Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 571–587

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:11:04

Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком

С. А. Назаров

Построена и обоснована асимптотика собственных чисел и собственных функций уравнения Лапласа с краевыми условиями Стеклова в области с острым пиком, кончик которого размером $O(\varepsilon)$ обломан. В частности, установлено, что всякое положительное собственное число с фиксированным номером оказывается бесконечно малой при $\varepsilon \rightarrow +0$, а соответствующая собственная функция локализована в $c\varepsilon$ -окрестности вершины пика.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Пусть $n \geq 3$ и Ω – область в пространстве $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, +\infty)$, ограниченная $(n-1)$ -мерной поверхностью $\partial\Omega$, гладкой всюду, кроме начала координат $\mathcal{O}$. В окрестности $\mathcal{U}$ точки $\mathcal{O}$ область Ω определена соотношениями

$$x_n > 0, \quad x_n^{-1-\gamma} x' \in \omega, \quad (1.1)$$

где $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – декартова система координат, γ – положительный показатель и ω – область в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой $(n-2)$ -мерной границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Иными словами, точка $\mathcal{O}$ является вершиной пикообразного заострения границы (см. рис. 1). Пусть ε – малый положительный параметр и $\Omega(\varepsilon)$ – область Ω с “обломанным” кончиком пика (см. рис. 1), например,

$$\Omega(\varepsilon) = (\Omega \setminus \mathcal{U}) \cup \{x \in \Omega \cap \mathcal{U} : x_n > \varepsilon\}. \quad (1.2)$$

В области (1.2) рассмотрим спектральную задачу Стеклова для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega(\varepsilon), \quad \partial_N u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \partial\Omega(\varepsilon) \setminus \Gamma(\varepsilon), \quad (1.3)$$

где ∂_N – производная вдоль внешней нормали, а $\Gamma(\varepsilon)$ – ребро $\{x \in \partial\Omega \cap \mathcal{U} : x_n = \varepsilon\}$, вырождающееся при $\varepsilon = 0$ в точку $\mathcal{O}$. Поскольку $\partial\Omega(\varepsilon)$ – липшицева поверхность в случае $\varepsilon > 0$ (тем не менее, постоянная Липшица неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$), задача (1.3) имеет бесконечно большую последовательность собственных чисел

$$0 = \lambda_0^\varepsilon < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_k^\varepsilon \dots \rightarrow +\infty, \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке The Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) и Российского фонда фундаментальных исследований (совместный проект № 047.017.020).

Рис. 1. Тело с пикообразным заострением

в которой они указаны при учете кратностей. Соответствующие собственные функции

$$(\text{mes}_{n-1} \partial\Omega)^{-1/2} = u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \dots, u_k^\varepsilon, \dots,$$

принадлежащие пространству Соболева $H^1(\Omega(\varepsilon))$, можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_j^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{\partial\Omega(\varepsilon)} = \delta_{j,k}, \quad (1.5)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, а $(\cdot, \cdot)_\Upsilon$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Upsilon)$.

Предельная ($\varepsilon = 0$) задача Стеклова

$$-\Delta_x u^0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n u^0(x) = \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O},$$

имеет дискретный спектр лишь в ситуации $\gamma \in (0, 1)$, так как только при этом условии пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L_2(\partial\Omega)$ компактно (см., например, [1] и замечание 4.1, а также [2]). Для проверки отсутствия вложения $H^1(\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$ при $\gamma > 1$ и потери им компактности при $\gamma = 1$ достаточно рассмотреть последовательность функций

$$x \mapsto \psi_m(x_n) = \psi(mx_n),$$

где $\psi \in C_c^1(0, 1)$, $m = 1, 2, \dots$ и

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \psi_m; L_2(\Omega)\|^2 &= O(m^{-(n-1)(1+\gamma)+1} m^2), \\ \|\psi_m; L_2(\partial\Omega)\|^2 &= O(m^{-(n-1)(1+\gamma)+1} m^{1+\gamma}). \end{aligned}$$

Цель данной работы – найти асимптотические представления собственных чисел λ_k^ε и функций u_k^ε задачи (1.3) при достаточно тонком заострении, т.е.

$$\gamma > 1. \quad (1.6)$$

Вопрос о поведении λ_k^ε и u_k^ε при $\varepsilon \rightarrow +0$ при $\gamma = 1$, к сожалению, остается открытым.

В следующем пункте строится формальная асимптотика решений спектральной задачи (1.3), а в п. 3 исследуется спектр найденной предельной задачи (2.7), (2.9).

Рис. 2. Тело с затупленным пиком

Остальные три пункта статьи посвящены обоснованию асимптотических представлений. Сначала в п. 4 проверены вспомогательные утверждения, затем в п. 5 показано, что асимптотические анзацы порождают приближенные решения исходной спектральной задачи Стеклова, и, наконец, в п. 6 на основе утверждения о сходимости

$$\varepsilon^{1-\gamma} \lambda_j^\varepsilon \rightarrow \mu_j \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

где μ_j – собственные числа предельной задачи, доказана основная теорема 6.1 об асимптотике. В силу соотношения (1.7) собственное число λ_j^ε с фиксированным положительным номером j оказывается бесконечно малой при $\varepsilon \rightarrow +0$. Асимптотические формулы для собственных функций, полученные в теореме 6.1, устанавливают эффект локализации собственных функций в ε -окрестности обломанного кончика пика.

2. Формальная асимптотика решения спектральной задачи. Растяжение координат $x \rightarrow y = \varepsilon^{-1}x$ переводит область $\Omega(\varepsilon)$ в область Ω^h , которая зависит от малого параметра $h = \varepsilon^\gamma$ и при некотором радиусе $R > 0$ задана внутри шара $\mathbb{B}_R = \{y : |y| < Rh\}$ вытекающими из определения (1.1) формулами

$$\eta := h^{-1}y = (h^{-1}y_1, \dots, h^{-1}y_{n-1}) \in \omega(\zeta^{1+\gamma}), \quad \zeta := y_n > 1, \quad \omega(t) = \{\eta : t^{-1}\eta \in \omega\},$$

т.е. является тонкой. Применим процедуру построения асимптотики решений эллиптических краевых задач в тонких областях (см., например, [3; гл. 1, 7]) и примем следующие асимптотические анзацы:

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{\gamma-1} \mu + \dots = \varepsilon^{-1} h \mu + \dots, \quad (2.1)$$

$$u^\varepsilon(\varepsilon y) = w(\eta, \zeta) + h w^{(1)}(\eta, \zeta) + h^2 w^{(2)}(\eta, \zeta) + \dots. \quad (2.2)$$

Здесь μ – число, а $w \neq 0$ и $w^{(1)}$ – функции, подлежащие определению. Подставим эти анзацы в задачу (1.3) и учтем соотношение

$$\partial_N = \varepsilon^{-1} D(\varepsilon, \eta, \zeta)^{-1} (\nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta) \cdot \nabla_\eta - (1 + \gamma) h \zeta^{-1} \eta \cdot \nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta) \partial_\zeta) \quad (2.3)$$

для производной вдоль нормали. В формуле (2.3) ν – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial_\nu = \nu \cdot \nabla_\eta$ – соответствующая нормальная

