Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, О существовании эквивалентной супер-мартингальной плотности для разветвленно-выпуклого семейства случайных процессов, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 594–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:58:34

О существовании эквивалентной супермартингальной плотности для разветвленно-выпуклого семейства случайных процессов

Д. Б. Рохлин

Доказано, что разветвленно-выпуклое семейство $\mathbb{W}$ неотрицательных случайных процессов обладает эквивалентной супермартингальной плотностью, если и только если множество H неотрицательных случайных величин, мажорируемых значениями элементов $\mathbb{W}$ в фиксированные моменты времени, ограничено по вероятности. Условием данной теоремы удовлетворяет модель рынка ценных бумаг с произвольным числом основных рисков активов, представляющая собой множество $\mathbb{W}(S)$ неотрицательных стохастических интегралов по конечным наборам семимартингалов из произвольного индексированного семейства S .

Библиография: 18 названий.

1. Основные результаты. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, наделенное фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (т.е. неубывающим семейством σ -алгебр $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$), удовлетворяющей обычным условиям непрерывности справа и полноты [1]. Предполагается, что $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ и σ -алгебра $\mathcal{F}_0$ тривиальна с точностью до P -нулевых множеств. Все рассматриваемые далее случайные процессы считаются согласованными с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Пусть $\mathbb{D}$ – множество случайных процессов, траектории которых непрерывны справа и имеют конечные пределы слева P -п.н.

Обозначим через $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ пространство классов эквивалентности $\mathcal{F}$ -измеримых случайных величин. Наделим L^0 топологией, порожденной метрикой

$$\rho(f, g) = E \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}.$$

Сходимость в такой топологии совпадает со сходимостью по вероятности, а ограниченность – с ограниченностью по вероятности. Напомним, что множество $F \in L^0$ называется *ограниченным по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $M > 0$ такое, что $P(|f| \geq M) < \varepsilon$, $f \in F$. Через L_+^0 обозначим конус неотрицательных элементов L^0 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00520).

Следуя [2], назовем семейство $\mathbb{W} \subset \mathbb{D}$ неотрицательных случайных процессов *разветвленно-выпуклым* (*fork-convex*), если для любых элементов $X^i \in \mathbb{W}$, $i = 1, 2, 3$, где $X^2 > 0$, $X^3 > 0$, любого $s \in \mathbb{R}_+$ и любого $h_s \in L_+^0(\mathcal{F}_s)$, $h_s \leq 1$, процесс

$$X_t = X_t^1 I_{[0,s)}(t) + X_s^1 \left(h_s \frac{X_t^2}{X_s^2} + (1 - h_s) \frac{X_t^3}{X_s^3} \right) I_{[s,\infty)}(t) \quad (1.1)$$

принадлежит $\mathbb{W}$. Легко видеть, что если $X_0 = 1$ для всех $X \in \mathbb{W}$, то разветвленно-выпуклое множество $\mathbb{W}$ является выпуклым. Если же $1 \in \mathbb{W}$, то $\mathbb{W}$ инвариантно относительно остановки в фиксированные моменты времени, т.е. процесс $X_t^T = X_{T \wedge t}$ принадлежит $\mathbb{W}$ вместе с X . Здесь $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Напомним, что случайный процесс Y называется *супермартингалом* (относительно меры P), если случайные величины Y_t являются P -интегрируемыми и условное математическое ожидание $E(Y_t | \mathcal{F}_s)$ не превосходит Y_s п.н. при $s < t$. Случайный процесс $Z \in \mathbb{D}$, удовлетворяющий условиям $Z_0 = 1$, $Z_t > 0$, $t > 0$, и

$$Z_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Z_t > 0 \text{ п.н.},$$

назовем *эквивалентной супермартингальной плотностью* для $\mathbb{W}$, если процесс XZ является P -супермартингалом для любого $X \in \mathbb{W}$. Аналогичные объекты вводились, например, в работах [3]–[5]. Называя “эквивалентными” плотности с условием $Z_\infty > 0$, мы следуем терминологии [6].

