Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Романюк, Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 147–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:13:06

Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$

В. С. Романюк

В работе решается задача о нахождении слабой асимптотики одного типа нелинейных поперечников классов функций $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$, определенных на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, – евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| := (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2} = 1\},$$

$L_p = L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство функций, определенных на $\mathbb{S}^{d-1}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\mathbf{x})|^p d\sigma(\mathbf{x}) \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $d\sigma$ – поверхностная мера Лебега, Ω – площадь поверхности сферы $\mathbb{S}^{d-1}$; L_∞ отождествляется с пространством непрерывных на $\mathbb{S}^{d-1}$ функций с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} |f(\mathbf{x})|.$$

Пусть $\mathcal{P}_k$ обозначает пространство алгебраических полиномов степени, не превышающей k , от d переменных; H_k^d – пространство однородных гармонических полиномов степени k от d переменных. Сужение элементов пространства H_k^d на сферу $\mathbb{S}^{d-1}$ (сферические гармоники) образуют пространство, которое обозначается через $\mathcal{H}_k^d$ [1]. Каждое подпространство $\mathcal{H}_k^d$, $k = 0, 1, \dots$, является подпространством собственных функций оператора Δ_0 Лапласа–Бельтрами на сфере (см., например, [2; с. 240]), т.е. для $Y \in \mathcal{H}_k^d$ $\Delta_0 Y(\mathbf{x}) = -k(k + d - 2)Y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$, и

$$n_k := \dim \mathcal{H}_k^d = (2k + d - 2) \frac{(k + d - 3)!}{k!(d - 2)!}, \quad k \geq 1, \quad n_0 := \dim \mathcal{H}_0^d = 1.$$

Далее $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \bigoplus \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^d$, т.е. произвольная функция $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ однозначно представляется в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ в виде ряда по сферическим гармоникам

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f; \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k} a_{k,l} Y_k^l(\mathbf{x}),$$

где $\{Y_k^l\}_{l=1}^{n_k}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k^d$, $a_{k,l}$ – коэффициенты Фурье–Лапласа функции f . Полагаем далее $\mathcal{H}(N) = \bigoplus \sum_{k=0}^N \mathcal{H}_k^d$.

На $\mathbb{S}^{d-1}$ можно определить операцию свертки [3]

$$[f * g](\mathbf{x}) := \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{y}) g(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) d\sigma(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ – скалярное произведение $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, посредством которого представляется результат $Y_k(f; \mathbf{x})$ действия оператора ортогонального проектирования $Y_k: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow \mathcal{H}_k^d$:

$$Y_k(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{k + \lambda}{\lambda} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{y}) P_k^\lambda(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) d\sigma(\mathbf{y}).$$

Исходя из этого, определяются основные объекты, изучаемые в настоящей заметке: для $1 \leq p \leq \infty$ и $r > 0$ положим

$$W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) := \{f : f(\mathbf{x}) = [\varphi * g_r](\mathbf{x}), \|\varphi\|_p \leq 1, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}\},$$

где для $r > 0$

$$g_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^{-r/2} \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^\lambda(t), \quad \lambda = \frac{d-2}{2},$$

а $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, – многочлены Гегенбауэра степени k и индекса λ (см., например, [4]) или ультрасферические многочлены, образующие, как известно, полную ортогональную систему в пространстве $L_2([-1, 1], w_\lambda)$ – квадратично-суммируемых с весом $w_\lambda(t) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}$ на $[-1, 1]$ функций. В дальнейшем вместо $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ будем писать W_p^r .

Нелинейным n -поперечником множества F в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, определенным в [5], называется величина

$$\bar{d}_n(F; \mathcal{X}) = \inf_{a, \mathcal{M}_n} \sup_{f \in F} \|f - M_n(a(f))\|_{\mathcal{X}},$$

где $a: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное непрерывное отображение из F в $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{M}_n$ – совокупность всех непрерывных отображений $M_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}$.