производная, $\nabla_\nu - (n-1)$ -мерный градиент, т.е. точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$, а D – нормирующий множитель,

$$\begin{aligned} D(\varepsilon, \eta, \zeta) &= (1 + (1 + \gamma)^2 h^2 \zeta^{-2} |\eta \cdot \nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta)|^2)^{1/2} = 1 + O(h^2), \\ D(1, x', x_n) &= (1 + (1 + \gamma)^2 x_n^{-2} |x' \cdot \nu(x_n^{-1-\gamma} x')|^2)^{1/2} = 1 + O(x_n^{2\gamma}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Собрав коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра h , получаем последовательность задач Неймана на сечении $\omega(\zeta^{1+\gamma})$:

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta w(\eta, \zeta) &= 0, \quad \eta \in \omega(\zeta^{1+\gamma}), \quad \partial_\nu w(\eta, \zeta) = 0, \quad \eta \in \partial\omega(\zeta^{1+\gamma}), \\ -\Delta_\eta w^{(1)}(\eta, \zeta) &= 0, \quad \eta \in \omega(\zeta^{1+\gamma}), \quad \partial_\nu w^{(1)}(\eta, \zeta) = 0, \quad \eta \in \partial\omega(\zeta^{1+\gamma}), \\ -\Delta_\eta w^{(2)}(\eta, \zeta) &= \partial_\zeta^2 w(\eta, \zeta), \quad \eta \in \omega(\zeta^{1+\gamma}), \\ \partial_\nu w^{(2)}(\eta, \zeta) &= (1 + \gamma) \zeta^{-1} \eta \cdot \nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta) \partial_\zeta w(\eta, \zeta) + \mu w(\eta, \zeta), \quad \eta \in \partial\omega(\zeta^{1+\gamma}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первые две из них показывают, что

$$w(\eta, \zeta) = w(\zeta), \quad w^{(1)}(\eta, \zeta) = w^{(1)}(\zeta).$$

Далее считаем, что $w^{(1)} = 0$. Задача (2.5) для $w^{(2)}$ разрешима в том и только том случае, если выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\omega(\zeta^{1+\gamma})} \partial_\zeta^2 w(\zeta) d\eta + (1 + \gamma) \int_{\partial\omega(\zeta^{1+\gamma})} \zeta^{-1} \eta \cdot \nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta) \partial_\zeta w(\zeta) ds_\eta \\ + \mu \int_{\partial\omega(\zeta^{1+\gamma})} w(\zeta) ds_\eta = 0, \end{aligned}$$

которое благодаря очевидной формуле

$$\int_{\partial\omega(\zeta^{1+\gamma})} \eta \cdot \nu(\zeta^{-1-\gamma} \eta) ds_\eta = \int_{\omega(\zeta^{1+\gamma})} \nabla_\eta \cdot \eta d\eta = (n-1) \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \text{mes}_{n-1} \omega \quad (2.6)$$

можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$-M_{n-1} \partial_\zeta \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \partial_\zeta w(\zeta) = \mu M_{n-2} \zeta^{(n-2)(1+\gamma)} w(\zeta), \quad \zeta \in (1, +\infty), \quad (2.7)$$

с коэффициентами

$$M_{n-1} = \text{mes}_{n-1} \omega, \quad M_{n-2} = \text{mes}_{n-2}(\partial\omega). \quad (2.8)$$

Кроме того, подставляя анзацы (2.1) и (2.2) в спектральное краевое условие Стеклова на срезе пика

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n}(x', \varepsilon) = \mu u^\varepsilon(x', \varepsilon), \quad x' \in \omega(\varepsilon^{1+\gamma}),$$

дополняем дифференциальное уравнение (2.7) следующим граничным условием:

$$M_{n-1} \partial_\zeta w(1) = 0. \quad (2.9)$$

Задачу (2.7), (2.9) называем *предельной спектральной задачей*.

3. О спектре предельной задачи. Неравенство Харди

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} |W(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty t^{\alpha+1} \left| \frac{dW}{dt}(t) \right|^2 dt, \quad (3.1)$$

справедливое при $\alpha = (n-1)(1+\gamma) - 1 > 0$ и $W \in C_c^1[0, \infty)$, показывает, что, во-первых, пространство $\mathcal{V}$ с весовой нормой

$$\left(\int_1^\infty \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \left[|\partial_\zeta w(\zeta)|^2 + \frac{1}{\zeta^2} |w(\zeta)|^2 \right] d\zeta \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

может быть получено как пополнение линейала $C_c^1[1, \infty)$ непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями по норме

$$\left(\int_1^\infty \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} |\partial_\zeta w(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{1/2}$$

и, во-вторых, ввиду условия (1.6) пространство $\mathcal{V}$ компактно вкладывается в пространство $\mathcal{L}$, снабженное нормой

$$\left(\int_1^\infty \zeta^{(n-2)(1+\gamma)} |w(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, известные результаты теории операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [2]) при учете вариационной формулировки задачи (2.7), (2.9)

$$M_{n-1} \int_1^\infty \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \partial_\zeta w(\zeta) \partial_\zeta v(\zeta) d\zeta = \mu M_{n-2} \int_1^\infty \zeta^{(n-2)(1+\gamma)} w(\zeta) v(\zeta) d\zeta, \quad v \in \mathcal{V}, \quad (3.4)$$

обеспечивают следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. При $\gamma > 1$ задача (3.4) или, что то же самое, задача (2.7), (2.9) имеет бесконечно большую последовательность собственных чисел

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \rightarrow +\infty, \quad (3.5)$$

а соответствующие собственные функции $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$, принадлежащие весовому пространству $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ с нормой (3.2), можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$M_{n-2} \langle w_j, w_k \rangle_{\mathcal{L}} = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ – скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}$ с нормой (3.3), а M_{n-2} – величина (2.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. 1) Простота собственных чисел (3.5) обусловлена спецификой граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

2) Поскольку постоянная не принадлежит пространству $\mathcal{H}$, число $\mu = 0$ не является собственным для задачи (3.4).

3) Если $\gamma = 1$, то вложение $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ сохраняется, но теряет компактность, а спектр перестает быть дискретным.

При помощи очевидных замен уравнение (2.7) приводится к частному случаю уравнения Бесселя [4; гл. 2, 2.162(9)], и поэтому справедливы формулы

$$w_k(\zeta) = c_k t^{p+1/2} J_{p+1/2}(2(\gamma-1)^{-1}(M\mu_k)^{1/2}t),$$

$$t = \zeta^{-(\gamma-1)/2}, \quad p = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(n - \frac{3}{2} \right), \quad M = \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}},$$

где J_ν – функция Бесселя. Следовательно, при $\zeta \in [1, \infty)$ верны соотношения

$$\frac{d^q w_k}{d\zeta^q}(\zeta) = O\left(\zeta^{-(n-1)(1+\gamma)+1-q}\right), \quad q = 0, 1, 2. \quad (3.7)$$

4. Весовые неравенство Пуанкаре и следовое неравенство. Пусть $d > 0$ – малое фиксированное число и $\Omega(d) = \Omega(\varepsilon) \setminus \Pi_\varepsilon^d$,

$$\Pi_\varepsilon^d = \{x \in \Omega \cap \mathcal{U} : \varepsilon < x_n < d\}. \quad (4.1)$$

