Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Л. Виноградов, Точные неравенства для приближений классов периодических сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 569–584

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:37:03

Точные неравенства для приближений классов периодических сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности

О. Л. Виноградов

В работе устанавливаются точные неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара для классов периодических сверток с ядрами, не увеличивающими осцилляцию. Указывается широкий класс приближающих подпространств нечетной размерности, построенных по равномерным сдвигам одной функции, экстремальных в смысле поперечников. В качестве следствий выводятся точные неравенства типа Джексона для второго модуля непрерывности.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, если из контекста не следует противное, все пространства могут быть как вещественными, так и комплексными; C – пространство 2π -периодических непрерывных функций с равномерной нормой; если $1 \leq p < \infty$, то L_p – пространство измеримых 2π -периодических функций f , для которых $\|f\|_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p)^{1/p} < +\infty$; $L = L_1$, L_∞ – пространство измеримых 2π -периодических существенно ограниченных функций f с нормой $\|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$; если $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$, то $W_p^{(r)}$ – пространство 2π -периодических функций f , у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на любом отрезке, а $f^{(r)} \in L_p$. Далее,

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf_{T \in \mathfrak{N}} \|f - T\|_p$$

– наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$;

$$d_r(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(ik)^r}, \quad \Pi_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \alpha} e^{ikt}$$

– ядра Бернулли и теплопроводности соответственно;

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

– коэффициенты Фурье функции f и свертка функций f и g из L , $0/0 = 0$. Через $S_{2n, \mu}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, обозначается $2n$ -мерное пространство 2π -периодических

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2409.2008.1).

сплайнов порядка μ дефекта 1 по равномерному разбиению $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1} - (2n-1)$ -мерное пространство тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$.

В 1937 году Фавар [1], а также Ахиезер и Крейн [2] построили линейный метод приближения $X_{n,r}: L \rightarrow \mathcal{T}_{2n-1}$ такой, что для любой $f \in W_p^{(r)}$ при $p = \infty$ справедливо неравенство

$$\|f - X_{n,r}(f)\|_p \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p, \quad (1)$$

причем при любом $n \in \mathbb{N}$ константа

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$$

на классе $W_{\infty}^{(r)}$ не может быть уменьшена, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение. Никольский [3] распространил соотношения (1) и утверждение об их точности на случай $p = 1$.

Для приближения соболевских классов сплайнами известны точные при $p = 1, \infty$ неравенства

$$E(f, S_{2n,\mu})_p \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p, \quad (2)$$

$r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \geq r-1$. При $\mu = r-1$ константа в (2) реализуется линейным проектором, а именно, с помощью интерполяционных сплайнов $\sigma_{n,r-1}(f)$:

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_p \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p. \quad (3)$$

Неравенство (3) при $p = \infty$ доказано Тихомировым [4], при $p = 1$ – Корнейчуком [5]. Интерполирование не является единственным линейным методом, реализующим константу при $p = \infty$ [6; с. 221], [7; с. 213]. Кроме того, справедливо следующее очевидное неравенство (вытекающее, в том числе из более общего неравенства в [6; с. 278], [7; с. 233]):

$$\|f - \sigma_{n,1}(f)\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2n} \|f'\|_{\infty}.$$

При $\mu \geq r$ неравенство (2) доказано Лигуном [8]. Более того, Лигун доказал существование линейного оператора из C в $S_{2n,\mu}$, реализующего константу в соотношении (2) при $\mu \geq r$, $p = \infty$ (явный вид этого оператора в [8] отсутствует).

Перечисленные результаты, относящиеся к полиномам, можно найти в монографии [6], а относящиеся к сплайнам (кроме результата Лигуна о реализации неравенства (2) линейным методом) – в монографиях [6] и [7].

Одно из традиционных направлений обобщения неравенств (1)–(3) – рассмотрение вместо соболевских классов (сверток с ядрами Бернулли) классов сверток с ядрами G , не увеличивающими осцилляцию: $f = \varphi * G$. В [9] содержится серия принадлежащих разным математикам (см. там же историю вопроса) результатов для непрерывных невырожденных ядер, не увеличивающих осцилляцию; в том числе аналоги неравенства (1) для приближения этих классов тригонометрическими многочленами:

$$\|f - X_{n,G}(f)\|_p \leq \mathcal{K}_{n,G} \|\varphi\|_p.$$

Здесь $X_{n,G}$ – специальным образом построенный линейный оператор из L в $\mathcal{T}_{2n-1}$,

$$\mathcal{K}_{n,G} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} \sin n(u - \xi^*) G(u) du \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{c_{(2l+1)n}(G)}{2l+1} e^{i(2l+1)n\xi^*} \right|,$$

$\xi^* = \xi_{n,G}^*$ максимизирует интеграл (подробности далее).

