Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Е. С. Панасенко, Функциональные неравенства и относительные емкости, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 216–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:41:34

УДК 517.518.235

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЕМКОСТИ

В. С. Климов, Е. С. Панасенко

В статье изучается функциональное неравенство вида

$$\|f; Q\| \leq C\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|),$$

где P, Q, R – банаховы идеальные пространства функций на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, константа C одинакова для всех финитных функций f , удовлетворяющих условию Липшица, ∇f – градиент функции f , φ – непрерывная однородная первой степени функция. Приводятся условия согласования норм в пространствах P, Q, R , при выполнении которых изучаемое неравенство эквивалентно неравенству изопериметрического типа, связывающему нормы индикаторов и относительные емкости компактных подмножеств области Ω .

Библиография: 20 названий.

В статье изучается функциональное неравенство вида

$$\|f; Q\| \leq C\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|), \quad (1)$$

где P, Q, R – банаховы идеальные пространства функций на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, константа C одинакова для всех финитных функций f , удовлетворяющих условию Липшица, ∇f – градиент функции f , φ – непрерывная однородная первой степени функция на первом квадранте $\mathbb{R}_+^2 = \{(\xi, \eta), \xi \geq 0, \eta \geq 0\}$, неубывающая по каждому аргументу. Приводятся условия согласования норм в пространствах P, Q, R , при выполнении которых функциональное неравенство (1) эквивалентно геометрическому неравенству, связывающему нормы индикаторов и относительные емкости компактных подмножеств области Ω . Наиболее обозримые результаты относятся к случаю, когда P, Q, R – симметричные пространства.

Для $Q = L_q(\Omega)$, $R = L_r(\Omega)$ аналогичные утверждения установлены в [1], [2]. В статье используются методы теории банаховых идеальных пространств и выпуклого анализа (см., например, работы [3]–[10] и приведенную там библиографию).

1. Пусть (Ω, μ) – измеримое пространство с полной σ -конечной непрерывной мерой μ ; $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово действительное пространство со скалярным произведением ab и нормой $|a| = \sqrt{aa}$, $a, b \in \mathbb{R}^m$, $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ – линейное метрическое пространство μ п.в. (почти всюду) конечных μ -измеримых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ полагаем $S(\Omega, \mathbb{R}^1) = S(\Omega)$; подобные сокращения используются и для других пространств скалярных функций.

Линейное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ называют [3], [7] *нормированным идеальным пространством* (НИП), если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(\Omega)$, $|\alpha(x)| \leq 1$ п.в. следует, что $\alpha y \in E$ и $\|\alpha y; E\| \leq \|y; E\|$. Если НИП E полно относительно нормы $\|\cdot; E\|$, то его называют *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Банахово пространство $\tau = \tau(\mathbb{Z})$ последовательностей $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, называют [4, с. 213] *симметричным*, если из условий $a = (a_i) \in \tau$, $|b_i| \leq |a_{\pi(i)}|$ ($i \in \mathbb{Z}$, π – биекция множества $\mathbb{Z}$) следует, что $b = (b_i) \in \tau$ и $\|b; \tau\| \leq \|a; \tau\|$. Через $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ далее обозначается пространство Орлича последовательностей $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, порожденное выпуклой четной непрерывной в нуле функцией $M: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ при $s > 0$, с нормой

$$\|a; \ell_M\| = \inf \left\{ k > 0: \sum_{i \in \mathbb{Z}} M\left(\frac{a_i}{k}\right) \leq 1 \right\}.$$

Пространство $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ симметрично.

Функциональную последовательность y_i из $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $i \in \mathbb{Z}$, назовем *дизъюнктной*, если $|y_i(x)| |y_j(x)| = 0$ п.в. при $i \neq j$. Пусть $\tau = \tau(\mathbb{Z})$ – симметричное пространство (СП) последовательностей. Банахово идеальное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ назовем τ -*супераддитивным* (τ -*субаддитивным*), если для каждой дизъюнктной последовательности $y_i \in E$, $i \in \mathbb{Z}$, имеет место оценка $\|y; E\| \geq \|a; \tau\|$ (соответственно $\|y; E\| \leq \|a; \tau\|$), где $a = (a_i)$, $a_i = \|y_i; E\|$, $i \in \mathbb{Z}$, $y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i$; при этом считается, что если $y \notin E$, то $\|y; E\| = \infty$, аналогичное соглашение относится и к $\|a; \tau\|$. Для БИП скалярных функций близкие понятия вводились многими авторами (соответствующие ссылки можно найти в [5], [6]). В данной работе используется терминология, принятая в [11], [12].