Введем множество H неотрицательных случайных величин, мажорируемых значениями элементов $\mathbb{W}$ в фиксированные моменты времени:

$$H = \{y \in L_+^0 : y \leq X_T \text{ для некоторых } X \in \mathbb{W}, T \geq 0\}. \quad (1.2)$$

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{W}$ – разветвленно-выпуклое семейство случайных процессов, содержащее 1, и пусть $X_0 = 1$ для всех $X \in \mathbb{W}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) множество (1.2) ограничено по вероятности;
- (ii) существует эквивалентная супермартингальная плотность для $\mathbb{W}$.

Данный результат имеет ясную интерпретацию в рамках математической теории арбитража [7]. Именно, пусть имеется произвольное индексированное семейство $\mathbb{S} = (S^i)_{i \in J}$ семимартингалов $S^i \in \mathbb{D}$ (определения семимартингала и векторного стохастического интеграла см. в [1]). Через $L(\mathbb{S})$ обозначим множество, элементами которого являются семейства $\Gamma = (\gamma^i)_{i \in J}$ предсказуемых случайных процессов, удовлетворяющих следующим условиям:

- (а) $\gamma_i = 0$ для $i \in J \setminus I$, где I – некоторое конечное множество (зависящее от Γ);
- (б) определен векторный стохастический интеграл $(\gamma^i)_{i \in I}$ по $(S^i)_{i \in I}$.

Указанный интеграл обозначим через $\Gamma \circ \mathbb{S}$. Введем множество

$$\mathbb{W}(\mathbb{S}) = \{X \in \mathbb{D} : X = 1 + \Gamma \circ \mathbb{S} \geq 0, \Gamma \in L(\mathbb{S})\}. \quad (1.3)$$

Данную конструкцию можно рассматривать как модель рынка с произвольным числом основных рисков активов. Процесс S^i описывает цену i -го рискового актива, γ^i – количество указанного актива в портфеле инвестора, X – капитал допустимой инвестиционной стратегии. Следуя [6], будем говорить, что в рассматриваемой

модели рынка выполнено условие *отсутствия неограниченной прибыли с ограниченным риском* (NUPBR: *No Unbounded Profit with Bounded Risk*), если множество

$$\{y \in L_+^0 : y \leq X_T \text{ для некоторых } X \in \mathbb{W}(\mathbb{S}), T \geq 0\}$$

ограничено по вероятности.

ТЕОРЕМА 2. *Для выполнения условия NUPBR необходимо и достаточно существования эквивалентной супермартингальной плотности для $\mathbb{W}(\mathbb{S})$.*

В случае конечного числа активов (т.е. конечного множества J) данный результат содержится в работе [6], где используется тонкая техника стохастического исчисления. Методы настоящей работы позволяют дать неожиданно короткое доказательство теоремы 2 (для произвольного J), основанное лишь на стандартных теоремах функционального анализа и теории мартингалов. Данный результат можно рассматривать так же, как критерий *отсутствия асимптотического арбитража первого рода* на большом финансовом рынке [8], [9], заданном на фиксированном вероятностном пространстве (как в работе [10]).

Полезно сопоставить теорему 2 с более известной формой первой фундаментальной теоремы финансовой математики [11], [12]. Рассмотрим рынок с конечным числом активов (J конечно). Будем говорить, что выполнено условие *отсутствия арбитража* (NA: *No Arbitrage*), если из условий $X \in \mathbb{W}(\mathbb{S})$, $X_\infty \geq 1$ п.н. (при условии, что данный предел существует) вытекает, что $X_\infty = 1$ п.н. Вероятностная мера $\mathbb{Q}$ называется *эквивалентной супермартингальной мерой* для $\mathbb{W}(\mathbb{S})$, если $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$ обладают одинаковым запасом нулевых множеств и все процессы $X \in \mathbb{W}(\mathbb{S})$ являются супермартингалами относительно $\mathbb{Q}$.

Следующий результат [6], представляет собой удобную переформулировку первой фундаментальной теоремы [11], [12].

