Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:19:58

Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения

А. В. Арутюнов

В статье рассматривается вопрос о неотрицательности квадратичной формы на пересечении набора квадратичных конусов. Ответ дан в терминах множителей Лагранжа рассматриваемых квадратичных форм.

Библиография: 10 названий.

Введение. В этой работе, являющейся естественным продолжением статьи [1], исследуются условия неотрицательности квадратичной формы на пересечении квадрик, а также некоторые связанные с этим свойства квадратичных отображений. А именно, пусть даны $k+1$ квадратных симметричных $(n \times n)$ -матриц Q_i , $i = 0, \dots, k$, определяющих на $\mathbb{R}^n$ квадратичные формы q_i : $q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$, где угловые скобки обозначают скалярное произведение. Требуется получить условия, при которых

$$q_0(x) \geq 0 \quad \forall x: \quad q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

или, иными словами, когда форма q_0 неотрицательно определена на конусе

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad x \neq 0\}$$

(n, k – заданные натуральные числа). Эта задача представляет интерес как сама по себе, так и ее применение к теории аномальных экстремальных задач [2] и к некоторым прикладным задачам (библиографию см. в [1], [3]–[5]).

Очевидно, что (1) равносильно тому, что в задаче минимизации

$$q_0(x) \rightarrow \min, \quad q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

точка $x_0 = 0$ является локальным минимумом. Однако эта точка аномальна (см. [2]). Чтобы применить к ней необходимые условия второго порядка для аномальных задач введем нужные обозначения (см. [2]).

Для целого $r \geq 0$ через Λ_r обозначим множество $(k+1)$ -мерных векторов

$$\lambda = (\lambda^0, y^*), \quad \lambda^0 \geq 0, \quad y^* = (y^{*1}, \dots, y^{*k}) \in \mathbb{R}^k, \quad |\lambda| = 1,$$

для каждого из которых существует такое линейное подпространство $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$, что

$$\text{codim } \Pi \leq r, \quad \lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi,^1$$

¹Существование подпространства Π означает, что $\text{ind}(\lambda^0 q_0 + y^* Q) \leq r$. Здесь и ниже ind обозначает (отрицательный) индекс квадратичной формы. Кроме того, пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^k$, отождествляется с ним самим, а его элементы y^* – с векторами из $\mathbb{R}^k$.

где $Q = (q_1, \dots, q_k)$ – квадратичное отображение, действующее из $X = \mathbb{R}^n$ в $Y = \mathbb{R}^k$, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие k -мерный вектор

$$Q(x) = (q_1(x), \dots, q_k(x)) \in Y,$$

и

$$y^*Q = \sum_{i=1}^k y^{*i}Q_i, \quad y^*Q(x) = \sum_{i=1}^k y^{*i}q_i(x).$$

Из результатов [2], [6] вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть форма q_0 неотрицательно определена на конусе K . Тогда множество Λ_{k-1} непусто и

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} (\lambda^0 q_0(x) + y^*Q(x)) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (2)$$

Однако среди векторов λ , принадлежащих множеству Λ_{k-1} , могут оказаться и те, для которых $\lambda^0 = 0$. А это приводит к тому, что условия (2) перестают зависеть от формы q_0 , что может сделать их неинформативными. Так обязательно произойдет, если $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ – выпуклая оболочка множества Λ_{k-1} – содержит нуль, так как в этом случае, очевидно, (2) выполняется автоматически. Вот соответствующий пример: $k = 2$, $q_1(x) = x_1x_2$, а формы q_0 и q_2 произвольны. Очевидно, Λ_1 содержит отрезок $(0, \lambda_1, 0)$, $|\lambda_1| \leq 1$, и, значит, (2) выполняется для любых q_0, q_2 и, в частности, для тех, для которых (1) нарушается (например, для $q_0(x) = -|x|^2$, $q_2 = 0$).

Наша цель – найти условия, гарантирующие, что если форма q_0 неотрицательна на K , то в (2) можно ограничиться лишь теми λ , для которых $\lambda^0 > 0$. Следующий очевидный пример показывает, что без дополнительных условий это не так и, более того, может оказаться, что $\lambda^0 = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_{k-1}$. Действительно, пусть $k = 1$, $n = 2$, $q_0(x) = x_1x_2$, $q_1(x) = x_1^2$. Очевидно, $q_0(x) = 0$ для любого x такого, что $q_1(x) = 0$, однако $\lambda^0 = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_0$.

В [1] было доказано, что если форма q_0 строго положительно определена на конусе K , то в (2) можно ограничиться лишь теми λ , для которых $\lambda^0 > 0$. Точнее, из доказательства теоремы 1 из [1] и замечания 1 к ней вытекает следующее утверждение. Для $\varepsilon > 0$ и целого $r \geq 0$ положим

$$\Lambda_r^\varepsilon = \{\lambda \in \Lambda_r : \lambda^0 \geq \varepsilon\}.$$

Через $\Lambda_r^{\varepsilon\varepsilon}$ обозначим множество таких λ , что $|\lambda| = 1$, $\lambda^0 \geq \varepsilon$ и существует такое линейное подпространство $\Pi \subset X$, что $\text{codim } \Pi \leq r$ и

$$\lambda^0 q_0(x) + y^*Q(x) \geq \varepsilon|x|^2 \quad \forall x \in \Pi.$$

Очевидно, $\Lambda_r^{\varepsilon\varepsilon} \subseteq \Lambda_r^\varepsilon \subseteq \Lambda_r$. Кроме того, в силу теоремы 4.4 из [2; гл. 1] все множества Λ_r , Λ_r^ε , $\Lambda_r^{\varepsilon\varepsilon}$ замкнуты и, значит, компактны.