Среди СП τ , относительно которых БИП E τ -супераддитивно (τ -субаддитивно), имеется пространство $\tau_E(\sigma_E)$ с наибольшей (наименьшей) нормой:

$$\|a; \tau\| \leq \|a; \tau_E\|, \quad a \in \tau_E, \quad (\|a; \sigma_E\| \leq \|a; \tau\|, \quad a \in \tau)$$

соответственно. Пространство E τ -супераддитивно в том и только том случае, если $\tau_E \stackrel{1}{\subset} \tau$, т.е. τ_E нормально вложено в τ [4, с. 10]. Это замечание характеризует пространство τ_E , называемое *нижним* для пространства E . Аналогично, пространство E τ -субаддитивно, если и только если $\tau \stackrel{1}{\subset} \sigma_E$, пространство σ_E называют *верхним* для E . Оценки нижнего и верхнего пространств τ_E и σ_E можно найти в [6], [11].

Приведем ряд примеров. Обозначим через $\beta(\mathbb{R}^m)$ класс выпуклых [8]–[10] четных функций $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть $H = H(\Omega)$ есть БИП скалярных функций на Ω , носитель $\text{supp } H$ [3, с. 137] которого совпадает с Ω . Сопоставим H и функции ψ из $\beta(\mathbb{R}^m)$ совокупность функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ с конечной нормой

$$\|y; H^\psi\| = \inf \left\{ k > 0: \left\| \psi\left(\frac{y}{k}\right); H \right\| \leq 1 \right\}.$$

Если $H = L_1(\Omega)$ – пространство суммируемых по мере μ функций, то $H^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ обозначают символом $L^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и называют *пространством Орлича*; соответствующая норма $\|\cdot; L^\psi\|$ совпадает с нормой Люксембурга [3, с. 150], [8, с. 95], [9, с. 202].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^m)$; $M: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – выпуклая четная непрерывная в нуле функция, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ при $s > 0$, $\Phi(t\xi) \geq \Phi(\xi)M(t)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда пространство Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ℓ_M -супераддитивно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $H = H(\Omega)$ есть БИП, $\text{supp } H = \Omega$, $\psi \in \beta(\mathbb{R}^m)$, $M(t) = \sup\{\psi(t\xi)/\psi(\xi): \xi \neq 0\}$. Тогда пространство $H^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ℓ_M -субаддитивно.

Предложения 1, 2 установлены в [11], [12]. Они означают, что $\tau_{L^\Phi} \stackrel{1}{\subset} \ell_M$ (предложение 1), $\ell_M \stackrel{1}{\subset} \sigma_{H^\psi}$ (предложение 2). Как показывают результаты работы [6], даваемые предложениями 1, 2 оценки нижнего и верхнего пространств τ_{L^Φ} , σ_{H^ψ} не допускают существенного усиления, там же найдены τ_E , σ_E в случаях, когда E совпадает с пространством Лоренца (Марцинкевича).

Обозначим через $(\mathcal{L})$ совокупность непрерывных функций $\varphi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающих по каждому аргументу и однородных первой степени: $\varphi(k\xi, k\eta) = k\varphi(\xi, \eta)$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $k \geq 0$. Класс $(\mathcal{L})$ играет важную роль в теории интерполяции (см. [5], [13]–[15]). В этот класс входят, например, функции

$$\begin{aligned} \varphi_+(\xi, \eta) &= \xi + \eta, & \varphi_\delta(\xi, \eta) &= \xi^\delta \eta^{1-\delta}, & 0 < \delta < 1, \\ \varphi_M(\xi, \eta) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \eta = 0, \\ \eta M^{-1}\left(\frac{\xi}{\eta}\right), & \text{если } \eta \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ есть N -функция [8], M^{-1} – обратная к сужению M на $\mathbb{R}_+$ функция [13]–[15].

Пусть P, Q, R – идеальные пространства вектор-функций (не исключается случай, когда область определения и размерности соответствующих областей значений рассматриваемых вектор-функций различны), $\varphi \in (\mathcal{L})$. Скажем, что пара $\{P, R\}$ φ -мажорирует Q ($Q \prec_\varphi \{P, R\}$), если найдется такая постоянная $\kappa = \kappa(P, Q, R)$, что для любых последовательностей $u = (u_i) \in \tau_P$, $v = (v_i) \in \tau_R$ выполнено неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma_Q\| \leq \kappa \varphi(\|u; \tau_P\|, \|v; \tau_R\|), \quad (2)$$

где $\varphi(u, v) = (\varphi(u_i, v_i))$, $i \in \mathbb{Z}$, τ_P, τ_R (соответственно σ_Q) – нижние (соответственно верхнее) для P, R (соответственно для Q) СП последовательностей. В случае $\varphi(\xi, \eta) = \xi$ аналогичные понятия вводились в [6], [11], [12]. Насколько известно авторам, применительно к произвольным функциям φ класса $(\mathcal{L})$ это понятие ранее не использовалось.