В неравенстве типа (3) аналогом пространства сплайнов $S_{2n,r-1}$ служит линейная оболочка сдвигов ядра $\{G(\cdot - k\pi/n)\}_{k=0}^{2n-1}$. В [10] линейные комбинации таких сдвигов названы *римановыми сплайнами*; далее будем использовать этот термин. Справедливы аналоги неравенства (3) для интерполяции римановыми сплайнами [9].

Бабенко [11], [12] получил ряд точных результатов для приближений (в том числе приближений с ограничениями) классов сверток с ядрами, не увеличивающими осцилляцию, посредством тригонометрических многочленов и сверток ядра с пространствами сплайнов. Неравенства не могут быть улучшены за счет перехода к другим приближающим подпространствам размерности $2n-1$ или $2n$, т.е. неуплучшаемы в смысле поперечников (в различных смыслах) [9]. Первый результат такого рода для классов $W_{\infty}^{(r)}$ принадлежит Тихомирову [13]. В [10] Тихомиров указал серию $2n$ -мерных подпространств, а именно, пространств римановых m -сплайнов – линейных оболочек сдвигов m -кратной свертки ядра G с собой – реализующих неравенства типа (2) при $p = \infty$ для непрерывных ядер, не увеличивающих осцилляцию. Указанные результаты Бабенко и Тихомирова обобщают неравенства Лигуна для соболевских классов.

Автор [14] (основываясь на той же идее, что и в полиномиальном случае – интерполировании ядра Бернулли) при $\mu \geq r$ построил линейные операторы $X_{n,r,\mu}$ со значениями в $(2n-1)$ -мерном подпространстве пространства $S_{2n,\mu}$ (аналоги сумм Ахизера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (2):

$$\|f - X_{n,r,\mu}(f)\|_p \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p. \quad (4)$$

При этом равномерно

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} X_{n,r,\mu}(f) = X_{n,r}(f),$$

так что, например, неравенство (1) может быть получено из (4) предельным переходом. Родственные результаты, связывающие приближение сплайнами растущего порядка и тригонометрическими полиномами содержатся в работе Великина [15].

В классических случаях приближения тригонометрическими полиномами и сплайнами приближающее подпространство может быть задано как линейная оболочка равномерных сдвигов одной функции: ядра Дирихле или Бернулли (с добавлением константы) соответственно.

В настоящей работе устанавливаются точные неравенства вида (1) и (4) для приближений классов сверток подпространствами, построенными по равномерным сдвигам одной функции. Условия на ядро и функцию, порождающую приближающее подпространство, формулируются в терминах неувеличения (в определенном смысле) осцилляции. Тем самым указываются классы $(2n-1)$ -мерных подпространств, экстремальных наряду с $\mathcal{T}_{2n-1}$ для приближений классов сверток с точки зрения поперечников.

2. Построение приближающих операторов. Дискретное преобразование Фурье последовательности $\{c_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяется равенством

$$\widehat{c}_l = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k e^{-(i\pi lk)/n};$$

тогда $c_j = (1/2n)(\widehat{c})_{-j}$. Далее, если $J \subset \mathbb{Z}$, то $J'_n = [1-n : n-1] \setminus J$, $\mathcal{T}_J$ – линейная оболочка множества $\{e^{ik(\cdot)}\}_{k \in J}$, $\mathcal{T}_\emptyset = \{0\}$, $Z(f)$ означает число нулей с учетом кратности, $z(f)$ – без учета кратности, а $\nu(f)$ – число существенных перемен знака функции f на периоде (см. [7; с. 20]); $\mathcal{A}_{2n}(J)$ – множество вещественнозначных функций $G \in L$ таких, что для любых функций φ и T таких, что $T \in \mathcal{T}_J$, $\varphi \in L$, $\varphi \perp \mathcal{T}_J$ и $\nu(\varphi) \leq 2n$, будет