ТЕОРЕМА 2 (см. [1]). Пусть форма q_0 строго положительно определена на конусе K . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\Lambda_{k-1}^{\varepsilon\varepsilon} \neq \emptyset$ и

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}^{\varepsilon\varepsilon}} (\lambda^0 q_0(x) + y^*Q(x)) \geq \varepsilon|x|^2 \quad \forall x \in X.$$

Ниже мы получим условия, гарантирующие возможность замены в теореме 1 множества Λ_{k-1} на $\Lambda_{k-1}^\varepsilon$ для форм, которые неотрицательны на конусе K , но не являются на нем строго положительными.

1. Формулировка основного результата. Введем в рассмотрение билинейное отображение $\tilde{Q}: X \times X \rightarrow Y$, которое произвольным $x_1, x_2 \in X$ ставит в соответствие вектор $y = \tilde{Q}[x_1, x_2]$, i -я координата которого равна $y_i = \langle Q_i x_1, x_2 \rangle$. В силу симметричности матриц Q_i так определенное билинейное отображение $\tilde{Q}$ также симметрично. Для произвольного фиксированного $h \in X$ обозначим через Qh линейный оператор, действующий из X в Y по формуле $Qh(x) = \tilde{Q}[h, x]$.

Точки конуса K будем называть *нулями* квадратичного отображения Q . Нуль h отображения Q называется *регулярным*, если линейный оператор Qh сюръективен, т.е. $Qh(X) = Y$. Последнее, очевидно, равносильно линейной независимости векторов $Q_1 h, \dots, Q_k h$. Квадратичное отображение Q называется *регулярным*, если все его нули (если они существуют) регулярны.

Квадратичное отображение называется *сюръективным*, если его образ $Q(X)$ совпадает с Y . Оказывается, что если множество регулярных нулей квадратичного отображения Q непусто, то оно сюръективно. Действительно, из классической теоремы об обратной функции, примененной к уравнению $Q(x) = y$ в точке h , являющейся регулярным нулем Q , вытекает, что при отображении Q образ единичной окрестности точки h содержит некоторую окрестность нуля в пространстве Y , откуда уже в силу положительной однородности Q следует, что оно сюръективно.

Для каждого $y \in Q(X)$ через $\omega(y)$ обозначим инфимум в задаче

$$q_0(x) \rightarrow \inf, \quad Q(x) = y \quad (3)$$

и положим $\omega(y) = +\infty$ для любого $y \notin Q(X)$. Так определенная функция ω , очевидно, положительно однородна и, если выполняется условие (1), то $\omega(0) = 0$. Обозначим через $S = \{y \in Y : |y| = 1\}$ единичную сферу.

ЛЕММА 1. Пусть форма q_0 неотрицательно определена на конусе K и, кроме того, если $l \in K$, $q_0(l) = 0$, то l является регулярным нулем отображения Q . Тогда функция ω ограничена снизу на S , т.е.

$$\exists c > 0: \quad \omega(y) > -c \quad \forall y \in S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Предположим, что функция ω на S снизу не ограничена. Тогда существует такая последовательность $\{x_i\}$, что

$$Q(x_i) \in S \quad \forall i, \quad q_0(x_i) \rightarrow -\infty.$$

Тогда $|x_i| \rightarrow \infty$. Положим $l_i = x_i/|x_i|$. Используя, что $|l_i| = 1$, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $l_i \rightarrow l$. При этом, очевидно, $q_0(l) \leq 0$, $l \in K$, так как $|Q(l_i)| = |x_i|^{-2} \rightarrow 0$. Следовательно, l является регулярным нулем отображения Q . Поэтому по теореме Люстерника [7] в окрестности точки l справедлива следующая оценка расстояния до множества K :

$$\rho(l_i, K) \leq \text{const}|Q(l_i)| = \text{const}|x_i|^{-2},$$

где ρ – расстояние от точки до множества, а const здесь и далее означают некоторые константы, конкретный вид которых нам не важен. Значит, для больших номеров i существуют такие $\tilde{l}_i \in K$, ξ_i , что

$$l_i = \tilde{l}_i + \xi_i, \quad |\xi_i| \leq \text{const}|x_i|^{-2}.$$

Тогда

$$q_0(l_i) = q_0(\tilde{l}_i) + q_0(\xi_i) + 2\langle Q_0\tilde{l}_i, \xi_i \rangle \geq -\text{const}|\xi_i| \geq -\text{const}|x_i|^{-2}$$

(так как в силу (1) $q_0(\tilde{l}_i) \geq 0$), откуда имеем $q_0(x_i) = |x_i|^2 q_0(l_i) \geq -\text{const}$ для любого i . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполняются все предположения леммы 1. Тогда

$$q_0(x) + c|Q(x)| \geq 0 \quad \forall x, \quad (4)$$

где константа $c > 0$ взята из леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 $\omega(y) + c|y| \geq 0$ для любого y . Взяв произвольное $x \in X$, подставляя в последнее неравенство $y = Q(x)$ и учитывая, что $q_0(x) \geq \omega(y)$, получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполняются все предположения леммы 1 и, кроме того, u квадратичного отображения Q существует регулярный нуль. Тогда функция ω ограничена на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ограниченность функции ω на S сверху вытекает из существования хотя бы одного регулярного нуля.