Оценка (2) для $\varphi = \varphi_+$ равносильна непрерывности оператора вложения $\tau_P + \tau_R \subset \sigma_Q$, где $\tau_P + \tau_R$ – сумма пространств τ_P, τ_R , образующих банахову пару [4, с. 20]. Для $\varphi = \varphi_\delta$ оценка (2) равносильна непрерывности оператора вложения $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta} \subset \sigma_Q$; здесь $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta}$ – пространство средних Кальдерона [4], [5], [13]–[15]. Аналогичная интерпретация неравенства (2) возможна и в общем случае, необходимо лишь вместо конструкции Кальдерона использовать некоторые ее обобщения [14], [15].

Оценка (2) имеет место, если справедливо неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma\| \leq \kappa \varphi(\|u; \tau_1\|, \|v; \tau_0\|), \quad (3)$$

где σ, τ_1, τ_0 – СП, $\tau_P \stackrel{1}{\subset} \tau_1, \tau_R \stackrel{1}{\subset} \tau_0, \sigma \stackrel{1}{\subset} \sigma_Q$. Это замечание позволяет устанавливать соотношения $Q \prec_\varphi \{P, R\}$, располагая лишь оценками пространств τ_P, τ_R, τ_Q . Например, если $\tau_0 = \ell_{M_0}, \tau_1 = \ell_{M_1}, \sigma = \ell_M$ – пространства Орлича, порожденные функциями M_0, M_1, M соответственно, $\varphi = \varphi_\delta$, то (3) выполняется (с некоторой константой $\kappa > 0$), если $M^{-1}(t) \geq (M_1^{-1}(t))^\delta (M_0^{-1}(t))^{1-\delta}, 0 < t < \infty$.

2. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Используются обозначения: $\mathfrak{R}(\Omega)$ – совокупность компактных множеств области Ω , $\overset{0}{\text{Lip}}(\Omega)$ – пространство финитных функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Липшица. Пара множеств (K, Ω) , $K \in \mathfrak{R}(\Omega)$, называется *конденсатором*; если K – замкнутый шар, Ω – концентрический ему открытый шар, то пару (K, Ω) будем именовать *шаровым конденсатором*. Индикатор (характеристическая функция) множества $\mathcal{D}$ обозначается символом $1_{\mathcal{D}}$. Всюду далее P – БИП измеримых относительно n -мерной лебеговой меры mes_n функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Не оговаривая особо, всюду предполагаем, что $1_K a \in P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ для всех $K \in \mathfrak{R}(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Конденсатору (K, Ω) сопоставим множество функций

$$U(K, \Omega) = \{f \in \overset{0}{\text{Lip}}, \quad f(x) \geq 1 \text{ при } x \in K\}$$

и число $c_P(K, \Omega) = \inf\{\|\nabla f; P\|, f \in U(K, \Omega)\}$, называемое далее *P-емкостью* компакта K относительно области Ω , или, более кратко, *P-емкостью конденсатора* (K, Ω) . В случае $P = L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, аналогичные характеристики компактов использовались многими авторами [1], [2], [16]–[18].

Если (K_1, Ω_1) , (K_2, Ω_2) – два конденсатора и $K_1 \subset K_2 \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, то $U(K_2, \Omega_2) \subset U(K_1, \Omega_1)$, поэтому верно неравенство $c_P(K_1, \Omega_1) \leq c_P(K_2, \Omega_2)$, выражающее свойство монотонности относительно емкости. Достаточно общие свойства функционала $c_P(\cdot, \Omega): \mathfrak{R}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ установлены в [12]. В частности, если $P = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, то функционал $c_P(\cdot, \Omega)$ может быть продолжен с $\mathfrak{R}(\Omega)$ на систему всех подмножеств Ω так, что продолженный функционал является обобщенной емкостью [18, с. 71].

В этом пункте формулируются критерии справедливости функционального неравенства (1), где $Q = Q(\Omega)$, $R = R(\Omega)$ – БИП измеримых относительно счетно-аддитивных мер μ_Q, μ_R функций, заданных на борелевском кольце подмножеств Ω и конечных на всех компактах $K \subset \Omega$. Ниже $\nu_Q: S(\Omega) \rightarrow R$ – функционал, определяемый равенством $\nu_Q(f) = \sup\{t\|\chi_t; Q\|, t > 0\}$, в котором χ_t – индикатор лебегова множества $\{x \in \Omega, |f(x)| \geq t\}$ функции f . Функционал ν_Q положительно однороден, удовлетворяет неравенству 2-треугольника и подчинен норме $\|\cdot\|, Q\|$:

$$\nu_Q(\lambda f) = |\lambda| \nu_Q(f), \quad \nu_Q(f + g) \leq 2(\nu_Q(f) + \nu_Q(g)), \quad \nu_Q(f) \leq \|f; Q\|.$$

