Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, О свойстве неотрицательности для форм Картана–Титса и Каца–Мути, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 736–740

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:58:39

О свойстве неотрицательности для форм Картана–Титса и Каца–Мути

В. А. Колмыков

В заметке рассматриваются формы, обобщающие формы Картана–Титса и Каца–Мути. Для таких форм находятся необходимые условия неотрицательности.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm4156

Введение. Форма Картана–Титса – это квадратичная форма $B(x) = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$ с коэффициентами $b_{ij} = -\cos(\pi/m_{ij})$, где $m_{ij} = m_{ji} \in \bar{\mathbb{N}} = \{1, 2, \dots, +\infty\}$, причем $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$.

Форма Каца–Мути – это квадратичная форма $B(x) = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$ с коэффициентами b_{ij} , где $b_{ii} = 2$, $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ji} = 0$, b_{ij} – неположительные целые числа при $i \neq j$.

Неотрицательные формы Картана–Титса и Каца–Мути полностью описаны (см., например, [1; гл. VI], [2; гл. 4]). В [3] мы рассматривали более общий класс форм. Для форм из этого класса были найдены необходимые условия положительности (т.е. неотрицательности и невырожденности).

В настоящей заметке рассматривается еще более широкий класс: формы с усредненным диагональным преобладанием. Для таких форм мы находим необходимые условия неотрицательности.

1. Формулировка результата. Форма с усредненным диагональным преобладанием – это квадратичная форма $B(x) = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$ с коэффициентами b_{ij} , где $b_{ii} > 0$; $b_{ij} + b_{ji} \leq -\sqrt{b_{ii} b_{jj}}$, если $i \neq j$ и $b_{ij} + b_{ji} \neq 0$.

Для исследования форм с усредненным диагональным преобладанием важную роль играет понятие графа формы. В настоящей статье под словом “граф” мы будем понимать конечный граф без петель и кратных ребер. Иными словами, граф – это пара (V_0, V_1) , где V_0 – конечное множество, а V_1 – некоторое множество, состоящее из двухэлементных подмножеств множества V_0 .

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – вещественная матрица. Форме $B = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$ поставим в соответствие граф $\Gamma(B)$ следующим образом: $V_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; $\{v_i, v_j\} \in V_1$, если и только если $b_{ij} + b_{ji} \neq 0$. Таким образом, мы определили отображение Γ из множества квадратичных форм во множество графов.

Квадратичная форма называется *неразложимой*, если ее матрицу нельзя перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов привести к блочно-диагональному виду с квадратными блоками на диагонали. Форма неразложима тогда и только тогда, когда ее граф связан. Для исследования неотрицательности форм достаточно рассматривать лишь неразложимые формы.

Напомним, что вырожденность квадратичной формы означает вырожденность симметрической матрицы этой формы. Через $\mathcal{S}$ (соответственно, $\tilde{\mathcal{S}}$) будем обозначать множество всех неотрицательных невырожденных (соответственно, неотрицательных вырожденных) неразложимых форм с усредненным диагональным преобразованием.

Положим

$$\Omega = \{A_l, D_m, E_n\}_{l=2, m=4, n=6}^{+\infty, +\infty, 8} \quad \text{и} \quad \tilde{\Omega} = \{\tilde{A}_l, \tilde{D}_m, \tilde{E}_n\}_{l=2, m=4, n=6}^{+\infty, +\infty, 8}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы равенства*

$$\Gamma(\mathcal{S}) = \Omega \cup \{A_1\}, \quad \Gamma(\tilde{\mathcal{S}}) = \Omega \cup \tilde{\Omega}.$$

2. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем несколько лемм.

Если $x \in \mathbb{R}^n$, то через $|x|$ обозначим вектор, получающийся из x заменой всех координат их модулями. Квадратичную форму $B(x)$ назовем *доминантной*, если $B(x) \geq B(|x|)$ для всех x .