ТЕОРЕМА 3. Пусть форма q_0 неотрицательно определена на конусе K и, кроме того, если $l \in K$, $q_0(l) = 0$, то l является регулярным нулем отображения Q .

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $\Lambda_{k-1}^\varepsilon$ непусто и, более того,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon} (\lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle) \geq 0 \quad \forall y, \quad (5)$$

где, напомним, $\lambda = (\lambda^0, y^*)$.

Отметим, что случай $K = \emptyset$ не исключается. При этом для $y \notin Q(X)$ условие (5) выполняется автоматически, так как $\omega(y) = +\infty$ для любого $y \notin Q(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 является простым следствием теоремы 3. Действительно, предположим, что форма q_0 строго положительна определена на конусе K . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что форма $q_\varepsilon(x) := q(x) - \varepsilon|x|^2$ также строго положительна определена на конусе K . Применяя к форме q_ε теорему 3, учитывая при этом, что $\lambda^0 \geq \varepsilon > 0$ для всех $\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon$ и, следовательно, если $\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon$, то для некоторого линейного подпространства Π такого, что $\text{codim } \Pi \leq k-1$, имеет место

$$\lambda^0 q_\varepsilon(x) + y^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi,$$

следовательно,

$$\lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x) \geq \varepsilon|x|^2 \quad \forall x \in \Pi,$$

непосредственно получаем искомое утверждение теоремы 2.

Доказательству теоремы 3 посвящен следующий пункт, а сейчас мы проиллюстрируем на примерах приведенные выше понятия и утверждения.

Следующий простой пример показывает, что несмотря на то, что выполнены все предположения теоремы 3, инфимум в задаче (3) может не достигаться при любом $y \neq 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 2$, $k = 1$, $q_0(x) = x_1^2$, $q_1(x) = x_1x_2$. Отображение q_1 , очевидно, регулярно. При этом $\omega(y) = 0$ для любого y , однако при любом $y \neq 0$ инфимум в задаче (3) не достигается.

В следующем примере также выполнены все предположения теоремы 3, однако для любого вещественного α существует такое $y = y(\alpha)$, что в задаче (3) инфимум равен α , но не достигается.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 4$, $k = 3$, $q_1(x) = x_1x_2$, $q_2(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $q_3(x) = x_3x_4$, $\tilde{q}_0(x) = -x_2^2 + x_3^2$, $q_0(x) = \tilde{q}_0(x) + q_2(x) + q_3(x)$.

Если $q_1(x) = 0$, $q_2(x) = 0$, $x \neq 0$, то $x_1 \neq 0$, следовательно, $x_2 = 0$ для любого $x \in K$, откуда $q_0(x) = \tilde{q}_0(x) \geq 0$ для любого $x \in K$ и, кроме того, $x_3^2 + x_4^2 \neq 0$ для любого $x \in K$. Отсюда непосредственно вытекает, что $Q = (q_1, q_2, q_3)$ регулярно.

Далее, в задаче

$$\tilde{q}_0(x) \rightarrow \inf, \quad q_1(x) = 0, \quad q_2(x) = y_2, \quad q_3(x) = y_3$$

при y таком, что $y_2 \leq 0$, $y_3 \neq 0$, инфимум не достигается, так как если $q_1(x) = 0$, $q_2(x) = y_2 \leq 0$, $x_3x_4 = y_3 \neq 0$, то $x_2 = 0$, а значит, $\tilde{q}_0(x) = x_3^2 > 0$. В то же время для последовательности

$$\left\{ x_n = \left(\left(-y_2 + \frac{1}{n^2} + n^2 y_3^2 \right)^{1/2}, 0, \frac{1}{n}, n y_3 \right) \right\}$$

имеет место $\tilde{q}_0(x_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Поэтому при $y_2 \leq 0$, $y_3 \neq 0$ в задаче

$$q_0(x) \rightarrow \inf, \quad Q(x) = (0, y_2, y_3)$$

инфимум равен $y_2 + y_3$ и не достигается. Осталось произвольное вещественное α представить в виде $\alpha = y_2 + y_3$ при $y_2 \leq 0$, $y_3 \neq 0$. Отметим, что в рассматриваемом примере $\Lambda_0 = \emptyset$.