Ослабленный вариант (1), также изучаемый далее, есть неравенство вида

$$\nu_Q(f) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|). \quad (4)$$

Если $C(P, Q, R)$, $B(P, Q, R)$ – наименьшие из констант C , B , для которых имеет место (1) (соответственно (4)), то $B(P, Q, R) \leq C(P, Q, R)$. Оказывается, постоянные $C(P, Q, R)$, $B(P, Q, R)$ можно оценить через постоянную $A(P, Q, R)$, определяемую как минимальная из констант A , для которых имеет место оценка

$$\|1_K; Q\| \leq A\varphi(c_P(K, G), \|1_G; R\|), \quad (5)$$

A не зависит от пробного конденсатора (K, G) , $G \subset \Omega$. Если подобных констант A не существует, полагаем $A(P, Q, R) = \infty$; аналогичное замечание относится и к постоянным $C(P, Q, R)$, $B(P, Q, R)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in (\mathcal{L})$. Тогда неравенство (4) справедливо в том и только том случае, если $A(P, Q, R) < \infty$; при этом $A(P, Q, R) \leq B(P, Q, R) \leq 2A(P, Q, R)$, следовательно, функциональное неравенство (4) эквивалентно геометрическому неравенству (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место неравенство (4). Фиксируем пробный конденсатор (K, G) , $G \subset \Omega$, и положим $V(K, G) = \{f \in U(K, G), 0 \leq f(x) \leq 1\}$. Так как $V(K, G) \subset U(K, G)$, то $\inf\{\|\nabla f; P\| : f \in V(K, G)\} \geq c_P(K, G)$. С другой стороны, если $f \in U(K, G)$, то $f_1 = \min\{|f|, 1\} \in V(K, G)$ и $\|\nabla f_1; P\| \leq \|\nabla f; P\|$. Следовательно, $\inf\{\|\nabla f; P\| : f \in V(K, G)\} = c_P(K, G)$.

Для любой функции f из $V(K, G)$ справедливы неравенства $\|1_K; Q\| \leq \nu_Q(f)$, $\|f; R\| \leq \|1_G; R\|$. Поэтому из (4) вытекает оценка

$$\|1_K; Q\| \leq \nu_Q(f) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|) \leq B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|1_G; R\|).$$

Минимизируя правую часть по всем функциям класса $V(K, G)$, приходим к оценке $\|1_K; Q\| \leq B\varphi(c_P(K, G), \|1_G; R\|)$ для произвольного конденсатора (K, G) . Тем самым доказаны неравенство (5) и оценка $A(P, Q, R) \leq B(P, Q, R)$.

Предположим теперь, что $A(P, Q, R) \leq \infty$. Фиксируем функцию f из $\overset{0}{\text{Lip}}(\Omega)$, число $t > 0$ и положим $K = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq t\}$, $G = \{x \in \Omega : |f(x)| > t/2\}$. Применяя к конденсатору (K, G) оценку (5) и используя очевидное неравенство $\|1_G; R\| \leq 2\|f; R\|/t$, получаем $\|1_K; Q\| \leq A\varphi(c_P(K, G), 2\|f; R\|/t)$. Функция $f_0(x) = (|f(x)| - t_1)_+/(t - t_1)$ ($t/2 < t_1 < t$) принадлежит $U(K, G)$, следовательно, $c_P(K, G) \leq \|\nabla f_0; P\| \leq \|\nabla f; P\|/(t - t_1)$. Объединяя установленные оценки, получаем

$$\|1_K; Q\| \leq A\varphi\left(\frac{1}{t - t_1}\|\nabla f; P\|, \frac{2}{t}\|f; R\|\right).$$

Последнее неравенство при $t_1 \rightarrow t/2$ влечет (4) и оценку $B(P, Q, R) \leq 2A(P, Q, R)$. Теорема доказана.

В ряде случаев из неравенства (4) вытекает его сильный аналог – неравенство (1). Это заведомо так, если функционал ν_Q эквивалентен норме $\|\cdot; Q\|$. Данное требование выполняется для некоторых пространств [4, с. 156], однако в общем случае оно слишком ограничительно. Поэтому представляют интерес другие условия эквивалентности неравенств (1), (4), (5).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in (\mathcal{L})$ и $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. Тогда неравенство (1) имеет место в том и только том случае, если $A(P, Q, R) < \infty$; при этом

$$A(P, Q, R) \leq C(P, Q, R) \leq 8\kappa(P, Q, R)A(P, Q, R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить оценку $C(P, Q, R)$ сверху. Пусть $f \in \overset{0}{\text{Lip}}(\Omega)$, $K_i = \{x : |f(x)| \geq 2^i\}$, $G_i = \{x : |f(x)| > 2^{i-1}\}$, $D_i = K_i \setminus K_{i+1}$, $u_i = \|1_{D_{i-1}} \nabla f; P\|$, $v_i = \|1_{D_i} f; R\|$, $t_+ = \max\{0, t\}$, $\alpha(t) = \min\{1, t_+\}$.