ТЕОРЕМА 3. *В модели рынка с конечным числом активов для выполнения условий NA и NUPBR необходимо и достаточно существования эквивалентной супермартингальной меры для $\mathbb{W}(\mathbb{S})$.*

Подчеркнем, что предлагаемый подход не приводит к столь же короткому доказательству теоремы 3. Кроме того, данная теорема не допускает непосредственного обобщения на модели с бесконечным числом активов.

Таким образом, отказ от условия NA приводит к более простым и общим результатам. Следует отметить, что допустимость и даже желательность такого подхода пропагандируется в работах [5], [6], [13] и обусловлена следующими причинами (здесь имеется ввиду, что множество J конечно). Во-первых, условие NUPBR (в отличие от NA) инвариантно относительно замены дисконтирующего актива (выбора единицы измерения). Во-вторых, именно условие NUPBR допускает “конструктивное” описание в терминах триплета предсказуемых характеристик семимартингала S . В третьих, данное условие эквивалентно условию существования эталонного портфеля (*numéraire portfolio*), т.е. такого положительного процесса $V \in \mathbb{W}(\mathbb{S})$, что X/V является $\mathbb{P}$ -супермартингалом для любого $X \in \mathbb{W}(\mathbb{S})$. В четвертых, только условие NUPBR существенно при рассмотрении задач оптимального инвестирования и т.п.

2. Доказательства. Прежде всего напомним два известных результата: принцип компактности в L_+^0 [11; лемма A1.1] и теорему о седловой точке (см., например, [14; теорема 2.10.2]).

ЛЕММА 1. Пусть $f_n \in L_+^0$, $n \geq 1$, и множество $\text{conv}(f_n; n \geq 1)$ ограничено по вероятности. Тогда существует последовательность $g_n \in \text{conv}(f_m; m \geq n)$, сходящаяся п.н. к функции $g < \infty$.

ЛЕММА 2. Пусть A, B – выпуклые компактные подмножества локально выпуклых векторных пространств X, Y соответственно, и пусть отображение $\Phi: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- (i) при каждом $b \in B$ функция $a \mapsto \Phi(a, b)$ вогнута и полунепрерывна сверху;
- (ii) при каждом $a \in A$ функция $b \mapsto \Phi(a, b)$ выпукла и полунепрерывна снизу.

Тогда Φ обладает седловой точкой, т.е. существует пара $(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times B$ такая, что

$$\Phi(a, \bar{b}) \leq \Phi(\bar{a}, \bar{b}) \leq \Phi(\bar{a}, b), \quad (a, b) \in A \times B.$$

Идея следующей леммы заимствована из работы [5]. Рассуждения [5], следуя которым можно провести ее доказательство, опираются на результаты [3]. Ниже дается другое, более непосредственное доказательство, основанное на леммах 1 и 2. Напомним, что множество $F \subset L_+^0$ называется телесным, если из условий $f \in F$, $0 \leq g \leq f$ вытекает, что $g \in F$.

ЛЕММА 3. Пусть множество $F \subset L_+^0$ содержит 1 и является выпуклым, телесным, ограниченным и замкнутым в L^0 . Тогда существует единственный элемент $v \in F$, $v > 0$, такой, что

$$\mathbb{E}\left(\frac{u}{v}\right) \leq 1, \quad u \in F. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $F_N = \{x \wedge N : x \in F\}$. В силу телесности F имеем $F_N \subset F$. Из вогнутости функции $a \mapsto a \wedge N$, а также выпуклости и телесности F очевидным образом вытекает, что F_N выпукло.

