Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Т. Караев, Символы Березина и классы Шаттена–Неймана, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 207–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 07:47:43

УДК 517.983

СИМВОЛЫ БЕРЕЗИНА И КЛАССЫ ШАТТЕНА–НЕЙМАНА

М. Т. Караев

В терминах символов Березина даются некоторые критерии принадлежности операторов классам Шаттена–Неймана $\mathfrak{S}_p$. В частности, для функции от модельных операторов дается полный ответ на вопрос Нордгрин и Розенталя.

Библиография: 16 названий.

Статья посвящена описанию классов Шаттена–Неймана в терминах символов Березина.

1. *Функциональное гильбертово пространство* – это гильбертово пространство комплекснозначных функций на некотором множестве Q такое, что для каждого $\lambda \in Q$ функционал $f \rightarrow f(\lambda)$ непрерывен. Если $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}(Q)$ – такое пространство, то (в силу теоремы Рисса) для каждого $\lambda \in Q$ существует единственная функция $k_\lambda \in \mathcal{H}$ такая, что $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Семейство $\{k_\lambda : \lambda \in Q\}$ называют *воспроизводящим ядром* пространства $\mathcal{H}$. Подробное изложение теории функциональных гильбертовых пространств и воспроизводящих ядер дано, например, в [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Символом Березина* линейного ограниченного оператора A , действующего в $\mathcal{H}$, называют числовую функцию $\tilde{A}$, определяемую формулой

$$\tilde{A}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle,$$

где $\hat{k}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} k_\lambda / \|k_\lambda\|$ – нормированное воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}$.

Эта функция введена Березиным [3], [4]. В работах [5]–[7] символы Березина применены для описания различных классов компактных теплицевых и ганкелевых операторов в пространствах Бергмана. Отметим также работу [8], где в терминах символов Березина дано описание класса компактных операторов в стандартных функциональных гильбертовых пространствах.

Настоящая работа мотивирована следующим вопросом Нордгрин и Розенталя [8].

ВОПРОС. Как можно охарактеризовать операторы из класса Шаттена–Неймана в терминах их символов Березина?

В этой работе в терминах символов Березина даются некоторые критерии принадлежности операторов классам Шаттена–Неймана $\mathfrak{S}_p$. В частности, для операторов, являющихся функциями от модельных операторов, мы даем полный ответ на вопрос Нордгрин и Розенталя (см. теорему 1).

2. Сначала введем необходимые определения и обозначения. Через $B(H)$ обозначим алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве H . Пусть $K_n \subset B(H)$ – множество всех операторов, ранг которых не превосходит n . *Сингулярное число (s -число)* $s_n(A)$ оператора $A \in B(H)$ определяется формулой

$$s_n(A) = \text{dist}(A, K_n), \quad n \geq 0.$$

Множество всех компактных операторов из $B(H)$ обозначается символом $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}_\infty(H)$. Класс Шаттена–Неймана $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}_p(H)$, $0 < p < +\infty$, образован теми операторами $A \in B(H)$, для которых $\sum_{n \geq 0} s_n(A)^p < +\infty$. Пространство $\mathfrak{S}_p$ при $1 \leq p < +\infty$ является банаховым пространством относительно нормы $(\sum_{n \geq 0} s_n(A)^p)^{1/p}$. Отметим, что если $A \in \mathfrak{S}_\infty$, то последовательность $\{s_n(A)\}_{n \geq 0}$ есть последовательность собственных чисел (с учетом кратностей) самосопряженного оператора $(A^*A)^{1/2}$. Основные сведения об s -числах и классах $\mathfrak{S}_p$ можно найти в книге [9].

Банахова алгебра ограниченных и аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_D |f(z)|$ обозначается символом H^∞ . Пространство Харди $H^2 = H^2(D)$ состоит из аналитических в D функций $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \hat{f}(n)z^n$ таких, что

$$\|f\|_{H^2}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 < r < 1} \int_T |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) = \sum_{n=0}^\infty |\hat{f}(n)|^2 < +\infty,$$

где dm – нормированная мера Лебега на единичной окружности $T = \partial D$.

Внутренней функцией называется такая функция $f \in H^\infty$, что $|f(\zeta)| = 1$ почти всюду в T .