Если $K_i \neq \emptyset$, то функция $f_i(x) = \alpha(2^{1-i}(|f(x)| - 2^{i-1}))$ принадлежит $U(K_i, G_i)$, поэтому

$$c_P(K_i, G_i) \leq \|\nabla f_i; P\| \leq 2^{1-i}\|1_{D_{i-1}} \nabla f; P\| = 2^{1-i}u_i. \quad (6)$$

Так как $G_i \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{i-1+j}$, то

$$\|1_{G_i}; R\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|1_{D_{i-1+j}}; R\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{1-i-j} v_{i+j-1}. \quad (7)$$

Объединяя (6), (7) с оценками

$$w_i \leq 2^{i+1} \|1_{K_i}; Q\|, \quad \|1_{K_i}; Q\| \leq A\varphi(c_P(K_i, G_i), \|1_{G_i}; R\|),$$

приходим к неравенству

$$w_i \leq 4A\varphi\left(u_i, \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1}\right), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Используя определение пространств τ_P, τ_R , получаем

$$\begin{aligned} \|(u_i); \tau_P\| &\leq \|\nabla f; P\|, \\ \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1} \right); \tau_R \right\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \|(v_{i+j-1}); \tau_R\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \|f; R\| = 2\|f; R\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Из σ_Q -субаддитивности пространства Q следует неравенство $\|f; Q\| \leq \|(w_i); \sigma_Q\|$, комбинировав которое с (9), (8) и (3), приходим к оценке

$$\|f; Q\| \leq 4A\kappa\varphi(\|\nabla f; P\|, 2\|f; R\|) \leq 8A\kappa\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|),$$

показывающей, что $C(P, Q, P) \leq 8\kappa(P, Q, R)A(P, Q, R)$. Теорема доказана.

Теорема 2 означает, что при условии $Q \prec \{P, R\}$ константа $C(P, Q, R)$ в функциональном неравенстве (1) имеет тот же порядок, что и постоянная $A(P, Q, R)$ в геометрическом неравенстве (5). Другим следствием теоремы является равносильность неравенств (1), (4).

Обозначим через $A_0(P, Q, R)$ наименьшую из постоянных A_0 , для которых имеет место оценка

$$\|1_K; Q\| \leq A_0\varphi(c_P(K, \Omega), \|1_K; R\|), \quad (10)$$

A_0 не зависит от K из $\mathfrak{R}(\Omega)$. Так как $c_P(K, G) \geq c_P(K, \Omega)$, $\|1_G; R\| \geq \|1_K; R\|$ для любого конденсатора (K, G) , $G \subset \Omega$, то $A(P, Q, R) \leq A_0(P, Q, R)$. Поэтому оценка (10) влечет оценку (5), однако обратная импликация не всегда верна; обсуждение этого вопроса для пространств Лебега можно найти в [2, с. 111]. В общем случае (10) можно рассматривать как достаточное условие для более трудно проверяемого неравенства (5).

В случае $\varphi = \varphi_+$ теорема 2 приводит к функциональному неравенству типа теоремы вложения

$$\|f; Q\| \leq C(\|\nabla f; P\| + \|f; R\|).$$

При $\varphi = \varphi_0$ из теоремы 2 вытекает критерий справедливости мультипликативного неравенства

$$\|f; Q\| \leq C\|\nabla f; P\|^\delta \|f; R\|^{1-\delta}.$$

Для БИП P, Q, R , существенным образом отличающихся от пространств Лебега, естественно рассмотрение функций φ достаточно общего вида. Требование мажорантности $Q \prec \{P, R\}$ может быть ослаблено [1], [2, с. 107], [11]. В явном виде аналоги теоремы 2 ранее не отмечались.

3. Наиболее просто оценки величины $A(P, Q, R)$ устанавливаются в случае симметричных пространств P, Q, R . Напомним, что БИП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ называют *симметричным*, если из равноизмеримости отображений $y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ относительно n -мерной лебеговой меры mes_n и включения $y \in E$ следует, что $z \in E$ и $\|z; E\| = \|y; E\|$. Каждому СП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ можно сопоставить СП вектор-функций $E(I, \mathbb{R}^m)$ на интервале $I = (0, \mu_0)$, где $\mu_0 = \text{mes}_n \Omega$. Пространство $E(I, \mathbb{R}^m)$ определяют как совокупность измеримых относительно mes_1 отображений $u: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, равноизмеримых с функциями y из $E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ в том смысле, что для любого измеримого по Борелю множества $\mathfrak{J} \in \mathbb{R}^m$ имеем $\text{mes}_n\{x \in \Omega, y(x) \in \mathfrak{J}\} = \text{mes}_1\{t \in I, u(t) \in \mathfrak{J}\}$, норма в $E(I, \mathbb{R}^m)$ определяется равенством $\|u; E(I, \mathbb{R}^m)\| = \|y; E(\Omega, \mathbb{R}^m)\|$, где $y \in E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и вектор-функции y, u равноизмеримы. При $m = 1$ СП введены Е. М. Семеновым, далее они будут называться скалярными СП. Случай $m > 1$ рассматривался многими авторами. Основное внимание при этом уделялось изотропным СП, норма в которых может быть определена равенством $\|y; E\| = \||y|; F\|$, где F – скалярное СП, $|y|$ – евклидова норма y в пространстве $\mathbb{R}^m$. Более общий случай возникает, если E есть прямое произведение скалярных СП E_i ($i = 1, \dots, m$), а норма в $E = E_1 \times \dots \times E_m$ определяется равенством $\|y; E\| = \max_i \|y_i; E_i\|$, где y_i – компоненты вектор-функции y в некотором базисе $\mathbb{R}^m$. Пространства Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ являются симметричными; в общем случае они анизотропны и не сводятся к прямому произведению скалярных СП. Симметричное пространство E называют *совершенным*, если единичный шар $\{y: \|y; E\| \leq 1\}$ пространства E замкнут относительно сходимости по мере. Пространства $L_p, 1 \leq p < \infty$, а также пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича являются совершенными [4].