Покажем, что F_N замкнуто в L^0 . Пусть последовательность $y_n \in F_N$ сходится к y по вероятности. Переходя при необходимости к подпоследовательности, без ограничения общности можно считать, что $y_n = x_n \wedge N \rightarrow y$ п.н., где $x_n \in F$. По лемме 1 при каждом n существует последовательность неотрицательных чисел $(\lambda_j^n)_{j=n}^\infty$, лишь конечное число элементов которой отличны от нуля, такая, что

$$\tilde{x}_n = \sum_{j=n}^\infty \lambda_j^n x_j \rightarrow x \text{ п.н.}, \quad \sum_{j=n}^\infty \lambda_j^n = 1.$$

При этом $x < \infty$, так как F ограничено в L^0 , и $x \in F$ в силу замкнутости F в L^0 . Ясно, что последовательность $\tilde{y}_n = \sum_{j=n}^\infty \lambda_j^n y_j$ сходится к y п.н. Но

$$\tilde{y}_n = \sum_{j=n}^\infty \lambda_j^n (x_j \wedge N) \leq \left(\sum_{j=n}^\infty \lambda_j^n x_j \right) \wedge N.$$

Следовательно, $y \leq x \wedge N$ и $y \in F$.

Пусть $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – пространства интегрируемых и существенно ограниченных функций соответственно. Множество F_N является компактным в $*$ -слабой топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$ пространства L^∞ . Для обоснования данного утверждения достаточно установить, что F_N замкнуто в топологии Макки $\tau(L^\infty, L^1)$, и воспользоваться теоремами Макки–Аренса и Банаха–Алаоглу. Заметим, что топология нормы на пространстве L^1 является топологией равномерной сходимости на шаре

$$\{x \in L^\infty : \|x\|_\infty = \text{ess sup } |x| \leq 1\},$$

который как подмножество L^1 является $\sigma(L^1, L^\infty)$ -компактным. Поэтому сужение топологии нормы L^1 на L^∞ слабее топологии Макки $\tau(L^\infty, L^1)$. Выше установлено, что множество $F_N \subset \{x \in L^\infty : \|x\|_\infty \leq N\}$ замкнуто в L^0 . Следовательно, оно замкнуто в L^1 , а значит, и в топологии $\tau(L^\infty, L^1)$.

Рассмотрим функцию $\Phi_N : F_N \times F_N \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\Phi_N(x, y) = E(x\psi_N(y)), \quad \psi_N(a) = \frac{1}{a} I_{[1/N, \infty)}(a) + \left(N + N^2 \left(\frac{1}{N} - a\right)\right) I_{[0, 1/N)}(a).$$

Легко видеть, что функция $\psi_N : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ является ограниченной, невозрастающей, выпуклой и непрерывно дифференцируемой. Кроме того, функция $N \mapsto \psi_N(a)$ при каждом a является неубывающей на $(0, \infty)$ и $\psi_N(a) = 1/a$ при $N \geq 1/a$.

Очевидно, что функция $\Phi_N(\cdot, y)$ линейна и $\sigma(L^\infty, L^1)$ -непрерывна на F_N при всех $y \in F_N$, а функция $\Phi_N(x, \cdot)$ выпукла при всех $x \in F_N$. Покажем, что $\Phi_N(x, \cdot)$ полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$, т.е. что множество

$$A_N = \{y \in F_N : E(x\psi_N(y)) \leq c\}$$

замкнуто в $\sigma(L^\infty, L^1)$ при всех $c \in \mathbb{R}$.

Пусть y принадлежит $\sigma(L^\infty, L^1)$ -замыканию A_N . Поскольку топология $\sigma(L^\infty, L^1)$ сильнее топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$ на L^∞ , то y принадлежит $\sigma(L^1, L^\infty)$ -замыканию A_N . Но топология нормы на L^1 согласована с двойственностью $\langle L^1, L^\infty \rangle$, и замыкание выпуклого множества A_N в указанной топологии совпадает с его $\sigma(L^1, L^\infty)$ -замыканием. Пусть $y_n \in F_N$ – последовательность, сходящаяся к y в топологии нормы L^1 (а значит, и по вероятности). Тогда

$$E(x\psi_N(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(x\psi_N(y_n)) \leq c$$

по теореме о мажорируемой сходимости. Следовательно, $y \in A_N$.