ЛЕММА 1. *Форма $B(x) = \sum_{ij} b_{ij}x_ix_j$ является доминантной, если и только если $b_{ij} + b_{ji} \leq 0$ для любых $i \neq j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Если форма $B(x)$ доминантна, то $B(e_i - e_j) \geq B(|e_i - e_j|)$. При $i \neq j$ отсюда получаем, что

$$b_{ii}^2 - (b_{ij} + b_{ji}) + b_{jj}^2 \geq b_{ii}^2 + (b_{ij} + b_{ji}) + b_{jj}^2.$$

Пусть $b_{ij} + b_{ji} \leq 0$ для любых $i \neq j$. Тогда

$$(b_{ij} + b_{ji})x_ix_j \geq (b_{ij} + b_{ji})|x_i||x_j|$$

при $i \neq j$. Поэтому $B(x) \geq B(|x|)$.

Пусть $B = \sum_{ij} b_{ij}x_ix_j$ и $B' = \sum_{ij} b'_{ij}x_ix_j$ – квадратичные формы от n переменных. Если $b_{ij} + b_{ji} \geq b'_{ij} + b'_{ji}$ для любых i и j , то будем писать $B \succeq B'$. Если $B \succeq B'$ и вектор x имеет лишь неотрицательные координаты, то $B(x) \geq B'(x)$.

Напомним, что $B > 0$ (соответственно $B \geq 0$) означает, что форма B положительна (соответственно неотрицательна), т.е. $B(x) > 0$ (соответственно $B(x) \geq 0$) для любого ненулевого x .

ЛЕММА 2. *Пусть B и B' – доминантные формы, причем $B \succeq B'$. Если $B' > 0$ (соответственно $B' \geq 0$), то и $B > 0$ (соответственно $B \geq 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $B(x) \geq B(|x|) \geq B'(|x|)$ для любого x . Но $B'(|x|) > 0$ (соответственно, $B'(|x|) \geq 0$) для любого $x \neq 0$.

Пусть $B = \sum_{ij} b_{ij}x_ix_j$ и $b_{ii} > 0$ для всех i . Положим $B^\dagger = \sum_{ij} (b_{ij}/\sqrt{b_{ii}b_{jj}})x_ix_j$.

ЛЕММА 3. Если $b_{ii} > 0$ для любого i , то $B > 0 \Leftrightarrow B^\downarrow > 0$ и $B \geq 0 \Leftrightarrow B^\downarrow \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $B^\downarrow(y)$ получается из $B(x)$ заменой $(x_1, \dots, x_n)$ на $(y_1/\sqrt{b_{11}}, \dots, y_n/\sqrt{b_{nn}})$.

Произвольной квадратичной форме B поставим в соответствие форму B^{sgn} следующим образом. Пусть $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ – вещественная верхнетреугольная матрица и $B = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$. Положим $B^{\text{sgn}} = \sum_{ij} (\text{signum } b_{ij}) x_i x_j$.

ЛЕММА 4. Если B – форма с усредненным диагональным преобладанием, то $B^{\text{sgn}} \succeq B^\downarrow$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$, $B^{\text{sgn}} = \sum_{ij} p_{ij} x_i x_j$, $B^\downarrow = \sum_{ij} q_{ij} x_i x_j$. Имеем

- если $i = j$, то $p_{ij} + p_{ji} = 2 = q_{ij} + q_{ji}$;
- если $i \neq j$ и $b_{ij} + b_{ji} = 0$, то $p_{ij} + p_{ji} = 0 = q_{ij} + q_{ji}$;
- если $i \neq j$ и $b_{ij} + b_{ji} \neq 0$, то

$$p_{ij} + p_{ji} = -1 \geq \frac{b_{ij} + b_{ji}}{\sqrt{b_{ii} b_{jj}}} = q_{ij} + q_{ji}.$$

ЛЕММА 5. Пусть B – форма с усредненным диагональным преобладанием. Если $B > 0$ (соответственно $B \geq 0$), то $B^{\text{sgn}} > 0$ (соответственно $B^{\text{sgn}} \geq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3 и 4 следует, что $B^{\text{sgn}} \succeq B^\downarrow > 0$ (соответственно $B^{\text{sgn}} \succeq B^\downarrow \geq 0$). Тогда из лемм 1 и 2 следует, что $B^{\text{sgn}} > 0$ (соответственно $B^{\text{sgn}} \geq 0$).