Набору $E_1, \dots, E_m$ скалярных СП можно сопоставить пространство средних Кальдерона $\tilde{E} = \sqrt[m]{E_1 \cdots E_m}$. Напомним, что $\tilde{E}$ состоит из тех измеримых функций z , для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|z; \tilde{E}\| = \inf\{k > 0: |z| \leq k \sqrt[m]{z_1 \cdots z_m}, \|z_i; E_i\| \leq 1, i = 1, \dots, m\}.$$

Как известно, $\tilde{E}$ есть СП. Если $E_1, \dots, E_m$ – совершенные СП, то $\tilde{E}$ – также совершенное СП.

В этом пункте $Q = Q(\Omega), R = R(\Omega)$ – скалярные СП функций на $\Omega, P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ – СП вектор-функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$; мера и измеримость понимаются в смысле Лебега, $\mu_0 = \text{mes}_n \Omega$. В работе [19] установлена оценка

$$\|\nabla f; P\| \geq \left\| \frac{df}{ds} \lambda; P^0 \right\|, \quad (11)$$

где $f \in \text{Lip}(\Omega)$, f – перестановка функции $|f|$ в убывающем порядке [4, с. 211], $\lambda(s) = nv_n^{1/n} s^{1-1/n}$, $0 < s < \mu_0, v_n = \text{mes}_n\{\xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1\}$, P^0 – некоторое СП функций на $I = (0, \mu_0)$.

Опишем способ определения P^0 в достаточно характерных случаях. Если P – изотропное совершенное СП и $\|y; P\| = \||y|; F\|$, то $P^0 = F(I)$ и по составу элементов, и по норме. Если $P = P_1 \times \dots \times P_n$ – прямое произведение n совершенных СП P_i ($i = 1, \dots, n$), то $P^0 = \tilde{P}(I)$, где $\tilde{E} = \sqrt[n]{P_1 \cdots P_n}$ – пространство средних Кальдерона, при этом $\|\cdot; P^0\| = 2^{-1} v_n^{1/n} \|\cdot; \tilde{P}(I)\|$. Наконец, если P есть пространство Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то P^0 изоморфно пространству Орлича $L^{\Phi^0}(I)$, где Φ^0 – выпуклая четная функция одного переменного, называемая *округлением* Φ и характеризующаяся условием

$$\text{mes}_n\{\xi: \Phi(\xi) \leq h\} = \text{mes}_n\{\xi: \Phi^0(|\xi|) \leq h\}$$

при любом $h \geq 0$. Способ конструирования P^0 , применимый к любому СП $P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, изложен в [19]. Всюду далее оценка (11) предполагается выполненной.

ЛЕММА 1. Пусть (K, G) – конденсатор, $\text{mes}_n K = t$, $\text{mes}_n G = T$. Пусть $P^{0'}$ – двойственное к пространству $P^0 = P^0(G)$, $P^{0'}(t, T)$ – его сужение на (t, T) . Тогда

$$c_P(K, G) \geq \left\| \frac{1}{\lambda}; P^{0'}(t, T) \right\|^{-1}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на оценке (11). Оно ничем не отличается от доказательства леммы 7 работы [12], поэтому опускается.

ЛЕММА 2. Пусть P – изотропное СП и $\|y; P\| = \| |y|; P^0(\Omega) \|$, (K, G) – шаровой конденсатор, $\text{mes}_n K = t$, $\text{mes}_n G = T$. Тогда

$$c_P(K, G) \geq \left\| \frac{1}{\lambda}; P^{0'}(t, T) \right\|^{-1}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал $\Lambda: P^0(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый равенством

$$\Lambda(z) = \int_t^T \frac{z(s)}{\lambda(s)} ds,$$

непрерывен на $P^0(0, T)$ и его норма $\|\Lambda\| = \|1/\lambda; P^{0'}(t, T)\|$. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую неотрицательную непрерывную на I функцию z_ε , что $\text{supp } z_\varepsilon \subset (t, T)$, $\Lambda(z_\varepsilon) = 1$ и $\|z_\varepsilon; P^0\| < 1/\|\lambda\| + \varepsilon$.