По лемме 2 функция Φ_N обладает седловой точкой (x_N, y_N) на $F_N \times F_N$:

$$\Phi_N(x, y_N) \leq \Phi_N(x_N, y_N) \leq \Phi_N(x_N, y), \quad (x, y) \in F_N \times F_N.$$

Поскольку $\psi_N(a) \leq 1/a$, $N > 0$, то, полагая $y = x_N$, получаем неравенство

$$\Phi_N(x, y_N) \leq E(x_N \psi_N(x_N)) \leq 1, \quad x \in F_N.$$

По лемме 1 существует последовательность

$$v_N = \sum_{j \geq N} \lambda_j^N y_j \rightarrow v, \quad N \rightarrow \infty.$$

Здесь $\lambda_j^N \geq 0$ и лишь конечное число элементов последовательности $(\lambda_j^N)_{j=N}^\infty$ отличны от нуля. Из выпуклости, ограниченности и замкнутости F в L^0 вытекает, что $v < \infty$, $v \in F$. Покажем, что $v > 0$ п.н.

В силу выпуклости функции $a \mapsto \psi_N(a)$ и монотонности функции $N \mapsto \psi_N(a)$ имеем

$$\Phi_N(x, v_N) \leq \sum_{j \geq N} \lambda_j^N \mathbb{E}(x \psi_N(y_j)) \leq \sum_{j \geq N} \lambda_j^N \mathbb{E}(x \psi_j(y_j)) \leq 1,$$

где $x \in F_N$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $N \geq 1/\alpha$. Тогда

$$1 \geq \Phi_N(1, v_N) \geq \mathbb{E}(\psi_N(v_N) I_{\{v_N \leq \alpha\}}) \geq \psi_N(\alpha) \mathbb{P}(v_N \leq \alpha) = \frac{\mathbb{P}(v_N \leq \alpha)}{\alpha}.$$

Далее, используя неравенство

$$I_{\{v=0\}} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{m \geq N} I_{\{v_m \leq \alpha\}}$$

и лемму Фату, находим

$$\mathbb{P}(v = 0) \leq \mathbb{E}\left(\liminf_{N \rightarrow \infty} I_{\{v_N \leq \alpha\}}\right) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(v_N \leq \alpha) \leq \alpha.$$

В силу произвольности $\alpha \in (0, 1)$ это означает, что $\mathbb{P}(v = 0) = 0$.

Таким образом, $\mathbb{E}(x \psi_N(v_N)) \leq 1$, $x \in F_N$ и $v_N \rightarrow v$, $0 < v < \infty$ п.н. Учитывая, что $\psi_N(v_N) \rightarrow 1/v$ п.н., по лемме Фату заключаем, что $\mathbb{E}(x/v) \leq 1$, $x \in F_M$, для любого $M > 0$. Для произвольного $u \in F$ имеем $u \wedge M \in F_M$, и неравенство (2.1) вытекает из теоремы о монотонной сходимости при $M \uparrow \infty$.

Установим единственность v . Если $w \in F$ — положительный элемент, удовлетворяющий условию $\mathbb{E}(u/w) \leq 1$, $u \in F$, и $\mathbb{P}(v \neq w) > 0$, то, применяя неравенство Йенсена в строгой форме, получаем противоречие:

$$1 \geq \mathbb{E} \frac{w}{v} > \frac{1}{\mathbb{E}(v/w)}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что теорема о минимаксе для функций, заданных на подмножествах L_+^0 , получена в работе [15]. Однако лемма 3 не является прямым следствием результатов [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (i) $\Rightarrow$ (ii). При любом $t \geq 0$ множество

$$H_t = \{y \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) : y \leq X_t \text{ для некоторого } X \in \mathbb{W}\} \subset H$$

выпукло, телесно, ограничено по вероятности и содержит 1. Ясно, что замыкание $\text{cl}_0(H_t)$ множества H_t в L^0 удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно, существует согласованный с фильтрацией случайный процесс V , $0 < V_t \in \text{cl}_0(H_t)$, такой, что

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_t}{V_t}\right) \leq 1, \quad X \in \mathbb{W}. \quad (2.2)$$

Пусть последовательность $y^k \in H_u$ сходится к V_u в L^0 . Не ограничивая общности, можно считать, что имеет место и сходимость с вероятностью 1. Рассмотрим