В следующем примере выполняется (1), а квадратичное отображение Q имеет регулярные нули и единственный (с точностью до коллинеарности) нерегулярный нуль l , для которого $q_0(l) = 0$. Тем не менее, существует y такой, что $\omega(y) = -\infty$, и, следовательно, для этих y не выполняется утверждение леммы 1, а также неравенство (5) теоремы 3.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 4$, $k = 2$, $q_1(x) = x_1x_2$, $q_2(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $q_0(x) = x_2x_4$. Непосредственно проверяется, что нерегулярные нули имеют вид $x = (0, 0, 0, x_4)$, а все остальные нули регулярны. Кроме того, если $Q(x) = 0$, то $x_2 = 0$, а значит, $q_0(x) = 0$. В то же время для $y = (y_1, y_2)$ такого, что $\nu = y_2 + y_1^2 - 1 \geq 0$, имеем $\omega(y) = -\infty$ (минимизирующая последовательность имеет вид $x_n = (y_1, 1, \sqrt{\nu}, -n)$).

В следующем примере выполняется (1), квадратичное отображение Q сюръективно и каждое $y \neq 0$ является для него регулярным значением, но все нули Q нерегулярны и q_0 обращается на K в нуль. В то же время $\omega(y) = -\infty$ для любого $y \neq 0$.

ПРИМЕР 4. Пусть $k = 2$, $n = 4$, $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$, $q_2(x) = x_1x_2$, $q_0(x) = x_1x_3 + x_2x_4$. Все сказанное выше проверяется непосредственно. Отметим, что в этом примере $\Lambda_1^\varepsilon = \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$, так как $\text{ind}(\varepsilon q_0 + y^*Q) \geq 2$.

2. Доказательство теоремы 3. Доказательству теоремы 3 предположим вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполняются все предположения леммы 1. Тогда имеем $|\tilde{\omega}(y)| \leq c|y|$ для любого $y \in Y$, где константа c взята из леммы 1, а $\tilde{\omega}(y)$ обозначает инфимум в задаче

$$f(x) = q_0(x) + c|Q(x) - y| \rightarrow \inf. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y \in Y$. Для произвольного $x \in X$ в силу (4) имеем

$$q_0(x) + c|Q(x) - y| \geq q_0(x) + c|Q(x)| - c|y| \geq -c|y|.$$

Оценка сверху $\tilde{\omega}(y) \leq f(0) = c|y|$ очевидна. Предложение доказано.

Напомним, что для гладкого отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ точка x называется *регулярной* (нормальной), если линейный оператор $\Phi'(x)$ сюръективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть заданы гладкие отображения $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\Phi: X \rightarrow Y$ и константа $c > 0$. Предположим, что функция $f(x) = \phi(x) + c|\Phi(x)|$ достигает минимума в точке x_0 , которая для Φ является регулярной и, кроме того, $\Phi(x_0) = 0$. Тогда существует $y^* \in Y$ такой, что $|y^*| \leq c$,

$$\phi'(x_0) + \Phi'(x_0)^* y^* = 0 \quad (7)$$

($(\cdot)^*$ означает сопряженный оператор) и для $q_0 = \phi''(x_0)$, $Q = \Phi''(x_0)$ выполняется

$$q_0(x) + y^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \ker \Phi'(x_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся элементами негладкого анализа (см. [8]). Для липшицевой функции f , как обычно, через $\partial f(x)$ будем обозначать ее производную Кларка в точке x . Если липшицева функция f в точке x_0 достигает локального минимума, то $0 \in \partial f(x_0)$ и, следовательно, $0 \in \phi'(x_0) + c\partial|\Phi|(x_0)$ (см. [8; с. 43]), где функция $|\Phi|$ определена по формуле $|\Phi|(x) = |\Phi(x)|$. Но по правилам дифференцирования сложных функций (см. [8; с. 47]) множество $c\partial|\Phi|(x_0)$ состоит из векторов z^* вида $z^* = \Phi'(x_0)^* y^*$, $|y^*| \leq c$. Это доказывает существование вектора y^* , для которого $|y^*| \leq c$ и выполняется (7).

Рассмотрим теперь гладкую задачу минимизации с ограничениями:

$$\phi(x) \rightarrow \min, \quad \Phi(x) = 0. \quad (8)$$

Очевидно, точка x_0 является ее локальным минимумом. По условию она регулярна. Поэтому уравнение (7) реализует принцип Лагранжа для задачи (8), причем в силу регулярности x_0 вектор y^* определяется уравнением (7) единственным образом. Применяя к задаче (8) классические необходимые условия второго порядка, с учетом вышесказанного получаем, что так построенный вектор y^* является искомым. Предложение доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Функция ω положительно однородна и $\omega(0) = 0$. Поэтому достаточно доказать существование такого $\varepsilon > 0$, что множество $\Lambda_{k-1}^\varepsilon$ непусто и условие (5) выполняется для всех $y \in S$ (так как при $y = 0$ (5) автоматически вытекает из непустоты $\Lambda_{k-1}^\varepsilon$). Сделаем это.

Напомним, точка $y \in Y$ называется *регулярным значением* заданного гладкого отображения, если любая точка, принадлежащая прообразу y , является регулярной (в частности, если прообраз точки y пуст). По теореме Сарда множество регулярных значений гладкого отображения всюду плотно в Y . Кроме того, для квадратичного отображения (в силу его положительной однородности) произвольная точка y является для него регулярным значением тогда и только тогда, когда αy также регулярное значение для любого $\alpha > 0$. Поэтому для произвольной точки $y \in S$ существует сходящаяся к ней последовательность регулярных значений, каждое из которых также принадлежит S .

