Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Пушкин, О поведении спектра предельных частот цифр при возмущениях вещественного числа, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 884–891

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:25:58

О поведении спектра предельных частот цифр при возмущениях вещественного числа

Л. Н. Пушкин

Показано, что записанное в r -ичной системе счисления произвольное вещественное число под действием случайных поцифровых затухающих возмущений, еще не меняющих спектра предельных частот r -ичных цифр, становится почти наверное нормальным по всем мультипликативно независимым с r основаниям.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Поскольку сегодня ничего не известно об асимптотическом поведении частот цифр иррациональных чисел π , e , $\sqrt{2}$, $\ln 2$ и т.п., представляют интерес метрические результаты о нормальных числах, см., например, [1]–[8]. В заметке предлагается обобщение результата Колбрука и Кемпермана [4], уточняющего, в свою очередь, теорему Касселса–Шмидта [2], [3].

Пусть $T = [0; 1)$ – единичный полуинтервал. Для $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ обозначим через I_r множество вероятностных мер на борелевских подмножествах T , инвариантных относительно r -адического преобразования $T \rightarrow T$, определяемого формулой $t \rightarrow rt \pmod{1}$. Отметим, что мера Лебега на T , обозначим ее λ , принадлежит I_r при любом $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Для $t \in T$ и $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ обозначим через $\Lambda_r(t)$ множество всех предельных точек (в топологии слабой сходимости) последовательности эмпирических мер

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(tr^k \pmod{1}), \quad N \in \mathbb{N},$$

на T , где $\delta(x)$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке x . Число $t \in T$ называется *нормальным по основанию* $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, если $\Lambda_r(t) = \{\lambda\}$. Эквивалентное определение в терминах частот r -ичных цифр числа t см. в [8]. Известно (классический результат Бореля [1]), что λ -почти все $t \in T$ нормальны по всем основаниям $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. С другой стороны, для любой меры $\mu \in I_r$ найдется $t \in T$ такое, что $\Lambda_r(t) = \{\mu\}$, см. [9].

Целые $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ называются *мультипликативно зависимыми*, если уравнение

$$k_1 \ln g_1 + \dots + k_m \ln g_m = 0$$

имеет нетривиальное целочисленное решение; в противном случае $g_1, \dots, g_m$ *мультипликативно независимы*. Для мультипликативно зависимых $r, g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ будем

использовать обозначение $g \sim r$; в противном случае $g \not\sim r$. Основопологающей в рассматриваемом круге вопросов является

ТЕОРЕМА (Касселс–Шмидт [2], [3]). Пусть $r, g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда

- (А) если $g \sim r$, то любое $t \in T$, нормальное по основанию r , нормально и по основанию g ;
- (В) если $g \not\sim r$, то множество чисел, нормальных по основанию g , не являющихся в то же время нормальными по основанию r , имеет мощность континуума.

Важную дополнительную информацию о нормальности числа по различным основаниям предоставляет

ТЕОРЕМА (Колбрук–Кемперман [4]). Для любой пары $t \in T$ и $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ найдется $x \in T$ такое, что

- (а) $\Lambda_g(x) = \Lambda_g(t)$ для всех $g \sim r$;
- (б) $\Lambda_g(x) = \{\lambda\}$ для всех $g \not\sim r$.

Этот результат доказан в [4] как метрический по отношению к специальной мере на T , выбор которой был обусловлен применением метода Шмидта [3]. Предложенный в [6] метод, основанный на оценке меры трансцендентности отношения логарифмов натуральных чисел, принадлежащей А. О. Гельфонду, позволит нам доказать здесь, что если x получено в результате воздействия на число t , записанное в r -ичной системе счисления, затухающих (не слишком быстро, см. (1) ниже) случайных статистически независимых поцифровых возмущений, то почти наверное справедливы соотношения (а) и (б).