Пространство H^2 удобно естественным образом вложить в пространство $L^2 = L^2(T, m)$, сопоставив функции f из H^2 ее радиальные граничные значения

$$(bf)(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta),$$

существующие (по теореме Фату) для m -почти всех $\zeta \in T$. Тогда

$$H^2 = \{f \in L^2 : \hat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

где $\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T \bar{\zeta}^n f(\zeta) dm(\zeta)$ – коэффициент Фурье функции f . Обозначим

$$H_-^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^2 : \hat{f}(n) = 0, n \geq 0\}.$$

Легко видеть, что подпространства H^2 и H_-^2 ортогональны и дают в сумме все пространство L^2 . Ортогональные проекторы на эти подпространства обозначаются символами P_+ и P_- соответственно.

Если $\varphi \in L^\infty(T)$, то оператор Теплица T_φ и оператор Ганкеля H_φ определяются равенствами

$$T_\varphi f = P_+ \varphi f, \quad f \in H^2, \quad H_\varphi f = P_- \varphi f, \quad f \in H^2.$$

Если X – некоторое пространство функций на единичной окружности, то символом $\tilde{X}$ обозначим пространство функций, состоящее из гармонических продолжений $\tilde{f}$ функций f пространства X в единичный круг D , т.е. $\tilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{f} : f \in X\}$.

3. В этом пункте в терминах символов Березина мы рассмотрим критерии принадлежности операторов классам Шаттена–Неймана $\mathfrak{S}_p$.

Пусть $S, (Sf)(z) = zf(z)$, $f \in H^2$, – односторонний сдвиг в пространстве Харди H^2 и θ – внутренняя функция. В пространстве

$$K_\theta \stackrel{\text{def}}{=} H^2 \ominus \theta H^2$$

рассмотрим модельный оператор Секефальви–Надя–Фояша, определенный по формуле

$$M_\theta = P_\theta S \mid K_\theta,$$

где $P_\theta \stackrel{\text{def}}{=} I - T_\theta T_{\bar{\theta}}$ – ортогональный проектор в H^2 на подпространство K_θ . Известно [10], [11], что оператор M_θ допускает функциональное исчисление из класса H^∞ , т.е. для каждой функции $\varphi \in H^\infty$ определяется оператор $\varphi(M_\theta)$ по формуле

$$\varphi(M_\theta)f = P_\theta \varphi f, \quad f \in K_\theta.$$

Наш основной результат формулируется так.

ТЕОРЕМА 1. Пусть θ – внутренняя функция и $\varphi \in H^\infty$ – непостоянная функция. Положим

$$h_{\theta, \varphi}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(z) - (1 - |\theta(z)|^2) \widetilde{\varphi(M_\theta)}(z)}{\theta(z)}.$$

Тогда верны следующие утверждения:

- 1) $\varphi(M_\theta) \in \mathfrak{S}_\infty$ тогда и только тогда, когда $h_{\theta, \varphi} \in H^\infty + \widetilde{C(\bar{T})}$;
- 2) $\varphi(M_\theta) \in \mathfrak{S}_p$ ($0 < p < +\infty$) тогда и только тогда, когда $h_{\theta, \varphi} \in H^\infty + \widetilde{B_p^{1/p}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем лемму (ссылка на лемму имеется, например, в [12], однако нам не удалось найти ее доказательство в литературе; мы приведем свой вариант доказательства).

ЛЕММА 2. Символ Березина теплицева оператора T_f , $f \in L^\infty(T)$, действующего в пространстве Харди H^2 , совпадает с гармоническим продолжением в круг D функции f , т.е. $\widetilde{T_f} = \tilde{f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k_\lambda(z) = 1/(1 - \bar{\lambda}z)$ – воспроизводящее ядро пространства H^2 и $P_{z_0}(\zeta)$ – ядро Пуассона (представляющее точки $z_0 = re^{iv_0} \in D$):

$$P_{z_0}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - |z_0|^2}{|\zeta - z_0|^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{iv} - z_0|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(v - v_0) + r^2}.$$

Хорошо известно, что если u – гармоническая в круге D функция, то для каждой точки $z_0 = re^{iv_0} \in D$ выполнено равенство