Представим функцию $u \in H^1(\Omega(\varepsilon))$ в виде

$$u(x) = a + \hat{u}(x), \quad a = \left(\text{mes}_n \Omega \left(\frac{d}{2} \right) \right)^{-1} \int_{\Omega(d/2)} u(x) dx. \quad (4.2)$$

Поскольку по определению (4.2) среднее функции $\hat{u}$ по множеству $\Xi_{d/2}$ равно нулю, выполнено неравенство Пуанкаре

$$\begin{aligned} \left\| \hat{u}; L_2 \left(\Omega \left(\frac{d}{2} \right) \right) \right\| &\leq c \left\| \nabla_x \hat{u}; L_2 \left(\Omega \left(\frac{d}{2} \right) \right) \right\| \\ &= c \left\| \nabla_x u; L_2 \left(\Omega \left(\frac{d}{2} \right) \right) \right\| \leq c \left\| \nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon)) \right\|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Положим $v(x) = \hat{u}(x)\chi_d(x_n)$, где $\chi_d \in C^1[0, d]$ – срезающая функция, равная нулю в $\Omega \setminus \mathcal{U}$ и в $\Omega \cap \mathcal{U}$ при $x_n \in [3d/4, d]$, но $\chi_d(x) = 1$ при $x \in \Omega \cap \mathcal{U}$ и $x_n \in [0, d/2]$. Можно считать, что на своем носителе функция χ_d зависит только от переменной x_n , и будем далее, несколько вольно, писать $\chi_d(x_n)$. Ясно, что

$$\|\nabla_x v; L_2(\Pi_\varepsilon^d)\| \leq c(\|\nabla_x \hat{u}; L_2(\Pi_\varepsilon^d)\| + \|\hat{u}; L_2(\Pi_{d/2}^d)\|) \leq c\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|.$$

Пусть

$$v(x) = v_0(x_n) + v_\perp(x), \quad \int_{\omega(z^{1+\gamma})} v_\perp(x', z) dx' = 0 \quad \text{при п.в. } z \in (\varepsilon, d). \quad (4.4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\varepsilon^d} |\nabla_x v(x)|^2 dx &= \int_{\Pi_\varepsilon^d} |\nabla_{x'} v_\perp(x)|^2 dx + \int_{\Pi_\varepsilon^d} \left| \frac{\partial v_\perp}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx + \int_{\Pi_\varepsilon^d} \left| \frac{dv_0}{dx_n}(x_n) \right|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Pi_\varepsilon^d} \frac{dv_0}{dx_n}(x_n) \frac{\partial v_\perp}{\partial x_n}(x) dx =: I_1 + I_2 + I_3 + 2I_4. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Благодаря неравенству Пуанкаре на сечении $\omega(z^{1+\gamma})$ и условию ортогональности, наложенному на вторую составляющую разложения (4.4), после интегрирования по $z \in (0, d)$ получаем

$$I_1 \geq c_1 \int_{\Pi_d^\varepsilon} x_n^{-2(1+\gamma)} |v_\perp(x)|^2 dx, \quad c_1 > 0. \quad (4.6)$$

Одномерное неравенство Харди (3.1) показывает, что

$$\begin{aligned} I_3 &= \text{mes}_{n-1}(\omega) \int_\varepsilon^d z^{(n-1)(1+\gamma)} \left| \frac{dv_0}{dx_n}(x_n) \right|^2 dx_n \\ &\geq c_2 \int_\varepsilon^d z^{(n-1)(1+\gamma)-2} |v_0(x_n)|^2 dx_n = c_3 \int_{\Pi_d^\varepsilon} x_n^{-2} |v_0(x_n)|^2 dx, \quad c_3 > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для обработки интеграла I_4 из представления (4.5) воспользуемся двумя соотношениями

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{dz} \int_{\omega(z^{1+\gamma})} v_\perp(x', z) dx' - \int_{\omega(z^{1+\gamma})} \frac{\partial v_\perp}{\partial z}(x', z) dx' \right| \\ &\leq c z^\gamma \int_{\partial\omega(z^{1+\gamma})} |v_\perp(x', z)| ds_{x'} \quad \text{при п.в. } z \in (\varepsilon, d), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\int_{\{x \in \partial\Pi_d^\varepsilon : \varepsilon < x_n < d\}} x_n^{-1-\gamma} |v_\perp(x)|^2 ds_x \leq c \int_{\Pi_d^\varepsilon} (|\nabla_{x'} v_\perp(x)|^2 + x_n^{-2(1+\gamma)} |v_\perp(x)|^2) dx.$$

Первое вытекает из правила дифференцирования интегралов с переменными пределами, а второе – следовое неравенство, проверяемое по стандартной схеме (см., например, [5]). Отметим, что первый интеграл в (4.8) равен нулю согласно условию (4.4). Теперь имеем

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_\varepsilon^d \frac{dv_0}{dz}(z) \int_{\omega(z^{1+\gamma})} \frac{\partial v_\perp}{\partial z}(x', z) dx' dz \right| \\ &\leq c \left\| \frac{dv_0}{dz}; L_2(\Pi_\varepsilon^d) \right\| \left\| \int_\varepsilon^d z^{-(n-1)(1+\gamma)} \left(z^\gamma \int_{\partial\omega(z^{1+\gamma})} |v_\perp(x', z)| ds_{x'} \right)^2 dz \right\| \\ &\leq c \left\| \frac{dv_0}{dz}; L_2(\Pi_\varepsilon^d) \right\| \|x_n^{-1} v_\perp; L_2((\partial\Pi)_\varepsilon^d)\| \leq c \|\nabla_x v; L_2(\Pi_\varepsilon^d)\|^2; \end{aligned}$$

здесь $(\partial\Pi)_\varepsilon^d = \{x \in \partial\Pi_\varepsilon^d : \varepsilon < x_n < d\}$. Последняя оценка обеспечена формулами (4.6) и (4.5), так как $I_2 + I_3 + 2I_4 \geq 0$. Следовательно, каждый из интегралов I_1 , I_2 и I_3 мажорируется величиной $c \|\nabla_x v; L_2(\Pi_\varepsilon^d)\|^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть u – функция из пространства Соболева $H^1(\Omega(\varepsilon))$. Если

$$\int_{\partial\Omega(\varepsilon)} u(x) ds_x = 0, \quad (4.9)$$

то выполнены неравенства

$$\|r^{-1}u; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (4.10)$$

$$\|r^{(\gamma-1)/2}u; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\| \leq c\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (4.11)$$

где $r = |x|$ – расстояние до вершины пика $\mathcal{O}$, а множители с не зависят ни от функции u , ни от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_0 и $u_\perp$ – составляющие разложения (4.4) функции $\chi_d u$ на множестве (4.1). Заметим, что, во-первых, $\chi_d u_\perp = v_\perp$ и $\chi_d u_0 = v_0 + \chi_d a$, а во-вторых, $r > r_d$ на $\Omega(d)$ и $r = x_n + O(x_n^{2\gamma})$ при $x \in \Pi_\varepsilon^d$. Далее из условия ортогональности (4.9) будет выведена следующая оценка постоянной a в представлении (4.2):

$$|a| \leq c\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|. \quad (4.12)$$