Граф Кокстера – это пара (G, f) , где $G = (V_0, V_1)$ – граф, а f – отображение $V_1 \rightarrow \{3, 4, 5, \dots, +\infty\}$. Число $f(l)$ называется *порядком ребра l* . В случае, когда порядок ребра больше чем 3 при изображении графа Кокстера, этот порядок пишется рядом с ребром. Если у любого ребра порядок равен 3, то граф Кокстера (G, f) отождествляют с графом G . Таким образом, множество графов Кокстера содержит множество (“обычных”) графов.

С каждой вершиной v графа Кокстера (G, f) свяжем вещественную переменную x_v , а с каждой парой (u, v) вершин – число f_{uv} , определенное следующим образом:

$$f_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v, \\ 2, & \text{если } u \neq v \text{ и } \{u, v\} \notin V_1, \\ f_{uv} = f(\{u, v\}), & \text{если } \{u, v\} \in V_1. \end{cases}$$

Квадратичная форма $F = -\sum_{uv} (\cos(\pi/f_{uv})) x_u x_v$ называется *формой, ассоциированной с графом Кокстера (G, f)* . В частности, с каждым графом ассоциирована квадратичная форма: если A – матрица смежности графа, то симметрическая матрица ассоциированной формы равна $I - 0.5A$.

Форма, ассоциированная с графом Кокстера, является формой Картана–Титса.

ЛЕММА 6. Если B – форма с усредненным диагональным преобладанием, то B^{sgn} – форма, ассоциированная с некоторым графом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Форма, ассоциированная с графом, характеризуется тем, что в ее верхнетреугольной матрице диагональные элементы равны 1, а наддиагональные принадлежат множеству $\{0, -1\}$.

Множество всех форм, ассоциированных со связными графами, обозначим через $\mathcal{FG}$. Ниже мы будем использовать графы Кокстера $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_n$ и $\tilde{C}_n$, изображение которых (для определенности) см. в [1; гл. VI, § 4].

Во многих источниках приводится полное описание неотрицательных форм, ассоциированных с графами Кокстера. Для удобства цитирования сформулируем необходимые нам утверждения в виде следующей леммы.

ЛЕММА 7. 1) Форма $B \in \mathcal{FG}$ неотрицательна и невырождена, если и только если $\Gamma(B) \in \Omega \cup \{A_1\}$.

2) Форма $B \in \mathcal{FG}$ неотрицательна и вырождена, если и только если $\Gamma(B) \in \tilde{\Omega}$.

3) Формы, ассоциированные с графами Кокстера $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_n$ и $\tilde{C}_n$, неотрицательны и вырождены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы следует из предложения 2.1 работы [4].

В [1] слова “форма положительна” означают то же, что в отечественной литературе слова “форма неотрицательна”; кроме того, формой, ассоциированной с графом Кокстера, названа билинейная форма $B = -\sum_{uv} (\cos(\pi/f_{uv}))x_u y_v$. В [1; гл. VI § 4] доказана теорема 4, из которой следуют второе и третье утверждения леммы.

ЛЕММА 8. Для любого графа $G \in \Omega$ существует форма $F \in \tilde{\mathcal{S}}$ такая, что $\Gamma(F) = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = A_n$ и $n = 2$ ($n = 3$, $n \geq 4$). Рассмотрим форму Φ , ассоциированную с графом Кокстера $\tilde{A}_1$ (соответственно $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_{n-1}$). Тогда $\Gamma(\Phi) = A_n$. Из леммы 7 следует, что $\Phi \in \tilde{\mathcal{S}}$.