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{iv}) P_{z_0}(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{iv}) P_r(v_0 - v) dv = (P_r * u)(v_0).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_f(\lambda) &= \langle T_f \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = (1 - |\lambda|^2) \left\langle T_f \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle = (1 - |\lambda|^2) \left\langle P_+ f \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\
 &= (1 - |\lambda|^2) \left\langle \frac{f}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle = (1 - |\lambda|^2) \int_T \frac{1}{1 - \bar{\lambda}\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \bar{\lambda}\zeta} f(\zeta) dm(\zeta) \\
 &= (1 - |\lambda|^2) \int_T \frac{1}{|\zeta - \lambda|^2} f(\zeta) dm(\zeta) = \int_T \frac{1 - |\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} f(\zeta) dm(\zeta) \\
 &= \int_T P_\lambda(\zeta) f(\zeta) dm(\zeta) = \tilde{f}(\lambda).
 \end{aligned}$$

Итак, $\tilde{T}_f(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ ($\lambda \in D$). Лемма доказана.

Теперь отметим, что воспроизводящим ядром подпространства $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ является функция

$$k_{\theta, \lambda}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad z \in D.$$

Используя лемму 2, для каждого $\lambda \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\varphi(M_\theta)}(\lambda) &= \langle \varphi(M_\theta) \hat{k}_{\theta, \lambda}, \hat{k}_{\theta, \lambda} \rangle = \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \left\langle \varphi(M_\theta) \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\
 &= \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \left\langle \varphi \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle = \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \left\langle \frac{\varphi}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} (\varphi(\lambda) - \theta(\lambda) \langle T_{\varphi\bar{\theta}} \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle) = \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} (\varphi(\lambda) - \theta(\lambda) \tilde{T}_{\varphi\bar{\theta}}(\lambda)) \\
 &= \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} (\varphi(\lambda) - \theta(\lambda) \widetilde{\varphi\bar{\theta}}(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\varphi(M_\theta)}(\lambda) = \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} (\varphi(\lambda) - \theta(\lambda) \widetilde{\varphi\bar{\theta}}(\lambda)), \quad \lambda \in D. \quad (1)$$

Отсюда

$$\widetilde{\varphi\bar{\theta}}(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda) - (1 - |\theta(\lambda)|^2) \widetilde{\varphi(M_\theta)}(\lambda)}{\theta(\lambda)}, \quad \lambda \in D, \quad (2)$$

т.е. $\widetilde{\varphi\bar{\theta}} = h_{\theta, \varphi}$. Таким образом, гармоническое продолжение в круг D функции $\varphi\bar{\theta}$ выражается через символ Березина оператора $\varphi(M_\theta)$ формулой (2). В силу теоремы Хартмана–Сарасона [11]

$$\varphi(M_\theta) \in \mathfrak{S}_\infty \iff \varphi\bar{\theta} \in H^\infty + C(T). \quad (3)$$

Учитывая, что семейство функций P_r , $0 \leq r < 1$, определяет аппроксимативную единицу для свертки $*$ в пространстве $L^\infty(T)$, легко показать, что

$$\varphi\bar{\theta} \in H^\infty + C(T) \iff \widetilde{\varphi\bar{\theta}} \in H^\infty + \widetilde{C(T)}. \quad (4)$$

Так как $\widetilde{\varphi\bar{\theta}} = h_{\theta, \varphi}$, то первое утверждение теоремы вытекает из эквивалентностей (3) и (4).

Теперь докажем второе утверждение теоремы. В силу формулы Н. К. Никольского [11]

$$\varphi(M_\theta)P_\theta = \Theta H_{\varphi\bar{\theta}},$$

где Θ обозначает оператор умножения в пространстве $L^2(T)$. Так как Θ – изометрия в $L^2(T)$, то из этой формулы ясно, что $\varphi(M_\theta) \in \mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $H_{\varphi\bar{\theta}} \in \mathfrak{S}_p$. Поэтому в силу известных результатов Пеллера [13], [14] $\varphi(M_\theta) \in \mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$, в том и только том случае, если $\varphi\bar{\theta} \in H^\infty + B_p^{1/p}$, где $B_p^{1/p}$ – пространство Бесова (см. также [15]). Так как последнее условие эквивалентно условию $\widetilde{\varphi\bar{\theta}} \in H^\infty + \widetilde{B_p^{1/p}}$, то с учетом формулы (2) завершаем доказательство второго утверждения теоремы.