Тогда неравенство (4.10) вытекает из соотношений (4.3), (4.6), (4.7) и

$$\int_{\Pi_\varepsilon^d} x_n^{-2} |v_0(x_n) + a|^2 dx \leq c \left(|a|^2 + \int_{\Pi_\varepsilon^d} x_n^{-2} |v_0(x_n)|^2 dx \right), \quad (4.13)$$

так как интеграл от величины x_n^{-2} по множеству Π_0^d сходится в силу формулы (1.1). Аналогично, неравенство (4.11) доказывается применением соотношений (4.3), (4.8) и (4.6), (4.7), (4.13), а также соотношений

$$\|\hat{u}; L_2((\partial\Pi)_\varepsilon^{d/2})\| \leq c \left\| \nabla_x \hat{u}; H^1 \left(\Omega \left(\frac{d}{2} \right) \right) \right\|,$$

и

$$\begin{aligned} \int_{(\partial\Pi)_\varepsilon^d} x_n^{\gamma-1} |v_0(x) + \chi_d(x_n)a|^2 ds_x &\leq c \int_\varepsilon^d x_n^{(n-1)(1+\gamma)+\gamma-1} |v_0(x) + \chi_d(x_n)a|^2 dx_n \\ &\leq c \int_{\Pi_\varepsilon^d} x_n^{-2} |v_0(x_n) + \chi_d(x_n)a|^2 dx, \\ \varepsilon^{-\gamma-1} \int_{\omega(\varepsilon^{1+\gamma})} |v_\perp(x', \varepsilon)|^2 dx' &\leq c \int_{\Pi_\varepsilon^d} x_n^{-1-\gamma} \left(\left| \frac{\partial v_\perp}{\partial x_n}(x) \right| + \frac{1}{x_n} |v_\perp(x)| \right) |v_\perp(x)| dx \\ &\leq c \left(\left\| \frac{\partial v_\perp}{\partial x_n}; L_2(\Pi_\varepsilon^d) \right\|^2 + \|x^{-1-\gamma} v_\perp; L_2(\Pi_\varepsilon^d)\|^2 \right), \\ \varepsilon^{-\gamma} \int_{\omega(\varepsilon^{1+\gamma})} x_n^{\gamma-1} |v_0(\varepsilon) + a|^2 dx' &\leq c \varepsilon^{-1+(n-1)(1+\gamma)} |v_0(\varepsilon) + a|^2 \\ &\leq c \left(|a|^2 + \int_\varepsilon^d x_n^{(n-1)(1+\gamma)} \left(\left| \frac{\partial v_0}{\partial x_n}(x_n) \right|^2 + x_n^{-2} |v_0(x_n)|^2 \right) dx_n \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Осталось убедиться в справедливости оценки (4.12). Согласно равенствам (4.2) и (4.9) находим

$$\begin{aligned} |a| &\leq c \operatorname{mes}_{n-1}(\partial\Omega(\varepsilon)) |a| \\ &= c \left| \int_{\partial\Omega(\varepsilon)} \hat{u}(x) dx \right| \leq c \left(\int_{\partial\Omega(\varepsilon)} x_n^{\gamma-1} |\hat{u}(x)|^2 ds_x \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega(\varepsilon)} x_n^{1-\gamma} ds_x \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В силу определения (1.1) и условия $n > 2$ последний интеграл ограничен постоянной, не зависящей от параметра ε , а предпоследний не превосходит величины $c\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2$, так как следовое неравенство (4.11) для составляющей $\hat{u}$ разложения (4.2) доказывается при помощи приведенных рассуждений, но в формулах (4.14) нужно положить $a = 0$. В итоге соотношение (4.15) влечет за собой искомую оценку (4.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Неравенство (4.10) можно видоизменить, добавив в правую часть норму $\|u; L_2(\Omega)\|$, но убрав условие ортогональности (4.9). Следовательно, оператор вложения $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактный, так как он представим в виде суммы оператора с малой нормой $O(R)$ (на множестве $\{x \in \Omega \cap \mathbb{B}_R\}$) и компактного (на множестве $\Omega \setminus \mathbb{B}_R$ с липшицевой границей).

5. Приближенное решение исходной спектральной задачи. Интегральное тождество [5], обслуживающее задачу (1.3), перепишем следующим образом:

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v)_{\Omega(\varepsilon)} + \varepsilon^{\gamma-1}(u^\varepsilon, v)_{\partial\Omega(\varepsilon)} = (\lambda^\varepsilon + \varepsilon^{\gamma-1})(u^\varepsilon, v)_{\partial\Omega(\varepsilon)}, \quad v \in H^1(\Omega(\varepsilon)). \quad (5.1)$$

Согласно предложению 4.1 левую часть тождества (5.1) можно взять в качестве скалярного произведения $\langle u^\varepsilon, v \rangle_\varepsilon$ в пространстве Соболева $H^1(\Omega(\varepsilon))$. Введем подпространство

$$\mathcal{H}^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega(\varepsilon)) : \text{выполнено условие ортогональности (4.9)}\}, \quad (5.2)$$

а также новый спектральный параметр

$$\Lambda^\varepsilon = (\lambda^\varepsilon + \varepsilon^{\gamma-1})^{-1} \quad (5.3)$$

и оператор $\mathcal{K}^\varepsilon$ на гильбертовом пространстве (5.2), заданный формулой

$$\langle \mathcal{K}^\varepsilon u^\varepsilon, v \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, v)_{\partial\Omega(\varepsilon)}, \quad u^\varepsilon, v \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (5.4)$$

При этом $\mathcal{K}^\varepsilon$ — компактный, неотрицательный и симметрический оператор, а его ядро совпадает с подпространством

$$\mathcal{H}_0^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega(\varepsilon)) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega(\varepsilon), \text{ выполнено условие (4.9)}\}. \quad (5.5)$$

Согласно классическим результатам теории операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [2]) спектр оператора (5.4) состоит из точки $\Lambda = 0$ с бесконечномерным собственным подпространством (5.5) и бесконечно малой последовательности нормальных положительных собственных чисел

$$\Lambda_1^\varepsilon \geq \Lambda_2^\varepsilon \geq \dots \geq \Lambda_k^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (5.6)$$

Поскольку в силу условия (1.5) собственные функции $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \dots$ задачи (1.3) ортогональны в $L_2(\partial\Omega(\varepsilon))$ собственной функции $u_0^\varepsilon = \text{const}$ и, значит, удовлетворяют требованию (4.9), при рассмотрении положительных собственных чисел можно сузить интегральное тождество (5.1) на подпространство (5.2). Согласно определениям (5.3) и (5.4) суженное тождество равносильно абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^\varepsilon u^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon u^\varepsilon \quad (5.7)$$

на факторпространстве $\mathcal{H}^\varepsilon / \mathcal{H}_0^\varepsilon$, т.е. собственные числа (5.6) связаны с положительными собственными числами (1.4) соотношением (5.3).

Очередное утверждение известно (см. [6] и, например, [2]).