2. Результаты. Прежде всего отметим, что множество $\Lambda_r(t)$ инвариантно относительно случайных затухающих поцифровых r -ичных возмущений числа t .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t = 0, t_1, t_2, \dots$ – r -ичная запись $t \in T$. Пусть также $\tau = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$, где $\tau_k, k \in \mathbb{N}$, – статистически независимые случайные r -ичные цифры. Обозначим $d_j = P(\tau_j \neq t_j)$. Если $d_j \rightarrow j$ при $j \rightarrow \infty$, то $\Lambda_g(\tau) = \Lambda_g(t)$ для всех $g \sim r$ почти наверное.

Доказательство теоремы 1 получается модификацией доказательства леммы 2.1 из [4] и здесь не приводится.

ТЕОРЕМА 2. Пусть распределение r -ичных цифр случайного числа τ , введенного в теореме 1, таково, что

$$0 < d_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\ln j}{\ln \ln j} d_j \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Пусть $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ мультипликативно независимы, $r \not\sim g_1$. Тогда почти наверное последовательность эмпирических мер

$$\frac{1}{N^m} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} \delta(\tau g_1^{k_1} \dots g_m^{k_m} \bmod 1), \quad N \in \mathbb{N},$$

слабо сходится к мере Лебега λ на T при $N \rightarrow \infty$.

Доказательству теоремы 2 посвящен следующий пункт статьи.

Частный случай этого утверждения при $m = 1$ можно сформулировать так.

ТЕОРЕМА 3. Если распределение r -ичных цифр случайного числа τ , введенного в теореме 1, удовлетворяет условию (1), то τ нормально по всем основаниям $g \not\sim r$ почти наверное.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\lim d_j = 0$, а ряд $\sum d_j$ расходится, то распределение числа τ непрерывно и сингулярно относительно λ . (Если ряд $\sum d_j$ сходится, то по лемме Бореля–Кантелли $\tau_j = t_j$ почти наверное при всех достаточно больших j и распределение τ дискретно с конечным числом атомов.)

Действительно, по теореме 3.7.7 [10] распределение τ либо чисто дискретно, либо чисто сингулярно, либо чисто абсолютно непрерывно. Из теоремы 3.7.6 [10] и расходимости ряда $\sum d_j$ следует, что распределение τ непрерывно. Так как при некотором $t' \in T$ число $t \oplus t'$ (поразрядное сложение mod r) не является нормальным, то предположение об абсолютной непрерывности распределения τ , и, тем самым, распределения $\tau \oplus t'$, приводит ввиду теоремы 1 к противоречию с результатом Бореля.

Из теоремы 3 и замечания 1 получаем следующее уточнение теоремы Касселса–Шмидта.

ТЕОРЕМА 4. Для любых $t \in T$ и $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ множество $x \in T$ таких, что $\Lambda_g(x) = \Lambda_g(t)$ для $g \sim r$, в то время как $\Lambda_g(x) = \{\lambda\}$ для $g \not\sim r$, имеет мощность континуума.

Отметим, что из теоремы 4 следует результат Фолкмана [5] о континуальности множества нормальных по основаниям $g \not\sim r$ чисел с предписанными частотами r -ичных цифр, так что мы имеем структурно простое доказательство результата [5].

3. Доказательство теоремы 2. Согласно критерию Вейля (см. [8]) достаточно убедиться в том, что сумма

$$S_N = \frac{1}{N^m} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} \exp(2\pi i L g_1^{k_1} \cdots g_m^{k_m} \tau), \quad N \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

почти наверное стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $L \in \mathbb{N}$. Для этого используем следующий вариант теоремы Давенпорта–Эрдёша–Левека (см. [11]).