Приведем еще несколько результатов в том же направлении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B(z)$ – бесконечное произведение Бляшке с нулями $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ и $A \in B(K_B)$ – компактный оператор. Верны следующие утверждения:

- 1) A является оператором Гильберта–Шмидта (т.е. $A \in \mathfrak{S}_2$) в том и только том случае, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_{\overline{B}_n}(A^*A)P_B T_{B_n})\tilde{(\lambda_n)}$$

сходится;

- 2) A является ядерным оператором (т.е. $A \in \mathfrak{S}_1$) в том и только том случае, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_{\overline{B}_n}(U^{-1}AU)P_B T_{B_n})\tilde{(\lambda_n)}$$

сходится для любого унитарного оператора $U \in B(K_B)$, где $B_n(z)$ – произведение Бляшке с нулями $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко доказать, что функции

$$e_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\lambda_n|^2}}{1-\bar{\lambda}_n z} B_n(z), \quad n \geq 1,$$

образуют ортонормированный базис в $K_B = H^2 \ominus BH^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|Ae_n\|^2 &= \langle Ae_n, Ae_n \rangle = \langle A^* Ae_n, e_n \rangle = \langle A^* AT_{B_n} \hat{k}_{\lambda_n}, T_{B_n} \hat{k}_{\lambda_n} \rangle \\ &= \langle T_{\overline{B}_n} A^* AT_{B_n} \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle = \langle T_{\overline{B}_n} A^* AP_B T_{B_n} \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle \\ &= (T_{\overline{B}_n} A^* AP_B T_{B_n})\tilde{(\lambda_n)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|Ae_n\|^2 = (T_{\overline{B}_n} A^* AP_B T_{B_n})\tilde{(\lambda_n)}, \quad n \geq 1.$$

Отсюда легко получается утверждение 1) теоремы.

Для произвольного унитарного оператора $U \in B(K_B)$, полагая $u_n(z) = (Ue_n)(z)$, $n \geq 1$, аналогично доказываем, что

$$\langle Au_n, u_n \rangle = (T_{\bar{B}_n}(U^{-1}AU)P_B T_{B_n})\tilde{(\lambda_n)},$$

откуда в силу произвольности унитарного оператора U получается второе утверждение теоремы.

Перед тем, как перейти к следующему результату, принимаем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{H}(Q)$ – функциональное гильбертово пространство над некоторым множеством Q . Будем говорить, что пространство $\mathcal{H}(Q)$ *обладает свойством (K)* , если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_n(z)\}_{n \geq 1}$ оператор M_{e_n/k_λ} , где k_λ – воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}(Q)$, является плотно определенным оператором в $\mathcal{H}(Q)$ для каждого $n \geq 1$ и для некоторого $\lambda \in Q$. (Здесь символом M_f мы обозначаем оператор умножения на функцию f .)

Легко убедиться, что пространство Харди H^2 обладает свойством (K) .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{H}(Q)$ – функциональное гильбертово пространство, обладающее свойством (K) относительно ортонормированного базиса $\{e_n(z)\}_{n \geq 1}$ и точки $\lambda \in Q$. Пусть A – компактный оператор в $\mathcal{H}(Q)$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) $A \in \mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_{e_n/\hat{k}_\lambda}^* A^* A M_{e_n/\hat{k}_\lambda})\tilde{(\lambda)}$$

сходится;

- 2) $A \in \mathfrak{S}_1$ тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_{e_n/\hat{k}_\lambda}^* (U^{-1}AU) M_{e_n/\hat{k}_\lambda})\tilde{(\lambda)}$$