ЛЕММА 5.1. Пусть $U^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon / \mathcal{H}_0^\varepsilon$ и $\Lambda^\varepsilon > 0$ таковы, что

$$\|U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{H}^\varepsilon U^\varepsilon - \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \delta < \Lambda^\varepsilon. \quad (5.8)$$

Тогда найдется собственное число Λ_q^ε из последовательности (5.6), для которого выполнена оценка

$$|\Lambda^\varepsilon - \Lambda_q^\varepsilon| \leq \delta. \quad (5.9)$$

Более того, при любом $\delta_* \in (\delta, \Lambda^\varepsilon)$ существуют коэффициенты α_j , обеспечивающие неравенство

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_j \alpha_j U_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2\delta_*^{-1} \delta, \quad (5.10)$$

причем U_j^ε – собственные векторы оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$, отвечающие его собственным числам $\Lambda_j^\varepsilon \in [\Lambda^\varepsilon - \delta_*, \Lambda^\varepsilon + \delta_*]$ и подчиненные условиям ортогональности и нормировки $\langle U_j^\varepsilon, U_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{j,k}$, а коэффициенты α_j удовлетворяют требованию $\sum |\alpha_j|^2 = 1$.

Приближения к собственному числу и вектору спектрального уравнения (5.7) возьмем такими:

$$\Lambda^\varepsilon = \varepsilon^{1-\gamma}(\mu_k + 1)^{-1}, \quad U^\varepsilon = \|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{u}_k^\varepsilon, \quad \mathbf{u}_k^\varepsilon(x) = \chi_d(x_n) w_k(\varepsilon^{-1} x_n) - \mathbf{c}_k^\varepsilon. \quad (5.11)$$

Здесь μ_k – собственное число и w_k – отвечающая ему собственная функция, указанные в предложении 4.1, а χ_d – срезающая функция, введенная после формулы (4.3). Наконец, вычитаемое $\mathbf{c}_k$, вычисленное по формуле

$$\mathbf{c}_k = \int_{\partial\Omega(\varepsilon)} \chi_d(x_n) w_k(\varepsilon^{-1} x_n) ds_x,$$

помещает функции $\mathbf{u}^\varepsilon$ и U^ε в пространство $\mathcal{H}^\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_k| &\leq c \left(\int_\varepsilon^d x_n^{(n-2)(1+\gamma)} |w_k(\varepsilon^{-1} x_n)| dx_n + w_k(1) \text{mes}_{n-1} \omega(\varepsilon) \right) \\ &\leq c \left(\varepsilon^{(n-2)(1+\gamma)+1} \int_1^\infty \zeta^{(n-2)(1+\gamma)} |w_k(\zeta)| d\zeta + \varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)} |w_k(1)| \right) \\ &\leq c_k \varepsilon^{(n-2)(1+\gamma)+1}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

так как интеграл по полубесконечному интервалу $(1, \infty)$ сходится в силу соотношения (3.7).

Нетрудно убедиться в том, что благодаря условиям нормировки (3.6) выполнено соотношение

$$\|\nabla_x \mathbf{u}_k^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \varepsilon^{\gamma-1} \|\mathbf{u}_k^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 = \|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq c \varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1}, \quad c > 0. \quad (5.13)$$

Вычислим величину δ из второго равенства (5.8). При учете формул (5.13) и (5.3), (3.5) находим

$$\begin{aligned}
 \delta &= \|\mathcal{H}^\varepsilon U^\varepsilon - \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \sup_{v \in \mathcal{H}^\varepsilon : \|v; \mathcal{H}^\varepsilon\|=1} |\langle \mathcal{H}^\varepsilon U^\varepsilon - \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon, v \rangle_\varepsilon| \\
 &= (\Lambda^\varepsilon \|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|)^{-1} \sup_{v \in \mathcal{H}^\varepsilon : \|v; \mathcal{H}^\varepsilon\|=1} |\langle \varepsilon^{\gamma-1}(\mu_k + 1) \mathcal{H}^\varepsilon \mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{u}_k^\varepsilon, v \rangle_\varepsilon| \\
 &\leq c\varepsilon^{-(n-1)(1+\gamma)/2} \varepsilon^{\gamma-1/2} \sup_{v \in \mathcal{H}^\varepsilon : \|v; \mathcal{H}^\varepsilon\|=1} |(\nabla_x \mathbf{u}_k^\varepsilon, \nabla_x v)_{\Omega(\varepsilon)} - \varepsilon^{\gamma-1} \mu_k (\mathbf{u}_k^\varepsilon, v)_{\partial\Omega(\varepsilon)}| \\
 &\leq c\varepsilon^{-((n-3)(1+\gamma)+3)/2} \sup_{v \in \mathcal{H}^\varepsilon : \|v; \mathcal{H}^\varepsilon\|=1} |(\Delta_x \mathbf{u}_k^\varepsilon, v)_{\Omega(\varepsilon)} - (\partial_n \mathbf{u}_k^\varepsilon - \varepsilon^{\gamma-1} \mu_k \mathbf{u}_k^\varepsilon, v)_{\partial\Omega(\varepsilon)}|,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

где в последних преобразованиях применена формула Грина.

Обозначим $S(\mathbf{u}^\varepsilon, v)$ модуль выражения под последним знаком $\sup$ в (5.14). При помощи оценок (5.12) и (4.2) выводим, что

$$|S(\mathbf{c}_k^\varepsilon, v)| \leq c\varepsilon^{\gamma-1} |\mathbf{c}_k^\varepsilon| \left(\int_{\partial\Omega(\varepsilon)} r^{1-\gamma} ds_x \right)^{1/2} \|r^{(\gamma-1)/2} v; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1}. \tag{5.15}$$

Положим

$$\bar{v}(x_n) = (\text{mes}_{n-1} \omega(x_n))^{-1} \int_{\omega(x_n)} v(x', x_n) dx', \quad \tilde{v}(x) = v(x) - \bar{v}(x_n). \tag{5.16}$$

Согласно неравенству Пуанкаре имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} x_n^{-2(1+\gamma)} |\tilde{v}(x)|^2 dx &\leq c \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} |\nabla_{x'} \tilde{v}(x)|^2 dx = c \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} |\nabla_{x'} v(x)|^2 dx \\
 &\leq c \|\nabla_x v; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c \|v; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 = c.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Соответствующее следовое неравенство проверяется по обычной схеме [5] и выглядит так:

$$\int_{\partial\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} x_n^{-1-\gamma} |\tilde{v}(x)|^2 ds_x \leq c \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} (|\nabla_x \tilde{v}(x)|^2 + (1+x_n)^{-2(1+\gamma)} |\tilde{v}(x)|^2) dx. \tag{5.18}$$

В силу (5.17) правая часть (5.18) не превосходит постоянной.

