. Прохоров, "Краевая задача теории переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе", *Дифференц. уравнения*, **36:6** (2000), 848–851.
- [6] И. В. Прохоров, "О разрешимости краевой задачи теории переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67:6** (2003), 169–192.
- [7] I. V. Prokhorov, I. P. Yarovenko, T. V. Krasnikova, "An extremum problem for the radiation transfer equation", *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **13:4** (2005), 365–382.
- [8] В. С. Владимиров, *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц*, Тр. МИАН, **61**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 158 с..
- [9] Т. А. Гермогенова, *Локальные свойства решений уравнения переноса*, Наука, М., 1986.
- [10] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, *Inverse Ill-posed Probl. Ser.*, VSP, Utrecht, 2002.
- [11] Г. П. Акилов, Б. М. Макаров, В. П. Хавин, *Элементарное введение в теорию интеграла*, ЛГУ, Л., 1969.

И. В. Прохоров

Институт прикладной математики ДВО РАН

E-mail: prh@iam.dvo.ru

Поступило

26.03.2007

Исправленный вариант

17.06.2008