ЛЕММА 1. Пусть ξ_k , $k \in \mathbb{N}$, – последовательность комплексных случайных величин, $|\xi_k| \leq 1$. Пусть M_N , $N \in \mathbb{N}$, – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\frac{M_{N+1}}{M_N} = 1 + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Положим

$$S_N = \frac{1}{M_N} \sum_{k=1}^{M_N} \xi_k.$$

Если ряд $\sum N^{-1} \mathbb{E}|S_N|^2$ сходится, то $\lim S_N = 0$ почти наверное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству [11] (см. также [8; § 4 гл. 1]), имеем возрастающую последовательность натуральных чисел $N_1 < N_2 < \dots$ такую, что $N_{r+1}/N_r \rightarrow 1$ и $S_{N_r} \rightarrow 0$ почти наверное при $r \rightarrow \infty$. При $N \in [N_r; N_{r+1})$

$$|S_N| = \left| \frac{M_{N_r}}{M_N} \frac{1}{M_{N_r}} \sum_{k=1}^{M_{N_r}} \xi_k + \frac{1}{M_N} \sum_{k=M_{N_r}+1}^{M_N} \xi_k \right| \leq |S_{N_r}| + \frac{M_{N_{r+1}} - M_{N_r}}{M_{N_r}}.$$

Поэтому для окончания доказательства леммы достаточно убедиться в том, что $\Delta_r := M_{N_{r+1}}/M_{N_r} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Но

$$0 < \Delta_r - 1 = \frac{M_{N_{r+1}} - M_{N_r}}{M_{N_r}} \leq \frac{N_{r+1} - N_r}{M_{N_r}} \max_{j \in [N_r; N_{r+1})} (M_{j+1} - M_j),$$

и по условию леммы найдется постоянная $C > 0$, не зависящая от j , такая, что $M_{j+1} - M_j \leq CM_j/j$. Поэтому

$$\max_{j \in [N_r; N_{r+1})} (M_{j+1} - M_j) \leq C \frac{M_{N_{r+1}}}{N_r}$$

и, следовательно,

$$0 < \Delta_r - 1 \leq C \Delta_r \left(\frac{N_{r+1}}{N_r} - 1 \right), \quad \text{или} \quad 1 - C \left(\frac{N_{r+1}}{N_r} - 1 \right) \leq \frac{1}{\Delta_r} < 1,$$

и, поскольку $N_{r+1}/N_r \rightarrow 1$, то $\Delta_r \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Возвращаясь к (2), полагая $M_N = N^m$ в лемме 1, видим, что для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в том, что для любого $L \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S_N|^2 &= \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k'_1, \dots, k'_m=0}^{N-1} \sum_{k''_1, \dots, k''_m=0}^{N-1} \Phi^{(\tau)} \left(2\pi L \left(\prod_{j=1}^m g_j^{k'_j} - \prod_{j=1}^m g_j^{k''_j} \right) \right) \\ &= O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi^{(\tau)}(x) = \mathbb{E} \exp(i\tau x)$, $x \in \mathbb{R}$, — характеристическая функция случайной величины τ . Из мультипликативной независимости $g_1, \dots, g_m$ следует, что аргумент функции $\Phi^{(\tau)}$ в (3) равен нулю тогда и только тогда, когда $k'_j = k''_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\mathbb{E}|S_N|^2 = \frac{1}{N^m} + \frac{1}{N^{2m}} \sum_h \sum_{k_1, \dots, k_m} \Phi^{(\tau)}(2\pi h g_1^{k_1} \cdots g_m^{k_m}), \quad (4)$$

где сумма берется по h вида

$$\begin{aligned} h &= L(g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} - g_1^{j_1} \cdots g_m^{j_m}) \neq 0, \\ 0 &\leq i_k, j_k \leq N-1, \quad i_k j_k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad \sum_k (i_k + j_k) > 0, \end{aligned}$$

в частности, $|h| \in H := \{1, 2, \dots, Lg_1^N \cdots g_m^N\}$ и количество слагаемых суммы по h в (4) не превосходит величины $(2N)^m$ (для каждого из g_k либо $i_k = 0$, $j_k \in \{0, 1, \dots,$