Для поперечника $\bar{d}_n(F; \mathcal{X})$ известны следующие базовые соотношения с другими поперечниками:

$$\bar{d}_{2n+1}(F; \mathcal{X}) \leq a_n(F; \mathcal{X}) \leq \bar{d}_n(F; \mathcal{X}), \quad (1)$$

$$\bar{d}_n(F; \mathcal{X}) \geq b_n(F; \mathcal{X}). \quad (2)$$

Здесь $a_n(F; \mathcal{X})$ и $b_n(F; \mathcal{X})$ соответственно n -поперечники по Александрову и по Берштейну. Их определения и свойства можно найти, например, в книге [6]. Отметим, что неравенства (1) доказаны в [7], а неравенство (2) в [5].

Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $r > 0$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ или $r > (d-1)^2 + (d-1)(1/p - 1/q)$, $1 \leq p < q \leq \infty$. Тогда

$$\bar{d}_n(W_p^r; L_q) \asymp n^{-r/(d-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху. Рассмотрим случай $1 \leq p < q \leq \infty$. Пусть η – функция бесконечно-дифференцируемая на $(0, \infty)$ и такая, что $\text{supp } \eta \subset [0, 2]$, $\eta(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$, и $\eta(x) = 0$ при $x \geq 2$. Зададим последовательность операторов $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на множестве $L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ и действующих согласно формуле

$$[V_n(f)](\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(\frac{k}{n}\right) Y_k(f; \mathbf{x}).$$

В качестве операторов V_n можно рассматривать конкретные линейные средние рядов Фурье–Лапласа функции f (см. [8]).

Положим

$$\Phi_0(f) = V_1(f), \quad \Phi_k(f) = V_{2^k}(f) - V_{2^{k-1}}(f), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда в силу свойств операторов V_n любая функция $f \in L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \leq q \leq \infty$, представима в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(f)$ (ряд сходится по норме $\|\cdot\|_q$), причем для $f \in L_q(\mathbb{S}^{d-1})$

$$\Phi_k(f) \in \mathcal{P}_{2^{k+1}-1}^q := \mathcal{P}_{2^{k+1}-1} \cap L_q(\mathbb{S}^{d-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

¹Для положительных последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ запись $a_n \ll b_n$ означает, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $a_n \leq cb_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Запись $a_n \asymp b_n$ равносильна тому, что $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll a_n$.

К тому же, если $f \in W_p^r$, $r > (d-1)(1/p-1/q)$, то согласно оценке величины наилучшего приближения класса W_p^r в пространстве $L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, установленной в [9], в сочетании со свойствами операторов V_n [10] (эти операторы реализуют такую оценку)

$$\|\Phi_k(f)\|_q \ll (2^k)^{-r+(d-1)(1/p-1/q)_+}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Отправным при установлении оценки сверху величин $\bar{d}_n(W_p^r; L_q)$ с учетом (1) является соотношение

$$a_n(W_p^r; L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} a_{n_j}(\Phi_j(W_p^r); \mathcal{P}_{2^{j+1}-1}^q) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(\Phi_j(W_p^r); \mathcal{P}_{2^{j+1}-1}^q), \quad (4)$$

справедливое для любых n , $j_0 = 0, 1, \dots$ и $\{n_j\}_{j=0}^{j_0}$ таких, что $\sum_{j=0}^{j_0} n_j \leq n$. Здесь $d^n(F; \mathcal{X})$ (при $n = 0$) обозначает поперечник по Гельфанду множества F в пространстве $\mathcal{X}$ [6]. Неравенство (4) следует из утверждения (доказанного в [11]) о промежуточной оценке копоперечников по Александрову $a^n(K; \mathcal{X})$ компактного множества K в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (определение см. в [6]) и из неравенства

$$\frac{1}{4} a_n(K; \mathcal{X}) \leq a^n(K; \mathcal{X}) \leq 2a_n(K; \mathcal{X})$$

(см. [6]).

Для продолжения оценки правой части (4) далее будем использовать весовой аналог теоремы Марцинкевича–Зигмунда (в частичной формулировке).