Используя указанные неравенства и принимая во внимание формулу (2.3) для производной вдоль нормали, а также формулу (3.7) для функции w_k , получаем, что

$$\begin{aligned}
 |S(\mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{c}_k^\varepsilon, \hat{v})| &\leq c \left(\int_\varepsilon^d x_n^{2(1+\gamma)} x_n^{(n-1)(1+\gamma)} \left| \frac{d^2}{dx_n^2} \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx_n \right. \\
 &\quad + \int_\varepsilon^d x_n^{1+\gamma} x_n^{(n-2)(1+\gamma)} \left(x_n^{2\gamma} \left| \frac{d}{dx_n} \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. \left. + \varepsilon^{2(\gamma-1)} \left| \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \right|^2 \right) dx_n \right)^{1/2} \\
 &\leq c_k (\varepsilon^{((n+1)(1+\gamma)-3)/2} + \varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1}).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Множители $x_n^{2(1+\gamma)}$, $x_n^{1+\gamma}$ и $x_n^{2\gamma}$ появились в средней части из-за применения формул (5.17), (5.18) и (2.3) соответственно. Интегралы обработаны в (5.19) следующим образом: сначала производные величины $\chi_d(x_n)w_k(\varepsilon^{-1}x_n)$ оценены при помощи соотношений (3.7), затем использована замена переменной $x_n \mapsto \zeta = \varepsilon^{-1}x_n$ и, наконец, проверено, что полученные интегралы по распространению на промежуток $(1, \infty) \ni \zeta$ остаются сходящимися. Отметим, что слагаемое с показателем $(n-1)(1+\gamma)-1$ степени параметра ε в мажоранте из правой части (5.19) порождено интегралами от самой функции w_k , а слагаемое с показателем $((n+1)(1+\gamma)-3)/2$ – интегралами от производных функции w_k .

Осталось рассмотреть выражение $S(\mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{c}_k^\varepsilon, \bar{v})$. Поскольку обе функции зависят только от переменной x_n , выполним интегрирование по переменным x' и при учете соотношений (2.3), (2.6) и (2.8) придем к равенству

$$\begin{aligned}
 |S(\mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{c}_k^\varepsilon, \bar{v})| &= \int_\varepsilon^d \bar{v}(x_n) \left(M_{n-1} \frac{d}{dx_n} x_n^{(n-1)(1+\gamma)} \frac{d}{dx_n} \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^{\gamma-1} M_{n-2} \mu_k \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \right) dx_n \\
 &\quad + \varepsilon^{\gamma-1} \mu_k \int_{\{x \in \partial\Omega(\varepsilon): \varepsilon < x_n < d\}} \bar{v}(x_n) \chi_d(x_n) w_k \left(\frac{x_n}{\varepsilon} \right) \left(D \left(\varepsilon, \frac{x'}{\varepsilon^{1+\gamma}}, \frac{x_n}{\varepsilon} \right) - 1 \right) ds_x \\
 &\quad + \int_{\omega(\varepsilon)} \bar{v}(\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{dw_k}{dx_n}(1) - \varepsilon^{\gamma-1} \mu_k w_k(1) \right) dx'. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

Если в первом интеграле S_1 прокоммутировать дифференциальный оператор со срезкой χ_d , то оставшееся выражение обратится в нуль, так как w_k и μ_k удовлетворяют уравнению (2.7). В силу граничного условия (2.9) производная исчезает из третьего интеграла S_3 в правой части (5.20). Второй интеграл S_2 содержит величину D , мало отличающуюся от единицы вблизи точки $\mathcal{O}$ (см. соотношения (2.4)). Таким образом, обращаясь к очевидным неравенствам

$$\begin{aligned}
 \int_\varepsilon^d x_n^{(n-1)(1+\gamma)-1} |\bar{v}(x_n)|^2 dx_n &\leq c \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} x_n^{-2} |v(x)|^2 dx, \\
 \varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1} |\bar{v}(\varepsilon)|^2 &\leq c \int_{\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}} (|\nabla_x v(x)|^2 + x_n^{-2} |v(x)|^2) dx
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

и вспоминая предложение 4.1, находим

$$|S_1| \leq c_k \varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1}, \quad |S_2| + |S_3| \leq c_k \varepsilon^{((n+1)(1+\gamma)-3)/2}. \tag{5.22}$$

Итак, собирая оценки (5.15), (5.19) и (5.22), выводим из формулы (5.14) соотношение

$$\delta \leq c_k \varepsilon^{-((n-3)(1+\gamma)+3)/2} (\varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)-1} + \varepsilon^{((n+1)(1+\gamma)-3)/2}) \leq c_k \varepsilon^{2\gamma-1}. \tag{5.23}$$

По лемме 5.1 существует собственное число $\Lambda_q^\varepsilon = (\lambda_q^\varepsilon + \varepsilon^{\gamma-1})^{-1}$, подчиненное условию (5.9), которое вместе с оценкой (5.23) означает, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_k$, где ε_k – малое положительное число, справедливо неравенство

$$|\varepsilon^{1-\gamma} \lambda_q^\varepsilon - \mu_k| \leq 2\delta \varepsilon^{\gamma-1} (1 + \mu_k)^2 \leq c_k \varepsilon^{3\gamma-2}. \tag{5.24}$$

6. Доказательство теоремы об асимптотике. Из соотношений (5.24) для $k = 1, \dots, k_0$ вытекает, что при любом k_0 и некотором $\varepsilon(k_0) > 0$ в случае $\varepsilon \in (0, \varepsilon(k_0))$ номер $q = q(k)$ собственного числа исходной задачи (1.3) не меньше, чем номер k собственного числа μ_k предельной задачи (2.7), (2.9). Отсюда, в частности, следуют неравенства

$$\lambda_j^\varepsilon \leq c_j \varepsilon^{\gamma-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Убедимся в том, что на самом деле $q = k$ в соотношении (5.24). Для этого понадобятся вспомогательные оценки.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\lambda_j^\varepsilon > 0$ – собственное число задачи (1.3) и u_j^ε – отвечающая ему собственная функция, нормированная условием (1.5). Тогда справедливо неравенство

$$\|\nabla_x(\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\| + \|r^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_j, \quad (6.2)$$

где c_j – величина, зависящая от номера j , но не от параметра $\varepsilon \in (0, 1]$, $\mathcal{R}_\varepsilon$ – непрерывная весовая функция, определенная формулой

$$\mathcal{R}_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1 + \varepsilon^{-1}x_n)^{\sigma/2} & \text{при } x \in \Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}, x_n < d, \\ (1 + \varepsilon^{-1}d)^{\sigma/2} & \text{в остальных точках } x \in \Omega(\varepsilon), \end{cases} \quad (6.3)$$

а σ – малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегральное тождество (5.1) с пробной функцией $v = u_j^\varepsilon$, а также неравенства (6.1) и (4.11) показывают, что

$$\|r^{-1}u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|r^{(\gamma-1)/2}u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c\|\nabla_x u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c_j \varepsilon^{\gamma-1}. \quad (6.4)$$

Подставим теперь в тождество (5.1) пробную функцию $v = \mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon \in H^1(\Omega(\varepsilon))$ и после несложных преобразований (несколько раз коммутируем дифференциальный оператор ∇_x с функцией $\mathcal{R}_\varepsilon$) получим равенство

$$\lambda_j^\varepsilon \|\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 = \|\nabla_x(\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 - \|u_j^\varepsilon \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2. \quad (6.5)$$

В силу соотношений (6.1), (6.4) и (6.3) левая часть (6.5) не превосходит постоянной c_j при условии $\sigma \in [0, \gamma - 1]$. Интегрируя по z неравенство Пуанкаре–Фридрихса на $(n-1)$ -мерном сечении пика

$$z^{-2} \int_{\omega(z)} |V(x', z)|^2 dx' \leq c \left(z^{2\gamma} \int_{\omega(z)} |\nabla_x V(x', z)|^2 dx' + z^{\gamma-1} \int_{\partial\omega(z)} |V(x', z)|^2 ds_x \right)$$