$N-1\}$, либо $j_k = 0, i_k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Переходя в правой части (4) к абсолютным величинам и добавляя неотрицательные слагаемые в сумму по $k_1, \dots, k_m$, получаем

$$\mathbb{E}|S_N|^2 = \frac{1}{N^m} + \left(\frac{2}{N}\right)^m \max_{h \in H} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} |\Phi^{(\tau)}(2\pi h g_1^{k_1} \dots g_m^{k_m})|. \quad (5)$$

По определению τ имеем

$$\Phi^{(\tau)}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j\left(\frac{x}{r^j}\right), \quad (6)$$

где $\varphi_j(x)$ – характеристическая функция решетчатой случайной величины τ_j :

$$\varphi_j(2\pi x) = (1 - d_j)e^{2\pi i t_j x} + \sum_{k=0}^{r-1} {}^*d_{kj}e^{2\pi i kx}, \quad \text{где } d_{kj} \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{r-1} {}^*d_{kj} = d_j,$$

звездочка означает пропуск слагаемого, соответствующего $k = t_j$. При этом

$$\begin{aligned} |\varphi_j(2\pi x)|^2 &= \left| \sum_k {}^*d_{kj}e^{2\pi i kx} \right|^2 + 2(1 - d_j) \operatorname{Re} \sum_k {}^*d_{kj}e^{2\pi i(k-t_j)x} + (1 - d_j)^2 \\ &\leq d_j^2 + 2(1 - d_j) \sum_k {}^*d_{kj} \cos 2\pi(k - t_j)x + (1 - d_j)^2 \\ &= 1 - 4(1 - d_j) \sum_k {}^*d_{kj} \sin^2 \pi(k - t_j)x \leq 1 - 2 \sum_k {}^*d_{kj} \sin^2 \pi(k - t_j)x \end{aligned}$$

(последнее неравенство следует из условия $d_j \leq 1/2$ в (1)) и, поскольку при $k = 1, \dots, r-1$ и $x \bmod 1 \in [r^{-2}, r^{-1})$ справедливо неравенство $\sin^2(\pi kx) \geq \sin^2(\pi/r^2)$, а $(1 - \theta)^{1/2} \leq 1 - \theta/2$ при $\theta \in [0, 1]$, то

$$|\varphi_j(2\pi x)| \leq 1 - d_j \sin^2\left(\frac{\pi}{r^2}\right) \quad \text{при } x \bmod 1 \in \left[\frac{1}{r^2}; \frac{1}{r}\right).$$

Применяя элементарное неравенство $2r^{-2} \leq \sin(\pi r^{-2})$, $r = 2, 3, \dots$, получаем

$$|\varphi_j(2\pi x)| \leq 1 - \frac{4d_j}{r^4} \quad \text{при } x \bmod 1 \in \left[\frac{1}{r^2}; \frac{1}{r}\right). \quad (7)$$

Рассмотрим r -ичное разложение

$$hg_1^{k_1} \dots g_m^{k_m} = \varepsilon_1 r^{q-1} + \dots + \varepsilon_q, \quad \varepsilon_j \in \{0, \dots, r-1\}, \quad \varepsilon_1 \neq 0. \quad (8)$$

Пусть $K \in \mathbb{N}$, $M = 2K + 1$. (Выбор K в зависимости от N сделаем позже.) Обозначим через $\mu^{(h)}(k_1, \dots, k_m)$ количество пар вида $\varepsilon_{2j}\varepsilon_{2j+1}$ с $\varepsilon_{2j} = 0$ и $\varepsilon_{2j+1} \neq 0$ среди M старших цифр $\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_M$ разложения (8); в случае $M > q = \lfloor \log_r(hg_1^{k_1} \dots g_m^{k_m}) \rfloor$ полагаем $\varepsilon_{q+1} = \dots = \varepsilon_M = 0$. Из (6) и (7) следует, что при $h \in H$

$$\sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} |\Phi^{(\tau)}(2\pi h g_1^{k_1} \dots g_m^{k_m})| \leq \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} (1 - \theta_N)^{\mu^{(h)}(k_1, \dots, k_m)}, \quad (9)$$