В силу леммы 1 существует $c > 0$ такое, что $\inf_{y \in S} \omega(y) > -c$. Для натуральных i положим $q_{0,i}(x) = q_0(x) + i^{-1}|x|^2$, $Q_{0,i} = Q_0 + i^{-1}I$, где I – единичная матрица. Зафиксируем произвольную точку $y \in S$. Возьмем сходящуюся к y последовательность регулярных значений $\{y_s\}$, $y_s \in S$ для любого s . Зафиксируем произвольный номер s .

Рассмотрим семейство задач

$$f_i(x) = q_{0,i}(x) + c|Q(x) - y_s| \rightarrow \inf,$$

зависящих от параметра i , который принимает натуральные значения. Каждую задачу этого семейства будем называть *i -задачей*. В силу предложения 1 инфимум в каждой из i -задач конечен. Докажем, что он достигается. Действительно, фиксируем i , и пусть $\{x_j\}$ – минимизирующая последовательность в i -задаче. Тогда

$$f_i(x_j) \geq i^{-1}|x_j|^2 + \tilde{\omega}(y_s)$$

и, значит, в силу предложения 1, если бы $|x_j| \rightarrow \infty$, то $f_i(x_j) \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, что невозможно. Поэтому последовательность $\{x_j\}$ ограничена и, следовательно, имеет хотя бы одну предельную точку, которая, очевидно, и является решением i -задачи.

Через $x_{i,s}$ обозначим какое-нибудь решение i -задачи. Зафиксируем i и рассмотрим два случая.

Первый случай: $Q(x_{i,s}) \neq y_s$. Тогда в i -задаче, являющейся задачей безусловной минимизации, в окрестности решения $x_{i,s}$ минимизируемая функция f_i является гладкой. Поэтому в силу классических необходимых условий первого и второго порядка

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(x_{i,s}) = 2(Q_{0,i} + y_{i,s}^* Q)x_{i,s} = 0, \quad (9)$$

$$q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \ker Qx_{i,s}, \quad (10)$$

где $y_{i,s}^* = c(Q(x_{i,s}) - y_s)/|Q(x_{i,s}) - y_s|$. Здесь (10) вытекает из того, что

$$\left\langle \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(x_{i,s})x, x \right\rangle \geq 0 \quad \forall x, \quad \left\langle \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(x_{i,s})x, x \right\rangle = 2(q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x)) \quad \forall x \in \ker Qx_{i,s}.$$

Предположим вначале, что $Q(x_{i,s}) \neq 0$. Тогда положим $\Pi_i = \ker Qx_{i,s} + \text{span}\{x_{i,s}\}$ (где span обозначает линейную оболочку множества). В силу (9), (10)

$$q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_i.$$

Кроме того, так как $x_{i,s} \notin \ker Qx_{i,s}$, поскольку $(Qx_{i,s})x_{i,s} = Q(x_{i,s}) \neq 0$, получаем, что $\text{codim } \Pi_i \leq k-1$. Следовательно,

$$\lambda_{i,s}^0(1, y_{i,s}^*) \in \Lambda_{k-1} \quad \text{при} \quad \lambda_{i,s}^0 = (1 + |y_{i,s}^*|^2)^{-1/2}. \quad (11)$$

Кроме того, по построению $|y_{i,s}^*| = c$. Далее, умножая (9) скалярно на $x_{i,s}$, используя определение $y_{i,s}^*$, имеем

$$q_{0,i}(x_{i,s}) + c|Q(x_{i,s}) - y_s| + \langle y_{i,s}^*, y_s \rangle = 0.$$

С другой стороны,

$$q_{0,i}(x) + c|Q(x) - y_s| \geq q_{0,i}(x_{i,s}) + c|Q(x_{i,s}) - y_s| \quad \forall x, \quad (12)$$

так как по построению $x_{i,s}$ является решением i -задачи. Отсюда в силу предыдущего равенства

$$\min_x (q_{0,i}(x) + c|Q(x) - y_s|) + \langle y_{i,s}^*, y_s \rangle = 0. \quad (13)$$

Пусть теперь $Q(x_{i,s}) = 0$. Тогда, умножая (9) скалярно на $x_{i,s}$, получаем, что $q_{0,i}(x_{i,s}) = 0$. Поэтому нуль также является решением в i -задаче. Подставляя в формулу (10) и выражение для $y_{i,s}^*$ вместо $x_{i,s}$ точку $x = 0$, имеем $q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0$ для любого x , откуда снова вытекает справедливость (11). Доказательство неравенства (13) аналогично.

Второй случай: $Q(x_{i,s}) = y_s$. Докажем, что и в этом случае существует $y_{i,s}^*$, для которого $|y_{i,s}^*| \leq c$ и выполняются (11), (13). Действительно, в рассматриваемом случае точка $x_{i,s}$ является регулярной для отображения Q , так как по построению y_s является регулярным значением. Поэтому в силу предложения 2 примененного к i -задаче, существует $y_{i,s}^*$, для которого $|y_{i,s}^*| \leq c$ и имеют место (9), (10). Как и при рассмотрении первого случая, учитывая, что $Q(x_{i,s}) = y_s \neq 0$, получаем (11). Умножая (9) скалярно на $x_{i,s}$, получаем

$$q_{0,i}(x_{i,s}) + \langle y_{i,s}^*, Q(x_{i,s}) \rangle = 0.$$

Из этого равенства с помощью (12), учитывая, что $Q(x_{i,s}) - y_s = 0$, получаем (13).