и применяя аналогичное неравенство в n -мерной области $\Omega(\varepsilon) \setminus \overline{\mathcal{U}}$, получаем, что

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} r^{-2} |V(x)|^2 dx \leq c \left(\int_{\Omega(\varepsilon)} r^{2\gamma} |\nabla_x V(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega(\varepsilon)} r^{\gamma-1} |V(x)|^2 ds_x \right). \quad (6.6)$$

Положим $V = \mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon$ в формуле (6.6) и заметим, что $r^{2\gamma} \leq c$ в $\Omega(\varepsilon)$, $r^{\gamma-1} \leq c$ на $\partial\Omega(\varepsilon)$ и

$$|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon(x)| \leq \sigma(2\varepsilon)^{-1} (1 + \varepsilon^{-1}x_n)^{(\sigma-2)/2} \leq \sigma(2r)^{-1} \mathcal{R}_\varepsilon(x). \quad (6.7)$$

Подчеркнем, что x_n и $r = |x|$ — эквивалентные бесконечно малые на множестве $\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}$ и в согласии с определением (6.3) левая часть (6.7) равна нулю на множестве $\Omega(\varepsilon) \setminus \mathcal{U}$. Таким образом,

$$\|u_j^\varepsilon \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U})\|^2 \leq c\sigma(\|\nabla_x(\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|r^{(\gamma-1)/2} \mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2).$$

Если $\sigma \leq \gamma-1$, то благодаря формулам (6.4) и (1.5) выполнены соотношения $\mathcal{R}_\varepsilon(x) \leq (1 + \varepsilon^{-1}x_n)^{(\gamma-1)/2}$ и

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c(\|u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 + \varepsilon^{1-\gamma} \|r^{(\gamma-1)/2} u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2) \leq c_j, \quad (6.8)$$

а значит, при малом $\sigma > 0$ равенство (6.5) влечет за собой соотношение

$$\|\nabla_x(\mathcal{R}_\varepsilon u_j^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c_j.$$

Оно вместе с формулами (6.6) и (6.8) обеспечивает искомую оценку (6.2). Лемма доказана.

Поскольку $\mathcal{R}_\varepsilon(x) \geq c\varepsilon^{-\sigma/4}$ при $x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}}$ (см. обозначение (4.1)), оценки (6.8), (6.2) и (6.4) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \|u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon) \setminus \partial\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| &\leq c\varepsilon^{(\gamma-1)/4}, \\ \|x_n^{-1} u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \setminus \Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| + \|\nabla_x u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \setminus \Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| &\leq c\varepsilon^{\sigma/4}. \end{aligned}$$

Иными словами, собственные функции u_j^ε с положительными номерами локализованы в основном на множестве $\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}}$; в частности, при малом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$ имеем

$$\|\chi_{1/2}^\varepsilon u_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon) \setminus \partial\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| \geq \frac{1}{2};$$

здесь $\chi_{1/2}^\varepsilon(x_n) = \chi(\varepsilon^{-1/2}x_n)$ при $x \in \Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}$ и $\chi_{1/2}^\varepsilon = 0$ вне множества $\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}$, а χ — та же срезающая функция, что и в определении (5.11). Построим по u_j^ε функции $\bar{u}_j^\varepsilon$ и $\tilde{u}_j^\varepsilon$ формулами (5.16). Применяя неравенства (5.17), (5.18) и (6.4), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-(1+\gamma)/4} \|\tilde{u}_j^\varepsilon; L_2((\partial\Pi)_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| &\leq c\|x_n^{-(1+\gamma)/2} \tilde{u}_j^\varepsilon; L_2((\partial\Pi)_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| \\ &\leq c\|\nabla_{x'} \tilde{u}_j^\varepsilon; L_2(\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| \leq c\|\nabla_x u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U})\| \leq c\varepsilon^{(\gamma-1)/2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким образом, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$ и малом $\varepsilon_j > 0$ выполнено соотношение

$$\|\chi_{1/2}^\varepsilon \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U})\| \geq \frac{1}{4}.$$

Введем функцию

$$(1, \infty) \ni \zeta \mapsto \mathbf{u}_j^\varepsilon = \varepsilon^{((n-2)(1+\gamma)+1)/2} M_{n-2}^{1/2} \chi(\varepsilon^{1/2}\zeta) \bar{u}_j^\varepsilon(\varepsilon\zeta).$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\|\zeta^{(n-2)(1+\gamma)} \mathbf{u}; L_2(1, \infty)\|^2 \\ &= M_{n-2} \int_\varepsilon^d x_n^{(n-2)(1+\gamma)} |\chi_{1/2}^\varepsilon(x_n) \bar{u}_j^\varepsilon(x_n)|^2 dx_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|\chi_{1/2}^\varepsilon \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{W})\|^2 \\
&\quad - c \left(\int_\varepsilon^d x_n^{(n-2)(1+\gamma)} x_n^{2\gamma} |\chi_{1/2}^\varepsilon(x_n) \bar{u}_j^\varepsilon(x_n)|^2 dx_n + M_{n-1} |\bar{u}_j^\varepsilon(\varepsilon)|^2 \right) \\
&\geq \frac{1}{4} - c \left(\varepsilon^\gamma + \varepsilon^1 \right) \geq \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Здесь применены неравенства (4.10) и (5.21). Кроме того, при учете оценок (6.8) и (6.9) находим

$$\begin{aligned}
&\|\zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \partial_\zeta \mathbf{u}; L_2(1, \infty)\|^2 \\
&\leq c \varepsilon^{1-\gamma} \int_\varepsilon^d x_n^{(n-1)(1+\gamma)} \left| \frac{d}{dx_n} \chi_{1/2}^\varepsilon(x_n) \bar{u}_j^\varepsilon(x_n) \right|^2 dx_n \\
&\leq c \varepsilon^{1-\gamma} \left(\left\| \frac{\partial \bar{u}_j^\varepsilon}{\partial x_n}; L_2(\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}}) \right\| + \|x_n^{-1} \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\Pi_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}})\| \right) \\
&\leq c \varepsilon^{1-\gamma} (\|\nabla_x u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|r^{-1} u_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \\
&\quad + \|\nabla_x \hat{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{W})\|^2 + \|r^{-1} \hat{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{W})\|^2) \leq c_j.
\end{aligned}$$

Таким образом, вдоль некоторой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_{jm}\}_{m=1}^\infty$ функции u_j^ε сходятся слабо в $\mathcal{H}$ и сильно в $\mathcal{L}$ к некоторому ненулевому элементу $\mathbf{u}_j^\infty$ пространства $\mathcal{H}$. Благодаря неравенству (6.1) можно считать, что $\varepsilon_{jm}^{1-\gamma} \lambda_j^{\varepsilon_{jm}} \rightarrow \lambda_j^\infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Подставим в интегральное тождество (5.1) пробную функцию $v(x) = \mathbf{v}(x_n)$, где $\mathbf{v} \in C_c^\infty[1, \infty)$ – гладкая функция с компактным носителем. Кроме того, примем во внимание разложение

$$u_j^\varepsilon = \varepsilon^{-((n-2)(1+\gamma)+1)/2} M_{n-2}^{-1/2} \mathbf{u}_j^\varepsilon + \tilde{u}_j^\varepsilon,$$