где

$$\theta_N = \frac{4}{r^4} \min_{j \leq J_N} d_j, \quad J_N = 2N \log_r(g_1 \cdots g_m) + \log_r L. \quad (10)$$

Пусть $(\delta_1, \dots, \delta_M)$ – блок r -ичных цифр с $\delta_1 \neq 0$. Положим

$$\nu^{(h)}(\delta, N) = \text{card}\{(k_1, \dots, k_m) \in \{0, \dots, N-1\}^m \mid \varepsilon_1 = \delta_1, \dots, \varepsilon_M = \delta_M\},$$

где вектор $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M)$ определяется по $(k_1, \dots, k_m)$ соотношением (8) с условием, что $\varepsilon_{q+1} = \dots = \varepsilon_M = 0$ в случае $M > q$. Поскольку $\varepsilon_1 = \delta_1, \dots, \varepsilon_M = \delta_M$ тогда и только тогда, когда дробная доля числа $\log_r(hg_1^{k_1} \dots g_m^{k_m})$ попадает в промежуток

$$\Pi_\Delta = \left[\log_r \sum_{k=1}^M \frac{\delta_k}{r^{k-1}}; \log_r \left(\frac{1}{r^{M-1}} + \sum_{k=1}^M \frac{\delta_k}{r^{k-1}} \right) \right),$$

теория равномерного mod 1 распределения последовательностей позволяет аппроксимировать величину $N^{-m} \nu^{(h)}(\delta, N)$ длиной промежутка Π_Δ .

ЛЕММА 2. *Найдутся постоянные $D > 0$ и $\varepsilon > 0$, зависящие только от r и g_1 , такие, что*

$$\nu^{(h)}(\delta, N) \leq DN^{m-\varepsilon} + \frac{N^m}{r^{M-1} \ln r}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В § 2 гл. 2 [8] при доказательстве теоремы Эрдёша–Турана получена оценка (2.40) отклонения, взятого по всем полуоткрытым промежуткам mod 1, из которой следует, что найдется абсолютная постоянная C , такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_N := \left| N^{-m} \nu^{(h)}(\delta, N) - \log_r \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^M \delta_k r^{M-k}} \right) \right| \leq C \left(\frac{1}{n} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} |E_j(N)| \right),$$

где

$$\begin{aligned} E_j(N) &= \frac{1}{N^m} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} \exp(2\pi i j (k_1 \log_r g_1 + \dots + k_m \log_r g_m)) \\ &= \frac{1}{N^m} \prod_{l=1}^m \sum_{k_l=0}^{N-1} \exp(2\pi i j k_l \log_r g_l), \end{aligned}$$

и поскольку

$$|E_j(N)| \leq \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi i j k \log_r g_1) \right|,$$

то (см. доказательство леммы 3.2 п. 3 гл. 2 [8])

$$\Gamma_N \leq C \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j \|j \log_r g_1\|} \right), \quad (12)$$

где $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого. По теореме Фельдмана [12; теорема 3.1] из $g_1 \not\sim r$ следует, что $\|j \log_r g_1\| \geq d/j^\omega$ с положительными постоянными d

и ω . Выбирая в (12) $n = [N^{1/(1+\omega)}]$, получаем $\Gamma_N \leq D/N^\varepsilon$, где постоянные $D > 0$, $\varepsilon > 0$ зависят только от g_1 и r . Тривиальная оценка длины $|\Pi_\Delta|$ промежутка Π_Δ ,

$$|\Pi_\Delta| = \log_r \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^M \delta_k r^{M-k}} \right) \leq \left(1 + \frac{1}{r^{M-1}} \right) \leq \frac{1}{r^{M-1} \ln r},$$

завершает доказательство леммы 2.