ТЕОРЕМА А [12]. *Существуют $m_N = (4N+1)(2N)^{d-2}$ точек $\xi_{N,1}, \xi_{N,2}, \dots, \xi_{N,m_N}$ на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ таких, что для любого $f \in \mathcal{P}_N$ и $1 \leq p \leq \infty$*

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\mathbf{x})|^p d\sigma(\mathbf{x}) \right)^{1/p} \asymp \left(\frac{1}{m_N} \sum_{k=1}^{m_N} w_{N,k} |f(\xi_{N,k})|^p \right)^{1/p}, \quad (5)$$

где веса $w(N) = \{w_{N,k}\}_{k=1}^{m_N}$ удовлетворяют условиям $0 < w_{N,k} \leq 1$, $w_{N,k}^{-1} \leq C(d)N^{(d-2)^2}$.

Исходя непосредственно из определения набора $\{w_{N,k}\}_{k=1}^{m_N}$ несложно показать (см. доказательство теоремы А в [12], а также замечания 5 и 6 в этой работе), что набор весов $w(N)$ обладает следующими свойствами, помимо приведенных в теореме А.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы утверждения:*

- (1) *если $L \in \mathbb{N}$ – произвольное фиксированное, $M_L^{(j)} := m_{L,2^j}$, $j = 1, 2, \dots$, $\widetilde{M}_L^{(j)} \asymp M_L^{(j)} \cdot 2^{-j(d-1)}$, то для любого набора $\tilde{\Lambda} = \{k_1, \dots, k_{\widetilde{M}_L^{(j)}}\}$ существует постоянная $C(d) > 0$ такая, что*

$$\sum_{k \in \tilde{\Lambda}} w_{L,2^j,k} \leq C(d)L^{d-1} \cdot 2^{-j(d-2)^2};$$

- (2) *если $\Lambda = \{k_1, \dots, k_{\widetilde{M}_N}\}$ и $\widetilde{M}_N \asymp m_N$, то*

$$\sum_{k \in \Lambda} w_{N,k} \asymp N^{d-1}.$$

Продолжим преобразование правой части соотношения (4). Для $j = 1, 2, \dots$ определим оператор $A_j: \mathcal{P}_{N_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_{N_j}}$ по формуле

$$A_j f = (f(\xi_{N_j,1}), \dots, f(\xi_{N_j,m_{N_j}})), \quad N_j = 2^{j+1} - 1, \quad j = 0, 1, \dots,$$

а $\{\xi_{N_j, k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ – последовательность точек из теоремы А. Из теоремы А следует, что при $1 \leq q \leq \infty$ и $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}_j}$

$$\|f\|_q \asymp m_{N_j}^{-1/q} \|A_j f\|_{l_{q, w(N_j)}^{m_{N_j}}},$$

что вместе с неравенством (3) позволяет записать

$$a_{n_j}(\Phi_j(W_p^r); \mathcal{P}_{2^{j+1}-1}^q) \ll N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} a_{n_j}(b_{p, w(N_j)}^{m_{N_j}}; l_{q, w(N_j)}^{m_{N_j}}), \quad j = 0, 1, \dots, j_0.$$

Здесь для системы весов $w = \{w_i\}_{i=1}^m$ через $l_{p, w}^m$ обозначено пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_{p, w} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p w_i \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty, w} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| w_i, \quad p = \infty,$$

$b_{p, w}^m := \{\mathbf{x} \in l_{p, w}^m : \|\mathbf{x}\|_{p, w} \leq 1\}$. В случае $w_i = 1$, $i = 1, \dots, m$, обозначение $l_{p, w}^m$ заменяем на l_p^m .

Далее, исходя из неравенства (4), на основании общих свойств поперечников a_n и d^n (см. например, [6; с. 217–218]) и соотношения (5), приходим к неравенству

$$a_n(W_p^r; L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} a_{n_j}(b_{p, w(N_j)}^{m_{N_j}}; l_{q, w(N_j)}^{m_{N_j}}) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} \quad (6)$$

(при переходе от неравенства (4) к (6) мы заранее полагаем n_0 равным $m_{N_0} = 5 \cdot 2^{d-2}$, а в этом случае при $j = 0$ имеем $a_{n_j}(\Phi_j(W_p^r); \mathcal{P}_{2^{j+1}-1}^q) = 0$).