Таким образом, в результате рассмотрения двух указанных случаев доказано существование $y_{i,s}^*$, для которых $|y_{i,s}^*| \leq c$ и выполняются (11), (13). Выделяя при каждом фиксированном s из ограниченной последовательности $\{y_{i,s}^*\}$ сходящуюся подпоследовательность, добьемся того, что $y_{i,s}^* \rightarrow y_s^*$ при $i \rightarrow \infty$ для некоторого y_s^* выполнена оценка $|y_s^*| \leq c$. Аналогично рассматривая последовательность $\{y_s^*\}$, добьемся того, что $y_s^* \rightarrow \hat{y}^*$, $s \rightarrow \infty$, для некоторого $\hat{y}^*$. Зафиксировав произвольный x , переходя в (11) и (13) к пределу, вначале при фиксированном s и $i \rightarrow \infty$, а затем при $s \rightarrow \infty$, в силу замкнутости множества Λ_{k-1} имеем $|\hat{y}^*| \leq c$,

$$\begin{aligned} \lambda = (\lambda^0, y^*) \in \Lambda_{k-1} \quad \text{при} \quad \lambda^0 = (1 + |\hat{y}^*|^2)^{-1/2}, \quad y^* = \lambda^0 \hat{y}^*, \\ \lambda^0 \inf_x (q_0(x) + c|Q(x) - y|) + \langle y^*, y \rangle = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из последнего неравенства получаем

$$\lambda^0 q_0(x) + \langle y^*, y \rangle \geq 0 \quad \forall x: \quad Q(x) = y,$$

откуда уже вытекает неравенство

$$\lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle \geq 0. \quad (15)$$

Положим $\varepsilon = (1 + c^2)^{-1/2}$. Тогда $\lambda^0 \geq \varepsilon$, так как $|\hat{y}^*| \leq c$. Таким образом, в силу произвольности $y \in S$ определенное нами число ε является искомым. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле выше доказано несколько большее, чем утверждалось в теореме 3. А именно, пусть выполнены все предположения теоремы 3. Тогда существуют такие $c > 0$, $\varepsilon > 0$, что для любого y найдется $\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon$, для которого имеет место (14) и, как следствие этого, (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенное доказательство теоремы 3 основывается на исследовании задачи безусловной минимизации (6), инфимум в которой $\tilde{\omega}(y)$ в силу предположения 1 конечен для любого y . Если бы при каждом y инфимум функции f в (6) достигался, то в доказательстве теоремы 3 не возникало бы необходимости рассмотрения семейства i -задач и было бы достаточно проанализировать точки минимума функции f . Если форма q_0 положительно определена на K , то инфимум в (6) достигается. Однако простейшие примеры показывают, что уже при $k = 1$ без дополнительного предположения относительно положительности q_0 на K это уже не так. Действительно, пусть $q_0(x) = x_1^2$, $Q(x) = q_1(x) = x_1 x_2$. Тогда при любом $c > 0$ имеем $\tilde{\omega}(y) = 0$ для любого y , однако инфимум в задаче (6) не достигается для любого $y \neq 0$.

3. Сюръективность и нули квадратичных отображений. Зададимся следующим вопросом: как связано наличие нулей у квадратичного отображения и его сюръективность? Как отмечалось выше, если у квадратичного отображения Q имеется регулярный нуль, то оно сюръективно. В то же время, как известно (см. [3]), все находящиеся в общем положении квадратичные отображения регулярны. Поэтому для квадратичных отображений, находящихся в общем положении, из существования нуля вытекает их сюръективность. Обратное, очевидно, неверно. Простейшим примером сюръективного квадратичного отображения, у которого нет нулей, является отображение $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемое формулой $Q(x) = (x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2)$. Однако, как показывает следующее утверждение, при $n \gg k$ подобных примеров уже не существует.

ЛЕММА 2. Пусть квадратичное отображение Q сюръективно и

$$n > k^2 - 1. \quad (16)$$

Тогда множество его нулей непусто (т.е. $K \neq \emptyset$).

Перед тем как доказывать лемму, приведем следующее полезное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть M – открытый конус в $\mathbb{R}^k$ и $\text{conv } M = \mathbb{R}^k$ (conv означает выпуклую оболочку множества). Тогда существуют такие $k+1$ векторов $y_i \in M$, что $\sum_{i=0}^k y_i = 0$ и ранг системы $\{y_0, \dots, y_k\}$ равен k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $0 \in \text{conv } M$. Поэтому по теореме Каратеодори существует хотя бы одна система векторов $y_i \in M$, $i = 0, \dots, k$, для которой выполнено $\sum_{i=0}^k y_i = 0$. Среди всех таких систем выберем ту систему $\{y_0, \dots, y_k\}$, которая

имеет максимальный ранг $\tilde{k}$. Чтобы доказать, что эта система является искомой, покажем, что $\tilde{k} = k$.