последовательность $X^k \in \mathbb{W}$: $y^k \leq X_u^k$. Применив дважды лемму 1, построим последовательность $Y^k \in \mathbb{W}$, $Y^k \in \text{conv}(X^m; m \geq k)$, такую, что $Y_t^k \rightarrow W_t$ п.н., $k \rightarrow \infty$, при $t \in \{s, u\}$, $0 \leq s < u$. Покажем, что $W_t = V_t$, при $t \in \{s, u\}$. Подчеркнем, что здесь не утверждается существование предельного процесса W при $t \notin \{s, u\}$.

Ясно, что

$$W_u \geq \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = V_u.$$

Из неравенства (2.2) и леммы Фату следует, что $W_u = V_u$ п.н.

Далее, построим последовательность

$$\hat{Y}^k \in \mathbb{W}, \quad \hat{Y}_s^k \rightarrow V_s \text{ п.н., } k \rightarrow \infty,$$

и последовательность $V^k \in \mathbb{W}$ вида

$$V_t^k = \hat{Y}_t^k I_{[0,s)}(t) + \frac{\alpha^k Y_t^k + 1 - \alpha^k}{\alpha^k Y_s^k + 1 - \alpha^k} \hat{Y}_s^k I_{[s,\infty)}(t),$$

где $\alpha^k \in (0, 1)$. При $\alpha^k \rightarrow 1$ имеем

$$\frac{V_u^k}{V_u} = \frac{\alpha^k Y_u^k + 1 - \alpha^k}{V_u} \frac{\hat{Y}_s^k}{\alpha^k Y_s^k + 1 - \alpha^k} \rightarrow \frac{V_s}{W_s} \text{ п.н.}$$

Согласно лемме Фату и неравенству (2.2)

$$\mathbb{E} \frac{V_s}{W_s} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{V_u^k}{V_u} \right) \leq 1.$$

С другой стороны, по тем же соображениям

$$\mathbb{E} \frac{W_s}{V_s} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{Y_s^k}{V_s} \leq 1.$$

Отсюда следует, что $V_s/W_s = 1$ п.н. Действительно, если случайная величина V_s/W_s не равна константе п.н., то, воспользовавшись неравенством Йенсена в строгой форме, получаем противоречие:

$$\mathbb{E} \frac{V_s}{W_s} > \left(\mathbb{E} \frac{W_s}{V_s} \right)^{-1} \geq 1.$$

Итак,

$$Y_t^k \rightarrow V_t \text{ п.н., } k \rightarrow \infty, \quad \text{при } t \in \{s, u\}.$$

Покажем, что для любого $X \in \mathbb{W}$ процесс X/V является супермартингалом (идея следующего рассуждения заимствована из работы [16]). Пусть это неверно. Тогда существует $X \in \mathbb{W}$ и неотрицательные числа $s < u$ такие, что вероятность события

$$A = \left\{ \omega : \mathbb{E} \left(\frac{X_u}{V_u} \middle| \mathcal{F}_s \right) > \frac{X_s}{V_s} \right\} \in \mathcal{F}_s$$

положительна.

Не ограничивая общности, можно считать, что $X_s > 0$ на A . Действительно, пусть $X_s = 0$ на множестве $B \in \mathcal{F}_s$. Положим

$$\hat{X}_t^k = I_{[0,s)}(t) + \left(I_B \frac{1 - \alpha^k + \alpha^k X_t}{1 - \alpha^k + \alpha^k X_s} + I_{B^c} \right) I_{[s,\infty)}(t),$$

где $\alpha^k \in (0, 1)$, $\alpha^k \rightarrow 1$. Поскольку $\hat{X}^k \in \mathbb{W}$, то множество H содержит последовательность

$$\hat{X}_u^k = I_B \frac{1 - \alpha^k + \alpha^k X_u}{1 - \alpha^k} + I_{B^c}.$$

Из ограниченности H в L^0 вытекает, что $X_u = 0$ п.н. на B .