справедливое на носителе функции v , и отделим интегралы, содержащие $\mathbf{u}_j^\varepsilon$ и $\mathbf{v}$. Выполним в них интегрирование по переменным x' , перейдем к растянутой координате $\zeta = \varepsilon^{-1} x_n$ и умножим тождество на $\varepsilon^{-(n(1+\gamma)-3)/2} (\text{mes}_{n-2}(\partial\omega))^{1/2}$. В результате получаем равенство

$$\begin{aligned}
&M_{n-1} \int_1^\infty \zeta^{(n-1)(1+\gamma)} \partial_\zeta \mathbf{u}_j^\varepsilon(\zeta) \partial_\zeta \mathbf{v}(\zeta) d\zeta \\
&\quad - \varepsilon^{1-\gamma} \lambda_j^\varepsilon M_{n-2} \int_1^\infty \zeta^{(n-2)(1+\gamma)} \mathbf{u}_j^\varepsilon(\zeta) \mathbf{v}(\zeta) d\zeta = I_j^\varepsilon(\mathbf{v}),
\end{aligned} \tag{6.10}$$

причем, считая размер R подчиненным условию $\text{supp } \mathbf{v} \subset [0, R]$, имеем

$$\begin{aligned}
I_j^\varepsilon(\mathbf{v}) &= c_1 \lambda_j^\varepsilon \varepsilon^{-(n(1+\gamma)-3)/2} \int_{(\partial\Pi_\varepsilon^{R\varepsilon})} \hat{u}_j^\varepsilon(x) \mathbf{v}(\varepsilon^{-1} x_n) ds_x \\
&\quad + c_2 \lambda_j^\varepsilon \varepsilon^{-(n(1+\gamma)-3)/2} \int_{(\partial\Pi)_\varepsilon^{R\varepsilon}} (1 - D(1, x', x_n)^{-1}) \bar{u}_j^\varepsilon(x_n) \mathbf{v}(\varepsilon^{-1} x_n) ds_x \\
&\quad + c_3 \lambda_j^\varepsilon \varepsilon^{-(n(1+\gamma)-3)/2} \int_{\omega(\varepsilon)} u_j^\varepsilon(x', \varepsilon) \mathbf{v}(1) dx'.
\end{aligned}$$

Теперь при помощи соотношений (4.11), (6.9), (2.4), (5.21) и понятных формул

$$\text{mes}_{n-1}(\partial\Pi_\varepsilon^{R\varepsilon} \cap \partial\Omega) = O(\varepsilon^{(n-2)(1+\gamma)+1}), \quad \text{mes}_{n-1}(\omega(\varepsilon)) = O(\varepsilon^{(n-1)(1+\gamma)})$$

нетрудно убедиться в том, что $I_j^\varepsilon(v) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Следовательно, предельный переход в равенстве (6.10) дает интегральное тождество (3.4), в котором $w = u_j^\infty$ и $\mu = \lambda_j^\infty$. Иными словами, $u_j^\infty \neq 0$ – собственная функция и $\lambda_j^\infty = \lim \varepsilon^{1-\gamma} \lambda_j^\varepsilon$ – собственное число предельной задачи (2.7), (2.9). Из установленного факта и формулы (5.24) вытекают сходимости (1.7).

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любого $k = 1, 2, \dots$ найдутся такие положительные величины ε_k и c_k , C_k , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$ собственные числа (1.4) и (3.5) задач (1.3) и (2.7), (2.9) связаны неравенствами*

$$|\varepsilon^{1-\gamma} \lambda_k^\varepsilon - \mu_k| \leq c_k \varepsilon^{3\gamma-2}, \quad (6.11)$$

а соответствующие собственные функции u_k^ε и w_k , подчиненные условиям нормировки (1.5) и (3.6), удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} & \|u_k^\varepsilon - \chi w_k^\varepsilon; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\| \\ & + \varepsilon^{(1-\gamma)/2} (\|\nabla_x(u_k^\varepsilon - \chi w_k^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\| + \|r^{-1}(u_k^\varepsilon - \chi w_k^\varepsilon); L_2(\Omega(\varepsilon))\|) \\ & \leq C_k \varepsilon^{(5\gamma-3)/2}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $w_k^\varepsilon(x_n) = \varepsilon^{-((n-2)(1+\gamma)+1)/2} w_k(\varepsilon^{-1} x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось заметить, что оценка (6.12) обеспечена соотношением (5.10), в котором благодаря проверенной формуле (6.11) можно взять $\delta_* = \delta_k \varepsilon^{1-\gamma}$, где $\delta_k > 0$ – малая величина. Отметим, что левая часть (6.12) эквивалентна норме $\varepsilon^{(1-\gamma)/2} \|u_k^\varepsilon - \chi w_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|$. Различие показателей степеней ε в правых частях (5.13) и (6.12) вызвано изменением условий нормировки (ср. равенства (1.5) и (5.8)).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. 1) В плоском случае $n = 2$ предложение 4.1 сохраняет силу, однако при $\gamma \geq 2$ из-за расходимости интеграла от величины $x_n^{1-\gamma}$ по границе $\partial\Omega$ правые части неравенств (4.10) и (4.11) приобретают дополнительные множители $|\ln \varepsilon|^{1/2}$ при $\gamma = 2$ и $\varepsilon^{1-\gamma/2}$ при $\gamma > 2$. Можно убедиться в том, что такое ухудшение оценок тем не менее оставляет возможным оправдать найденную в п. 2 и п. 3 формальную асимптотику решения спектральной задачи (1.3). Иными словами, теорема 6.1 остается верной после изменения мажорант в неравенствах (6.11) и (6.12) по прежней схеме. Для того чтобы избежать излишнего загромождения изложения, автор исключил двумерный случай из работы. Впрочем, никаких изменений в доказательствах не нужно при условии $\gamma \in (1, 2)$, тем не менее, правые части неравенств (6.11) и (6.12) все-таки увеличиваются до $c_k \varepsilon^{(5\gamma-4)/2}$ и $C_k \varepsilon^{(4\gamma-3)/2}$ соответственно, так как при $n = 2$ первое слагаемое в скобках из формулы (5.23) превалирует над вторым (отметим, что $(n-1)(1+\gamma) - 1 \geq ((n+1)(1+\gamma) - 3)/2$ лишь в случае $n \geq 3$).

2) В книге [3; гл. 7] (см. также статьи [7], [8]) разработаны процедуры прямого и обратного сведений, позволяющие установить зависимость постоянных в неравенствах (6.11) и (6.12) от атрибутов предельного спектра (3.5). Эти процедуры требуют объемных выкладок и не реализованы в работе опять-таки для сокращения изложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.
- [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980.
- [3] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней*. Т. 1. *Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [4] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976.
- [5] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [6] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12:5** (1957), 3–122.
- [7] С. А. Назаров, “Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины”, *Проблемы математического анализа*, Вып. 25, Научная книга, Новосибирск, 2003, 99–188.
- [8] M. Lobo, S. A. Nazarov, E. Perez, “Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues”, *IMA J. Appl. Math.*, **70:3** (2005), 419–458.

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило

14.03.2007