Предположим противное, т.е. что $\tilde{k} < k$. Тогда все векторы $y_i, i = 0, \dots, k$ лежат в собственном линейном подпространстве $\Pi \subset \mathbb{R}^k$. Перенумеровывая векторы y_i и учитывая, что $\dim \Pi = \tilde{k} < k$, добьемся того, что $\text{span}\{y_0, \dots, y_{k-2}\} = \Pi$. Возьмем ненулевой вектор y , который ортогонален собственному подпространству Π . В силу открытости M существует такое $\varepsilon \neq 0$, что

$$\tilde{y}_{k-1} = y_{k-1} + \varepsilon y \in M, \quad \tilde{y}_k = y_k - \varepsilon y \in M.$$

Положим $\tilde{y}_i = y_i, i = 0, \dots, k-2$, и рассмотрим систему векторов $\{\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_k\}$. Очевидно, $\tilde{y}_i \in M$ для любого i , $\sum_{i=0}^k \tilde{y}_i = 0$ и ранг этой системы уже равен $\tilde{k} + 1$. Полученное противоречие с максимальностью ранга исходной системы $\{y_0, \dots, y_k\}$ доказывает равенство $\tilde{k} = k$. Предложение доказано.

Отметим, что отличие предложения 3 от теоремы Каратеодори заключается в том, что система $\{y_0, \dots, y_k\}$ имеет полный ранг k . Кроме того, предположение об открытости M существенно.

Перейдем к доказательству леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Предположим, что у квадратичного отображения Q нулей нет. Обозначим через $\mathcal{Y}_{k-1}^+$ множество таких y^* , для каждого из которых существует подпространство Π такое, что $\text{codim } \Pi \leq k-1$, $\langle y^*, Q(x) \rangle > 0$ для любого $x \in \Pi \setminus \{0\}$. Покажем, что

$$\forall y \neq 0 \quad \exists y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}^+ : \quad \langle y^*, y \rangle > 0. \quad (17)$$

Действительно, рассмотрим задачу $-|x|^2 \rightarrow \min, Q(x) = 0$. Нуль является ее решением. Пусть $y \neq 0$. Тогда в силу сюръективности Q существует $h \neq 0$ такое, что $Q(h) = y$. Из теоремы 2 применительно к рассматриваемой задаче заключаем, что

$$\exists \lambda = (\lambda^0, y^*) : \quad \lambda^0 > 0, \quad \text{ind}(-\lambda^0 I + y^* Q) \leq k-1, \quad -\lambda^0 |h|^2 + \langle y^*, Q(h) \rangle \geq 0$$

Следовательно,

$$y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}^+, \quad \langle y^*, y \rangle = \langle y^*, Q(h) \rangle \geq \lambda^0 |h|^2 > 0.$$

Итак, (17) доказано.

Конус $\mathcal{Y}_{k-1}^+$, очевидно, открыт. Кроме того, $\text{conv } \mathcal{Y}_{k-1}^+ = \mathbb{R}^k$, так как в противном случае в силу теоремы об отделимости для выпуклых конусов существовал бы вектор $y \neq 0$, для которого $\langle y, y^* \rangle \leq 0$ для любого $y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}^+$, что противоречило бы (17). Следовательно, в силу предложения 3 существует такая система векторов $y_i^* \in \mathcal{Y}_{k-1}^+, i = 0, \dots, k$, что $\sum_{i=0}^k y_i^* = 0$ и векторы $y_1^*, \dots, y_k^*$ линейно независимы.

Возьмем подпространства Π_i такие, что

$$\text{codim } \Pi_i \leq k-1, \quad y_i^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_i, \quad i = 0, \dots, k.$$

Положим $\Pi = \bigcap_{i=0}^k \Pi_i$. Тогда

$$\text{codim } \Pi \leq (k-1)(k+1) = k^2 - 1, \quad -\sum_{i=1}^k y_i^* Q(x) = y_0^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi \subset \Pi_0.$$

Следовательно, $y_i^* Q(x) = 0$ для любого $x \in \Pi$, $i = 1, \dots, k$. Отсюда в силу линейной независимости векторов $y_1^*, \dots, y_k^*$ имеем $Q(x) = 0$ для любого $x \in \Pi$, а в силу (16) $\Pi \neq \{0\}$. Таким образом множество нулей у Q непусто, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 2 усиливает результат Аграчева (см. [3; предложение 1, с. 91]), доказавшего, что если квадратичное отображение Q существенно сюръективно (*существенная сюръективность* означает, что любое близкое к Q квадратичное отображение также сюръективно) и имеет место (16), то множество нулей у Q непусто. В то же время отметим, что до сих пор остается открытым вопрос: существует ли сюръективное квадратичное отображение, которое не является существенно сюръективным?

В лемме 2 оценку (16) можно улучшить. Например, покажем, что для $k = 2$ утверждение леммы остается в силе уже при $n \geq 3$. Действительно, предположим, что отображение $Q = (q_1, q_2): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ сюръективно, но не имеет нулей. Рассмотрим множество $N = \{x : q_1(x) = 0, |x| = 1\}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1}$. Множество N , как легко видеть, связно в $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1}$, так как $n \geq 3$. Поэтому, либо $q_2(x) > 0$ для любого $x \in N$, либо $q_2(x) < 0$ для любого $x \in N$, так как в силу предположения об отсутствии у Q нулей имеет место $q_2(x) \neq 0$ для любого $x \in N$. Следовательно, в силу теоремы 1

$$\exists y^* = (y^{*1}, y^{*2}) \neq 0: \quad y^{*1} q_1(x) + y^{*2} q_2(x) \geq 0 \quad \forall x,$$

что противоречит сюръективности Q .