Введем последовательность процессов $U^k \in \mathbb{W}$ по формуле

$$U_t^k = Y_t^k I_{[0,s)}(t) + Y_s^k \left(I_A \frac{\alpha^k X_t + 1 - \alpha^k}{\alpha^k X_s + 1 - \alpha^k} + I_{A^c} \frac{\alpha^k Y_t^k + 1 - \alpha^k}{\alpha^k Y_s^k + 1 - \alpha^k} \right) I_{[s,\infty)}(t),$$

где $\alpha^k \in (0, 1)$. Полагая $t = u$ и переходя к пределу при $\alpha^k \rightarrow 1$, находим

$$U_u = \lim_{k \rightarrow \infty} U_u^k = I_A X_u \frac{V_s}{X_s} + V_u I_{A^c} \text{ п.н.}$$

Наконец, используя неравенство (2.2), получаем противоречие:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{U_u^k}{V_u} \geq \mathbb{E} \left(I_A \frac{X_u}{V_u} \frac{V_s}{X_s} + I_{A^c} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(I_A \frac{V_s}{X_s} \mathbb{E} \left(\frac{X_u}{V_u} \middle| \mathcal{F}_s \right) \right) + \mathbb{P}(A^c) > \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1. \end{aligned}$$

Супермартингал $1/V$ может не быть элементом $\mathbb{D}$. Поэтому рассмотрим его регуляризацию:

$$Z_t = \liminf_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} \frac{1}{V_s},$$

где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Теорема Дуба о регуляризации [17; теорема 6.27] показывает, что

$$Z_t = \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} \frac{1}{V_s} \text{ п.н.,}$$

Z принадлежит $\mathbb{D}$ и является супермартингалом (точнее, траектории Z совпадают с траекториями такого процесса с вероятностью 1).

Процесс Z является супермартингальной плотностью для $\mathbb{W}$. Действительно, пусть $u < v$ и $u_n \downarrow u$, $v_n \downarrow v$, $u_n, v_n \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_v Z_v | \mathcal{F}_s) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{X_{v_n}}{V_{v_n}} \middle| \mathcal{F}_s \right) \leq \frac{X_s}{V_s}, \quad s < v, \\ \mathbb{E}(X_v Z_v | \mathcal{F}_u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_v Z_v | \mathcal{F}_{u_n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{u_n}}{V_{u_n}} = X_u Z_u. \end{aligned}$$

Остается проверить, что $Z_\infty > 0$ п.н. Согласно предложению 2.3 (а) работы [18] равенство $Z_t = 1/V_t$ п.н. имеет место при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus K$, где K – некоторое счетное множество. Множество

$$\left\{ \frac{1}{Z_t} : t \in \mathbb{R}_+ \setminus K \right\} \subset \{V_t : t \geq 0\} \subset \bigcup_{t \geq 0} \text{cl}_0(H_t) \subset \text{cl}_0(H)$$

ограничено в L^0 . Отсюда следует, что $Z_\infty > 0$ п.н.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть Z – эквивалентная супермартингальная плотность для $\mathbb{W}$. Пусть $y \in H$ и $X_T = X_\infty^T \geq y$, $X \in \mathbb{W}$. Тогда

$$P(yZ_\infty \geq A) \leq P(X_\infty^T Z_\infty \geq A) \leq \frac{E(X_\infty^T Z_\infty)}{A} \leq \frac{1}{A}.$$

Следовательно, множество $Z_\infty H$ ограничено в L^0 . Но оператор умножения на Z_∞^{-1} непрерывен в L^0 . Поэтому H также ограничено в L^0 . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно проверить, что множество (1.3) удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что $\mathbb{W}(\mathbb{S})$ является разветвленно-выпуклым (ясно, что остальные условия теоремы 1 выполнены). Пусть

$$X^i \in \mathbb{W}(\mathbb{S}), \quad i = 1, 2, 3, \quad X^2 > 0, \quad X^3 > 0$$