Полагая

$$K = \left\lceil \frac{\varepsilon}{4} \log_r N \right\rceil, \quad (13)$$

получаем из (11):

$$\nu^{(h)}(\delta, N) \leq \frac{2N^m}{r^{2K}} \quad \text{при } N \geq n_0, \quad (14)$$

где постоянная n_0 зависит только от r и g_1 . Проведем суммирование в правой части (9) по всем возможным значениям $0, 1, \dots, K$ величины $\mu^{(h)}(k_1, \dots, k_m)$. Так как существует в точности

$$\binom{K}{j} (r-1)^{j+1} (r^2 - r + 1)^{K-j}$$

различных наборов r -ичных цифр $(\delta_1, \dots, \delta_M)$, $\delta_1 \neq 0$, в которых количество пар вида $\delta_{2n} \delta_{2n+1}$ с $\delta_{2n} = 0$, $\delta_{2n+1} \neq 0$ равно j , то из (9) и (14) получаем

$$\begin{aligned} & N^{-m} \max_{h \in H} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{N-1} |\Phi^{(\tau)}(2\pi h g_1^{k_1} \dots g_m^{k_m})| \\ & \leq \frac{2(r-1)}{r^{2K}} \sum_{j=0}^K \binom{K}{j} (r-1)^j (r^2 - r + 1)^{K-j} (1 - \theta_N)^j \\ & = 2(r-1) \left(1 - \frac{r-1}{r^2} \theta_N \right)^K \quad \text{при } N \geq n_0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5), учитывая соотношение (13), получаем

$$\mathbb{E}|S_N|^2 \leq \frac{1}{N^m} + \frac{2^{m+1}(r-1)}{N^{\gamma\theta_N}}, \quad (15)$$

где

$$\gamma = \gamma(r, g_1) = \frac{\varepsilon}{4} \frac{r-1}{r^2} \frac{1}{\ln r} > 0.$$

Легко видеть, что (1) эквивалентно

$$0 < d_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\ln k}{\ln \ln k} \min_{j \leq k} d_j \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Из (16) и (10) следует, что для сколь угодно большого $\Omega > 0$

$$\theta_N \geq \Omega \frac{\ln \ln N}{\ln N} \quad \text{при } N \geq N_0(\Omega, L, r, g_1, \dots, g_m).$$

Отсюда и из (15) получаем (3). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. E. Borel, “Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **27**:1 (1909), 247–271.
- [2] J. W. S. Cassels, “On a problem of Steinhaus about normal numbers”, *Colloq. Math.*, **7** (1959), 95–101.
- [3] W. M. Schmidt, “On normal numbers”, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 661–672.
- [4] C. M. Colebrook, J. H. B. Kemperman, “On non-normal numbers”, *Indag. Math.*, **30** (1968), 1–11.
- [5] B. Volkmann, “On the Cassels–Schmidt theorem. I”, *Bull. Sci. Math. (2)*, **108**:3 (1984), 321–336.
- [6] Л. Н. Пушкин, “Метрический вариант теоремы Касселса–Шмидта”, *Матем. заметки*, **46**:1 (1989), 60–66.
- [7] J. Feldman, M. Smorodinsky, “Normal numbers from independent processes”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**:4 (1992), 707–712.
- [8] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985.
- [9] И. И. Шапиро-Пятецкий, “О законах распределения дробных долей показательной функции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:1 (1951), 47–52.
- [10] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979.
- [11] H. Davenport, P. Erdős, W. J. LeVeque, “On Weyl’s criterion for uniform distribution”, *Michigan Math. J.*, **10**:3 (1963), 311–314.
- [12] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, London, 1975.

Л. Н. Пушкин

Казанский государственный университет

E-mail: lpushkin@ksu.ru

Поступило

09.03.2005