Пусть $G = D_n$. Рассмотрим форму Φ , ассоциированную с графом Кокстера $\tilde{B}_{n-1}$. Тогда $\Gamma(\Phi) = D_n$. Из леммы 7 следует, что $\Phi \in \tilde{\mathcal{S}}$.

Положим

$$d_5 = (x_1^2 - x_1 x_4) + (x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 - x_3 x_4 + x_4^2 - x_4 x_5 + x_5^2),$$

$$d_* = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_3 - \frac{2}{3}x_4\right)^2 + \frac{5}{12}\left(x_4 - \frac{6}{5}x_5\right)^2.$$

Тогда $d_5 = d_* + 2x_5^2/5$.

Положим

$$\Phi_6 = d_5 - \frac{4}{\sqrt{10}}x_5 x_6 + x_6^2,$$

$$\Phi_7 = d_5 - x_5 x_6 + x_6^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}x_6 x_7 + x_7^2,$$

$$\Phi_8 = d_5 - x_5 x_6 + x_6^2 - x_6 x_7 + x_7^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x_7 x_8 + x_8^2.$$

Очевидно, что Φ_i – форма с усредненным диагональным преобладанием и $\Gamma(\Phi_i) = E_i$.

Легко проверить, что

$$\Phi_6 = d_* + \frac{2}{5}\left(x_5 - \sqrt{\frac{5}{2}}x_6\right)^2,$$

$$\Phi_7 = d_* + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}\left(x_6 - \sqrt{\frac{8}{3}}x_7\right)^2,$$

$$\Phi_8 = d_* + \frac{2}{5} \left(x_5 - \frac{5}{4} x_6 \right)^2 + \frac{3}{8} \left(x_6 - \frac{4}{3} x_7 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x_7 - \sqrt{3} x_8 \right)^2.$$

Поэтому форма Φ_i неотрицательна и вырождена.

Теперь докажем теорему.

Пусть $B \in \mathcal{S}$. Из лемм 5 и 6 следует, что $B^{\text{sgn}} > 0$ и $B^{\text{sgn}} \in \mathcal{FG}$. Поэтому из леммы 7 следует, что $\Gamma(B^{\text{sgn}}) \in \Omega \cup \{A_1\}$. Итак,

$$\Gamma(B) = \Gamma(B^{\text{sgn}}) \in \Omega \cup \{A_1\}.$$

Включение

$$\Omega \cup \{A_1\} \subseteq \Gamma(\mathcal{S})$$

следует из леммы 7.

Пусть $B \in \tilde{\mathcal{S}}$. Из лемм 5 и 6 следует, что $B^{\text{sgn}} \geq 0$ и $B^{\text{sgn}} \in \mathcal{FG}$. Поэтому из леммы 7 следует, что $\Gamma(B^{\text{sgn}}) \in \Omega \cup \{A_1\} \cup \tilde{\Omega}$. Итак,

$$\Gamma(B) = \Gamma(B^{\text{sgn}}) \in \Omega \cup \{A_1\} \cup \tilde{\Omega}.$$

Так как форма B вырождена, то $\Gamma(B) \neq A_1$.

Включение

$$\tilde{\Omega} \subseteq \Gamma(\tilde{\mathcal{S}})$$

следует из леммы 7. Включение

$$\Omega \subseteq \Gamma(\tilde{\mathcal{S}})$$

доказано в лемме 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 4–6. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Элементы математики, Мир, М., 1972.
- [2] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [3] В. А. Колмыков, “Свойства положительности форм Картана–Титса и Каца–Мули”, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 3, 37–40.
- [4] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, “Функторы Кокстера и теорема Габриеля”, *УМН*, **28**:2(170) (1973), 19–33.

В. А. Колмыков

Воронежский государственный университет

E-mail: kolmykov@math.vsu.ru

Поступило

23.10.2007