сходится для любого унитарного оператора $U \in B(\mathcal{H}(Q))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы ортонормированный базис $\{e_n(z)\}_{n \geq 0}$ пространства $\mathcal{H}(Q)$ и точка $\lambda \in Q$ таковы, что операторы $M_{e_n/\hat{k}_\lambda}$, $n \geq 1$, плотно определены на $\mathcal{H}(Q)$. Поэтому существуют сопряженные операторы M_{e_n/k_λ}^* , $n \geq 1$. Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned} \|Ae_n\|^2 &= \left\langle A^* A \frac{e_n}{\hat{k}_\lambda} \hat{k}_\lambda, \frac{e_n}{\hat{k}_\lambda} \hat{k}_\lambda \right\rangle = \langle A^* A M_{e_n/\hat{k}_\lambda} \hat{k}_\lambda, M_{e_n/\hat{k}_\lambda} \hat{k}_\lambda \rangle \\ &= \langle M_{e_n/\hat{k}_\lambda}^* A^* A M_{e_n/\hat{k}_\lambda} \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = (M_{e_n/\hat{k}_\lambda}^* A^* A M_{e_n/\hat{k}_\lambda})\tilde{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить первое утверждение теоремы.

Теперь, как в предыдущей теореме, для любого унитарного оператора $U \in B(\mathcal{H}(Q))$ легко показать, что

$$\langle AUe_n, Ue_n \rangle = (M_{e_n/\hat{k}_\lambda}^* (U^{-1}AU) M_{e_n/\hat{k}_\lambda}) \tilde{\varphi}(\lambda).$$

Так как U – произвольный унитарный оператор, то второе утверждение непосредственно вытекает из последнего равенства. Доказательство закончено.

Пусть $\varphi \in L^\infty(T)$ и θ – внутренняя функция. Рассмотрим проекцию оператора Теплица T_φ на подпространство K_θ :

$$\Gamma_{\varphi, \theta} \stackrel{\text{def}}{=} P_\theta T_\varphi | K_\theta.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\varphi \in L^\infty(T)$ и $\theta = B_{\{\lambda_k\}}$ – произведение Бляшке с нулями $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$. Если $\Gamma_{\varphi, B}$ – ядерный оператор (т.е. $\Gamma_{\varphi, \theta} \in \mathfrak{S}_1(K_B)$), то для его следа верна формула

$$\text{trace}(\Gamma_{\varphi, B}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\Gamma_{\varphi, B}}(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda_n), \quad (5)$$

где $\tilde{\varphi}$ – гармоническое продолжение функции φ в круг D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $B_n(z)$ произведение Бляшке с нулями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. Как уже отмечено, функции

$$e_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{1 - |\lambda_n|^2}}{1 - \overline{\lambda_n}z} B_n(z), \quad n \geq 1,$$

образуют ортонормированный базис в $K_B = H^2 \ominus BH^2$. Используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Gamma_{\varphi, B} e_n(z), e_n(z) \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle P_B T_\varphi B_n(z) \frac{\sqrt{1 - |\lambda_n|^2}}{1 - \overline{\lambda_n}z}, B_n(z) \frac{\sqrt{1 - |\lambda_n|^2}}{1 - \overline{\lambda_n}z} \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_{\overline{B_n}} T_\varphi T_{B_n} \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_{\overline{B_n} \varphi B_n} \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_\varphi \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_\varphi(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda_n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{trace}(\Gamma_{\varphi, B}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda_n). \quad (6)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma_{\varphi, B}}(\lambda_n) &= \langle P_B T_\varphi \hat{k}_{B, \lambda_n}, \hat{k}_{B, \lambda_n} \rangle = \langle T_\varphi \hat{k}_{B, \lambda_n}, \hat{k}_{B, \lambda_n} \rangle \\ &= \frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - |\overline{B(\lambda_n)}|^2} \left\langle T_\varphi \frac{1 - \overline{B(\lambda_n)} B(z)}{1 - \overline{\lambda_n}z}, \frac{1 - \overline{B(\lambda_n)} B(z)}{1 - \overline{\lambda_n}z} \right\rangle \\ &= (1 - |\lambda_n|^2) \left\langle T_\varphi \frac{1}{1 - \overline{\lambda_n}z}, \frac{1}{1 - \overline{\lambda_n}z} \right\rangle = \langle T_\varphi \hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\lambda_n} \rangle = \tilde{T}_\varphi(\lambda_n) = \tilde{\varphi}(\lambda_n). \end{aligned}$$

Итак,

$$\widetilde{\Gamma_{\varphi, B}}(\lambda_n) = \widetilde{\varphi}(\lambda_n), \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) получаем требуемое равенство (5). Доказательство закончено.