Но непосредственно из определения поперечников a_k можно записать

$$a_{n_j}(b_{p, w(N_j)}^{m_{N_j}}; l_{q, w(N_j)}^{m_{N_j}}) = a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}), \quad (7)$$

где для заданного $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$,

$$B_p^m(\alpha) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_i}{\alpha_i} \right|^p \leq 1 \right\}$$

– p -эллипсоид в l_p^m , и при каждом $j = 0, 1, \dots$ наборы $w(N_j) = \{w_{N_j, k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ и $\alpha(N_j) := \{\alpha_{N_j, k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ связаны соотношением

$$w_{N_j, k} = \alpha_{N_j, k}^{pq/(p-q)} \quad \text{или} \quad \alpha_{N_j, k} = w_{N_j, k}^{1/q-1/p}, \quad k = 1, 2, \dots, m_{N_j}.$$

Таким образом, следствием соотношения (6) с учетом (7) является неравенство

$$a_n(W_p^r; L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q}. \quad (8)$$

Теперь по заданному (достаточно большому) $n \in \mathbb{N}$ найдем $s \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{j=0}^s m_{N_j} < n \leq \sum_{j=0}^{s+1} m_{N_j}$$

(напомним, что $N_j = 2^{j+1} - 1$ и $m_{N_j} = (4N_j + 1)(2N_j)^{d-2} \asymp 2^{j(d-1)}$) и положим в соотношении (8) $j_0 = 2s$, а также $n_j = m_{N_j}$ при $0 \leq j \leq s$, и $n_j = N_s^{d-1} \cdot 2^{(s-j)(d-1)}$ при $s < j \leq 2s$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{j_0} n_j \ll \sum_{j=0}^s 2^{j(d-1)} + \sum_{j=s+1}^{2s} 2^{(2s-j)(d-1)} \asymp 2^{s(d-1)} \asymp n.$$

Далее понятно, что при $0 \leq j \leq s$ выполнено $a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}) = 0$, а при $s < j \leq 2s$ следствием точных значений поперечников $a_k(B_p^m(\alpha); l_q^m)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ [6; с. 232], с учетом предложения 1, является оценка

$$a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}) \ll [N_s^{d-1} \cdot 2^{(s-j)(d-1)^2}]^{1/q-1/p}.$$

Заметив, также, что

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} \ll 2^{-sr} \asymp n^{-r/(d-1)}$$

при $r > (d-1)(1/p - 1/q)$, из (8) после несложных вычислений окончательно получаем, что если $1 \leq p < q \leq \infty$ и $r > (d-1)^2 + (d-1)(1/p - 1/q)$, то $a_n(W_p^r; L_q) \ll n^{-r/(d-1)}$.

В случае $1 \leq p = q \leq \infty$, $r > 0$ последняя оценка является следствием соотношения [9] $E_n(W_p^r)_q \asymp n^{-r+(d-1)(1/p-1/q)+}$ и цепочки неравенств

$$a_n(W_p^r; L_q) \leq d_n(W_p^r; L_q) \ll E_k(W_p^r)_q,$$

в которой $n = \dim \mathcal{H}(k) \asymp k^{d-1}$, т.е. $k \asymp n^{1/(d-1)}$.

Неравенство $a_n(W_p^r; L_q) \ll n^{-r/(d-1)}$ сохраняется и в случае $1 \leq q < p \leq \infty$ вследствие вложения $L_p \subset L_q$, поскольку тогда $a_n(W_p^r; L_q) \leq a_n(W_p^r; L_p)$.

Наконец, приведенные выше оценки сверху для поперечника $a_n(W_p^r; L_q)$ остаются справедливыми в силу соотношения (1) и для поперечника $\bar{d}_n$.