и $h_s \in L_+^0(\mathcal{F}_s)$, $h_s \leq 1$. Из определения множества $\mathbb{W}(\mathbb{S})$ следует, что процессы X^i допускают представление $X^i = 1 + \theta^i \circ S$, $i = 1, 2, 3$, где $\theta^i \circ S$ – стохастические интегралы по фиксированному семимартингалу S с конечным числом компонент. Покажем, что аналогичное представление имеет место и для процесса вида (1.1). Положим

$$\theta_t = \theta_t^1 I_{[0,s]}(t) + \left(\theta_t^2 \frac{X_s^1}{X_s^2} h_s + \theta_t^3 \frac{X_s^1}{X_s^3} (1 - h_s) \right) I_{(s,\infty)}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + (\theta \circ S)_t = 1 + (\theta^1 \circ S)_{t \wedge s} + \frac{X_s^1}{X_s^2} h_s ((\theta^2 \circ S)_t - (\theta^2 \circ S)_{t \wedge s}) \\ &\quad + \frac{X_s^1}{X_s^3} (1 - h_s) ((\theta^3 \circ S)_t - (\theta^3 \circ S)_{t \wedge s}) \\ &= X_{t \wedge s}^1 + \frac{X_s^1}{X_s^2} h_s (X_t^2 - X_{t \wedge s}^2) + \frac{X_s^1}{X_s^3} (1 - h_s) (X_t^3 - X_{t \wedge s}^3) \\ &= X_t^1 I_{[0,s]}(t) + \left(h_s \frac{X_s^1}{X_s^2} X_t^2 + (1 - h_s) \frac{X_s^1}{X_s^3} X_t^3 \right) I_{(s,\infty)}(t). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Jacod, A.N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Grundlehren Math. Wiss., **288**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [2] G. Žitković, “A filtered version of the bipolar theorem of Brannath and Schachermayer”, *J. Theoret. Probab.*, **15**:1, (2002), 41–61.
- [3] D. Kramkov, W. Schachermayer, “The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets”, *Ann. Appl. Probab.*, **9**:3, (1999), 904–950.
- [4] Yu. Kabanov, C. Stricker, “Remarks on the true no-arbitrage property”, *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, Lecture Notes in Math., **1857**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 186–194.
- [5] M.M. Christensen, K. Larsen, “No arbitrage and the growth optimal portfolio”, *Stoch. Anal. Appl.*, **25**:1, (2007), 255–280.
- [6] I. Karatzas, C. Kardaras, “The numéraire portfolio in semimartingale financial models”, *Finance Stoch.*, **11**:4, (2007), 447–493.

- [7] F. Delbaen, W. Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [8] Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков, “Большие финансовые рынки: асимптотический арбитраж и континуальность”, *ТВИ*, **39**:1, (1994), 222–229.
- [9] Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov, “Asymptotic arbitrage in large financial markets”, *Finance Stoch.*, **2**:2, (1998), 143–172.
- [10] M. De Donno, P. Guasoni, M. Pratelli, “Super-replication and utility maximization in large financial markets”, *Stochastic Process. Appl.*, **115**:12, (2005), 2006–2022.
- [11] F. Delbaen, W. Schachermayer, “A general version of the fundamental theorem of asset pricing”, *Math. Ann.*, **300**:3, (1994), 463–520.
- [12] F. Delbaen, W. Schachermayer, “The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes”, *Math. Ann.*, **312**:2, (1998), 215–250.
- [13] E. Platen, D. Heath, *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [14] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Sci. Publ., Singapore, 2002.
- [15] M. Pratelli, “A minimax theorem without compactness hypothesis”, *Mediterr. J. Math.*, **2**:1, (2005), 103–112.
- [16] D. Becherer, “The numéraire portfolio for unbounded semimartingales”, *Finance Stoch.*, **5**:3, (2001), 327–341.
- [17] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, NY, 1997.
- [18] I. Karatzas, G. Žitković, “Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets”, *Ann. Probab.*, **31**:4, (2003), 1821–1858.

Д. Б. Рохлин

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

E-mail: rokhlin@math.rsu.ru

Поступило

04.06.2007

Исправленный вариант

15.08.2009