Следующая теорема характеризует операторы из класса Шаттена–Неймана $\mathfrak{S}(p)$ в терминах символов Березина взвешенных сдвигов, определяемых s -числами рассматриваемых операторов.

ТЕОРЕМА 6. Пусть H – гильбертово пространство, A – компактный оператор в H и $\{s_n(A)\}_{n \geq 1}$ – невозрастающая последовательность его s -чисел. Тогда оператор $A \in \mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$, в том и только том случае, если

$$1) s_n(A) = O(n^{-1/p}) \text{ при } n \rightarrow +\infty;$$

$$2) \widetilde{W}_{\Lambda_p}(\sqrt{t}) = O(1-t) \text{ при } t \rightarrow 1^-,$$

где W_{Λ_p} , $\Lambda_p \stackrel{\text{def}}{=} \{s_n(A)^p\}_{n \geq 0}$, – оператор одностороннего взвешенного сдвига, действующий в пространстве Харди H^2 по формуле $W_{\Lambda_p} z^n = s_n(A)^p z^{n+1}$, $n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем лемму, которая, кажется, представляет и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 7. Пусть $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ – произвольная ограниченная последовательность комплексных чисел и W_α , $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, – соответствующий ей взвешенный сдвиг в пространстве Харди H^2 . Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ суммируется методом Абеля в том и только том случае, если

$$W_\alpha(\sqrt{t}) = O(1-t) \quad \text{при } t \rightarrow 1^-. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Действительно, легко вычислить символ Березина оператора W_α в пространстве H^2 :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\alpha(\lambda) &= \langle W_\alpha \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = (1 - |\lambda|^2) \left\langle W_\alpha \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2) \left\langle W_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n z^n, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle = (1 - |\lambda|^2) \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n \alpha_n z^{n+1}, \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\ &= (1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \bar{\lambda}^n \lambda^{n+1} = \lambda(1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |\lambda|^{2n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widetilde{W}_\alpha(\lambda) = \lambda(1 - |\lambda|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |\lambda|^{2n}, \quad \lambda \in D.$$

В частности,

$$\widetilde{W}_\alpha(\sqrt{t}) = \sqrt{t}(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$$

для всех t , $0 < t < 1$. Отсюда вытекает требуемое утверждение (8). Лемма доказана.

Теперь пусть $A \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$. Хорошо известно, что $s_n(A) = O(n^{-1/p})$ и что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^p$ сходится по методу Абеля. Последнее условие в силу леммы 7 равносильно условию 2) теоремы.

Наоборот, если выполняются условия 1), 2) теоремы, то с применением леммы 7 и теоремы Литтлвуда (см. [16, с. 137]) доказывается, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^p$ сходится, т.е. $A \in \mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$. Теорема доказана.

Автор благодарит Ю. В. Туровского за многочисленные полезные обсуждения материала настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aronzajn N. Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 68. P. 337–404.
- [2] Halmos P. R. A Hilbert Space Problem Book. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [3] Березин Ф. А. Ковариантные и контравариантные символы операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 5. С. 1134–1167.
- [4] Березин Ф. А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 5. С. 1116–1175.
- [5] Korenblum B., Zhu K. An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators // J. Operator Theory. 1995. V. 33. P. 353–361.
- [6] Stroethoff K. Compact Hankel operators on the Bergman spaces on the unit ball and polydisk in $\mathbb{C}^n$ // J. Operator Theory. 1990. V. 32. № 1. P. 153–170.
- [7] Stroethoff K. Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1998. V. 64. P. 136–148.
- [8] Nordgren E., Rosenthal P. Boundary values of Berezin symbols // Operator Theory Advances Appl. 1994. V. 73. P. 362–368.
- [9] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [10] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [11] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
- [12] Engliš M. Toeplitz operators and the Berezin transform on H^2 // Linear Algebra Appl. 1995. V. 223/224. P. 171–204.
- [13] Пеллер В. В. Гладкие операторы Ганкеля и их приложения (идеалы $\mathfrak{S}_p$, классы Бесова, случайные процессы) // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 1. С. 43–48.
- [14] Пеллер В. В. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 4. С. 538–581.
- [15] Пеллер В. В., Хрущев С. В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // УМН. 1982. Т. 37. № 1. С. 53–124.
- [16] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.