В заключение исследуем вопрос: когда образ квадратичного отображения $Q(X)$ является выпуклым или почти выпуклым множеством? При этом множество M называется *почти выпуклым* [5], если существует такое выпуклое множество C , что $C \subset M \subset \bar{C}$, где черта означает замыкание. Этот вопрос интересен как сам по себе, так и важен для приложений, так как для исследования экстремальных задач с квадратичными ограничениями с почти выпуклым образом разработаны эффективные методы, например, так называемая *S-процедура* (подробнее см. [4], [5] и библиографию там). Отметим, только, что при $k = 2$ множество $Q(X)$ выпукло [9], а уже при $k \geq 3$ имеются простые примеры, когда $Q(X)$ не является ни выпуклым ни почти выпуклым множеством. В наиболее распространенной ситуации выпуклость $Q(X)$ гарантируется наличием регулярного нуля, так как в этом случае $Q(X) = Y$. Для целого $r \geq 0$ положим

$$\mathcal{Y}_r = \{y^* \neq 0 : \text{ind}(y^* Q) \leq r\}.$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$\exists h \in X: \quad \langle y^*, Q(h) \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{Y}_{k-1} \setminus \mathcal{Y}_0. \quad (18)$$

Тогда

$$\text{int}(\mathcal{Y}_0^*) \subseteq Q(X) \subseteq \mathcal{Y}_0^*. \quad (19)$$

(Здесь $(\cdot)^*$ означает сопряженный конус).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое включение в (19) очевидно. Докажем левое включение. Возьмем $y \in \text{int}(\mathcal{Y}_0^*)$ и предположим, что $y \notin Q(X)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$-\chi \rightarrow \min, \quad Q(x) - \chi y = 0, \quad -\chi \leq 0,$$

относительно переменных $(\chi, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$. Тогда $(\chi, x) = 0$ – ее решение. В силу необходимых условий минимума для рассматриваемой задачи (см. [10]) несложно получаем

$$\exists (\lambda^0, \lambda^1, y^*) \neq 0: \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \lambda^1 \geq 0, \quad -\langle y^*, y \rangle - \lambda^0 - \lambda^1 = 0, \quad (20)$$

$$\text{ind}(y^*Q) \leq k-1, \quad \langle y^*, Q(h) \rangle \geq 0. \quad (21)$$

Из (20) вытекает, что $y^* \neq 0$. Кроме того, $y^* \notin \mathcal{Y}_0$, так как если предположить противное, то $\langle y^*, y \rangle > 0$, поскольку $y \in \text{int}(\mathcal{Y}_0^*)$, что приводит к противоречию с (20). Таким образом, $y^* \in \mathcal{Y}_{k-1} \setminus \mathcal{Y}_0$, откуда в силу (18) $\langle y^*, Q(h) \rangle < 0$, что приводит к противоречию с (21). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняется (18), то множество $Q(X)$ почти выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\text{int}(\mathcal{Y}_0^*) = \emptyset$, то существует $y^* \neq 0$ такой, что $y^*Q = 0$. Поэтому, переходя от Q к $\tilde{Q} = A \circ Q$, где $A: Y \rightarrow Y$ соответствующее невырожденное линейное преобразование, и удаляя из $\tilde{Q}$ нулевые компоненты, в итоге добьемся того, что внутренность множества $\{y^* : y^*\tilde{Q}(x) \geq 0 \forall x\}$ непуста. При этом почти выпуклость множеств $Q(X)$ и $\tilde{Q}(X)$ равносильны. Таким образом, проводя указанную редукцию, можно, не теряя общности, считать, что $\text{int}(\mathcal{Y}_0^*) \neq \emptyset$. А в этом случае почти выпуклость $Q(X)$ вытекает из леммы 3, так как в силу (19) достаточно в определении почти выпуклости взять $C = \text{int}(\mathcal{Y}_0^*)$ (ведь сопряженный конус замкнут).

Полученное следствие усиливает теорему 1.1 из [5] для случая, когда рассматриваемый там конус K_+ , относительно которого упорядочено пространство Y , является нулевым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов, “Положительность квадратичных форм на пересечении квадрик”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 27–36.
- [2] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997.
- [3] А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124.
- [4] B. T. Polyak, “Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization”, *J. Optim. Theory Appl.*, **99**:3 (1998), 553–583.
- [5] А. С. Матвеев, *Критерии выпуклости образов квадратичных отображений в теории оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, СПб., 1998.
- [6] А. В. Арутюнов, В. Ячимович, “К теории экстремума для анормальных задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем., кибернет.*, 2000, № 1, 34–40.
- [7] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.
- [8] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988.
- [9] L. L. Dines, “On the mapping of quadratic forms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 494–498.
- [10] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия минимума в анормальных задачах с геометрическими ограничениями”, *ЖВМ и МФ*, **47**:3 (2007), 364–375.