Положим

$$h(w) = \int_w^T \frac{z_\varepsilon(s)}{\lambda(s)} ds, \quad 0 \leq w < T, \quad f(x) = h(v_n |x|^n), \quad x \in G.$$

Как нетрудно проверить [20], $f(w) = h(w)$, $0 \leq w < T$, $f \in U(K, G)$ и $\|\nabla f; P\| = \|z_\varepsilon; P^0\|$. Следовательно,

$$c_P(K, G) \leq \|\nabla f; P\| = \|z_\varepsilon; P^0\| < \frac{1}{\|\lambda\|} + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к формуле (13). Лемма доказана.

Для изотропного СП P неравенство (12) выражает свойство минимальности шарового конденсатора. В случае $P = L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ такого рода оценки хорошо известны [2, с. 96], [16, с. 206].

Обозначим через ψ_Q , ψ_R фундаментальные функции СП Q , R [4, с. 137]. Положим $\gamma_{P^0}(t, T) = \|1/\lambda; P^{0'}(t, T)\|^{-1}$. Если (K, G) – шаровой конденсатор, то $\|1_K; Q\| = \psi_Q(t)$, $\|1_G; R\| = \psi_R(T)$ ($t = \text{mes}_n K$, $T = \text{mes}_n G$), для изотропного СП P $c_P(K, G) = \gamma_{P^0}(t, T)$. Функция γ_{P^0} определена на треугольнике $0 < t < T < \mu_0$, непрерывна по совокупности переменных, не убывает по t и не возрастает по T .

Пусть P , Q , R таковы, что

$$\psi_Q(t) \leq \Gamma \varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(T)), \quad 0 < t < T < \mu_0, \quad (14)$$

постоянная Γ не зависит от t, T . Наименьшая из подобных постоянных Γ , обозначаемая символом $\Gamma(P, Q, R)$, оценивает сверху введенную в п. 2 постоянную $A(P, Q, R)$.

ЛЕММА 3. 1) Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ меры μ_0 справедлива оценка $A(P, Q, R) \leq \Gamma(P, Q, R)$.

2) Если Ω – шар в пространстве $\mathbb{R}^n$, P – изотропное СП, то $A(P, Q, R) = \Gamma(P, Q, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое и второе утверждения леммы вытекают из лемм 1, 2 соответственно. Лемма доказана.

Следовательно, конечность $\Gamma(P, Q, R)$ достаточна для равномерной по всем областям Ω меры μ_0 ограниченности постоянных $A(P, Q, R)$. В случае изотропного СП P условие $\Gamma(P, Q, R) < \infty$ и необходимо для ограниченности $A(P, Q, R)$. В соединении с теоремами 1, 2 это позволяет формулировать обозримые критерии справедливости функциональных неравенств (1), (4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in (\mathcal{L})$. Тогда

- 1) если $Q \prec \{P, R\}$ и $\Gamma(P, Q, R) < \infty$, то для любой области Ω меры t верна оценка (1) с постоянной $s \leq 8\kappa(P, Q, R)\Gamma(P, Q, R)$;
- 2) если Ω – шар меры t , P – изотропное СП и справедлива оценка (4), то $\Gamma(P, Q, R) \leq B(P, Q, R)$.

Теорема 3 следует из теорем 1, 2 и леммы 3.

Так как $\gamma_{P^0}(t, T) \geq \gamma_{P^0}(t, \mu_0)$, $\psi_R(T) \geq \psi_R(t)$, $0 < t < T < \mu_0$, то для выполнения (14) достаточно, чтобы имела место оценка

$$\psi_Q(t) \leq \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, \mu_0), \psi_R(t)), \quad 0 < t < \mu_0. \quad (15)$$

Если $\Gamma_0(P, Q, R)$ – наименьшая из констант Γ в неравенстве (15), то $\Gamma(P, Q, R) \leq \Gamma_0(P, Q, R)$.

В некоторых случаях постоянную $\Gamma_0(P, Q, R)$ можно оценить сверху через постоянную $\Gamma(P, Q, R)$. Например, это так, если найдутся такие числа $k > 1$, $k_0 < \infty$, что

$$\gamma_{P^0}(t, kt) \leq k_0\gamma_{P^0}(t, \mu_0), \quad kt < \mu_0. \quad (16)$$

Действительно, если $\mu_0 \leq kt$, то из неравенства $t < T < \mu_0$ следует, что

$$\varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(T)) \leq \varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(kt)) \leq k\varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(t)),$$

поэтому (14) влечет оценку $\psi_Q(t) \leq k\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(t))$. Устремляя T к μ_0 , приходим к неравенству

$$\psi_Q(t) \leq k\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, \mu_0), \psi_R(t)).$$

Если $0 < kt < \mu_0$, то, применяя (14), (16), получаем

$$\begin{aligned} \psi_Q(t) &\leq \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, kt), \psi_R(kt)) \leq \Gamma\varphi(k_0\gamma_{P^0}(t, \mu_0); k\psi_R(t)) \\ &\leq \max(k, k_0)\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, \mu_0), \psi_R(t)). \end{aligned}$$