Оценка снизу. Пусть вначале $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Рассмотрим оператор $\mathcal{D}^r$, $r > 0$, “обобщенного” дифференцирования на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, определив его как мультипликаторный оператор, действующий по формуле

$$Y_k(\mathcal{D}^r f; \mathbf{x}) = [k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(f; \mathbf{x}), \quad f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда для полинома $F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^N Y_k(\mathbf{x})$, $Y_k \in \mathcal{H}_k^d$, справедливо равенство

$$\mathcal{D}^r F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N [k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

В [13] доказано, что для производных $\mathcal{D}^r F$ полиномов по сферическим гармоникам степени, не превышающей N , имеет место неравенство Бернштейна $\|\mathcal{D}^r F\|_p \ll N^r \|F\|_q$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Согласно этому неравенству $b_n(W_p^r; L_q) \gg n^{-r/(d-1)}$, и вследствие (2) $\bar{d}_n(W_p^r; L_q) \gg n^{-r/(d-1)}$.

Установим оценки снизу в случае $1 \leq q < p \leq \infty$. Пусть задано $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ определено условием

$$\dim \mathcal{H}(N_{k-1}) \leq n < \dim \mathcal{H}(N_k), \quad N_k = 2^{k+1} - 1.$$

Заметим, что $\dim \mathcal{H}(N) \asymp N^{d-1}$. Тогда, принимая во внимание теорему о проекторе для поперечника a_n (см., например, [11]), можно записать

$$a_n(W_p^r; L_q) \gg a_n(W_p^r \cap \mathcal{H}(N_k); L_q \cap \mathcal{H}(N_k)). \quad (9)$$

Теперь аналогично случаю оценки сверху, используя теорему А, убеждаемся, что

$$a_n(W_p^r \cap \mathcal{H}(N_k); L_q \cap \mathcal{H}(N_k)) \asymp N_k^{-r} m_{N_k}^{1/p-1/q} a_n(B_p^{m_{N_k}}(\alpha(N_k)); l_q^{m_{N_k}}). \quad (10)$$

Заметив, что $n \asymp m_{N_k} \asymp N_k^{d-1}$, используя результат о точных значениях поперечников $a_k(B_p^m(\alpha); l_q^m)$ при $1 \leq q < p \leq \infty$ [14] (с учетом предложения 1) можем записать

$$a_n(B_p^{m_{N_k}}(\alpha(N_k)); L_q^{m_{N_k}}) \asymp N_k^{r(d-1)(1/q-1/p)}. \quad (11)$$

Объединяя соотношения (9)–(11), с учетом неравенств (2) окончательно получаем, что при $1 \leq q < p \leq \infty$ и $r > 0$

$$\bar{d}_n(W_p^r; L_q) \gg n^{-r/(d-1)}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974. [2] А. Кратцер, В. Франц, *Трансцендентные функции*, ИЛ, М., 1963. [3] A. Bonami, J.-L. Clerk, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **183** (1973), 223–263. [4] Г. Сергё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962. [5] R. A. DeVore, R. Howard, Ch. Micchelli, *Manuscripta Math.*, **63**:4 (1989), 469–478. [6] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976. [7] Dinh Dung, Vu Quoc Thanh, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:9 (1996), 2757–2765. [8] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **48**:1–4 (1985), 401–416. [9] А. И. Камзолов, *Матем. заметки*, **32**:3 (1982), 285–293. [10] Yuan Xu, *Constr. Approx.*, **21**:1 (2005), 1–28. [11] С. Н. Кудрявцев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 81–104. [12] G. Brown, D. Feng, S. Y. Sheng, *J. Complexity*, **18**:4 (2002), 1001–1023. [13] А. И. Камзолов, *УМН*, **39**:2 (1984), 159–160. [14] А. Б. Ходулёв, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:2 (1989), 94–95.

В. С. Романюк

Институт математики НАН Украины

E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступило

02.08.2005

Исправленный вариант

11.07.2008