Два последних неравенства означают, что (16) влечет оценку

$$\Gamma_0(P, Q, R) \leq \max(k, k_0)\Gamma(P, Q, R).$$

Укажем обозримое условие, гарантирующее неравенство (16). Пусть $\rho(k)$ – норма оператора растяжения $z \rightarrow z(\cdot/k)$ в пространстве $P^{0'}(I)$, $\gamma_0(t, T) = \|1/\lambda; P^{0'}(t, T)\|$. Применяя неравенство $\|z(\cdot/k); P^{0'}\| \leq \rho(k)\|z; P^{0'}\|$ к функции $z(s) = 1_{[t, T]}(s)/\lambda$, приходим к оценке

$$\gamma_0(kt, kT) \leq \rho(k)k^{1/n-1}\gamma_0(t, T).$$

Если при некотором $k > 1$

$$\varepsilon = \rho(k)k^{1/n-1} < 1, \quad (17)$$

то

$$\gamma_0(t, \mu_0) \leq \sum_{i \geq 0} \gamma_0(k^i t, k^{i+1} t) \leq \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \gamma_0(t, kt) = \frac{1}{1-\varepsilon} \gamma_0(t, kt).$$

Поскольку $\gamma_0(t, T) \cdot \gamma_{P^0}(t, T) = 1$, то имеет место (16) с $k_0 = (1-\varepsilon)^{-1}$. Условие (17) равносильно требованию $\beta(P^{0'}) < 1-1/n$, где $\beta(P^{0'})$ – верхний показатель растяжения пространства $P^{0'}(I)$ [4, с. 134].

Рассмотрим функциональное неравенство

$$\|f; L_\infty\| \leq C\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|), \quad (18)$$

представляющее относящийся к случаю $Q = L_\infty(\Omega)$ вариант неравенства (1). Очевидно, что $\psi_Q(t) = 1$ при $t > 0$, поэтому (14) равносильно неравенству

$$1 \leq \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(T)), \quad 0 < t < T < \mu_0.$$

Устремляя t к 0, приходим к соотношению

$$1 \leq \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(+0, T), \psi_R(T)).$$

Конечность $\Gamma(P, L_\infty, R)$ эквивалентна неравенству

$$\varphi(\gamma_{P^0}(+0, T), \psi_R(T)) \geq k_0, \quad 0 < T < \mu_0, \quad (19)$$

с некоторой постоянной $k_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Если имеет место неравенство (19) с $k_0 > 0$, то для любой области Ω меры μ_0 верна оценка (18) с постоянной C , зависящей лишь от k_0 .

2) Если Ω – открытый шар в $\mathbb{R}^n$, P – изотропное СП и справедлива оценка (18), то выполнено неравенство (19) с $k_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma(L_\infty) = \ell_\infty$, то $L_\infty \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. Как показано выше, конечность $\Gamma(P, L_\infty, R)$ эквивалентна неравенству (19). Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.

Отметим элементы новизны работы:

- 1) введены условия согласования норм в трех идеальных пространствах;
- 2) установлена эквивалентность обобщенных мультипликативных неравенств, связывающих нормы функции и ее градиента в различных пространствах, и геометрических неравенств изопериметрического типа;
- 3) для симметричных пространств даны широкие достаточные (а иногда необходимые и достаточные) условия справедливости функциональных неравенств, аналогичных теоремам вложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазья В.Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы матем. анализа. Вып. 3. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. С. 33–68.
- [2] Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [3] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [5] Брудный Ю.А., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–163.
- [6] Бережной Е.И. Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Тр. МИАН. 1993. Т. 204. С. 3–36.
- [7] Забрейко П.П. Идеальные пространства вектор-функций // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 4. С. 298–301.
- [8] Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [9] Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985.
- [10] Рокафеллар Р.Г. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [11] Климов В.С. Емкости множеств и теоремы вложения для идеальных пространств // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 5. С. 588–589.
- [12] Климов В.С. Функциональные неравенства и обобщенные емкости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 41–54.
- [13] Кальдерон А.П. Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод // Математика (сб. переводов). Т. 9. № 3, 1965. С. 56–129.
- [14] Дмитриев В.И., Крейн С.Г., Овчинников В.И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль: Изд-во Ярославского ун-та, 1977. С. 31–74.
- [15] Лозановский Г.Я. Преобразование банаховых идеальных пространств с помощью выпуклых функций // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. № 3. Ярославль: Изд-во Ярославского ун-та, 1978. С. 122–148.
- [16] Поляа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Мир, 1962.
- [17] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
- [18] Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
- [19] Климов В.С. Теоремы вложения и геометрические неравенства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 3. С. 645–671.
- [20] Климов В.С. О перестановках дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 6. С. 629–638.

(В.С. Климов) Ярославский государственный университет
(Е.С. Панасенко) Орловский государственный университет

Поступило
02.03.1998