$$\nu(T + G * \varphi) \leq 2n; \quad (5)$$

$\mathcal{D}_{2n-2}(J)$ – множество вещественнозначных функций $D \in L$ таких, что для любого $T \in \mathcal{T}_J$ и набора вещественных чисел $\{\beta_j\}_{j=0}^{2n-1}$ такого, что $\widehat{\beta}_n = 0$ и $\widehat{\beta}_l = 0$ при всех $l \in J$, будет

$$\nu\left(T + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j D\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\right) \leq 2n - 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С помощью приближения суммы свертками с линейной комбинацией средних Стеклова легко видеть, что $\mathcal{A}_{2n-2}(J) \subset \mathcal{D}_{2n-2}(J)$. В обычном определении класса функций $CVD_{2n}(J)$, не увеличивающих осцилляцию порядка $2n$ [9], [16], [17], требуется, чтобы вместо неравенства (5) выполнялось более сильное неравенство

$$\nu(T + G * \varphi) \leq \nu(\varphi).$$

Таким образом, класс $\mathcal{A}_{2n}(J)$ шире класса $CVD_{2n}(J)$. Примеры ядер, не увеличивающих осцилляцию, см. в [16], [17].

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $J \subset [-n : n]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $c_l(G) = 0$ при некотором $l \in J'_{n+1}$. Тогда $G \in \mathcal{T}_{2n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_q(G) \neq 0$ при некотором q таком, что $|q| > n$. Положим $\varphi(x) = A \cos lx + \cos qx$. При достаточно большом A будет $\nu(\varphi) = 2|l| \leq 2n$, в то время как $\varphi \perp \mathcal{T}_J$ и $\nu(G * \varphi) = 2|q| > 2n$, что противоречит свойству ядра G неувеличения осцилляции.

Лемма 1 по сути известна; более сильные утверждения для класса $CVD_{2n}(\emptyset)$ см. в [17].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \subset [1-n : n-1]$, $-J = J$, $\eta_k \in \mathbb{R}$, $k \in [0 : 2n-1]$, $\xi \in \mathbb{R}$, $B \in C$. Решим интерполяционную задачу: подобрать коэффициенты $\beta_j = \beta_j(t)$ и $\gamma_j = \gamma_j(t)$ так, чтобы $\widehat{\beta}_l = 0$ при всех $l \in J$ и функция

$$s(x, t) = \sum_{j \in J} \gamma_j(t) e^{ijx} + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j(t) B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right)$$

принимала значение η_k при всех $x = t + \xi + k\pi/n$ (или, что то же самое, при $t = x - \xi - k\pi/n$), $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$. Обозначая $w = t + \xi$, $a_k = a_k(w) = B(w + k\pi/n)$, находим

$$\sum_{j \in J} \gamma_j e^{ij(w+k\pi/n)} + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j a_{k-j} = \eta_k. \quad (6)$$

Применяя к (6) дискретное преобразование Фурье, находим

$$\gamma_l = \frac{e^{-ilw}}{2n} \hat{\eta}_l, \quad l \in J, \quad \hat{\beta}_l \hat{a}_l = \hat{\eta}_l, \quad l \in J'_n \cup \{n\}.$$

Поскольку функция $\hat{a}_n(\cdot)$ вещественна, непрерывна и имеет нулевое среднее, она имеет нуль. Следовательно, для разрешимости интерполяционной задачи при всех t необходимо выполнение равенства

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \eta_k = 0. \quad (7)$$

Если t таково, что $\hat{a}_n(w) \neq 0$, то обязательно $\hat{\beta}_n = 0$; положим $\hat{\beta}_n = 0$ при всех t . Тогда для разрешимости интерполяционной задачи при любой правой части, удовлетворяющей условию (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{m=0}^{2n-1} B\left(w + \frac{m\pi}{n}\right) e^{-i\pi lm/n} \neq 0, \quad w \in \mathbb{R}, \quad l \in J'_n. \quad (8)$$

При выполнении этого условия

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_l &= \frac{\hat{\eta}_l}{\hat{a}_l}, \quad \beta_j = \frac{1}{2n} \sum_{l \in J'_n} \hat{\beta}_l e^{i\pi jl/n}, \\ s(x, t) &= \frac{1}{2n} \sum_{l \in J} \hat{\eta}_l e^{il(x-t-\xi)} + \frac{1}{2n} \sum_{l \in J'_n} \hat{\eta}_l \frac{\sum_{j=0}^{2n-1} B(x - j\pi/n) e^{i\pi jl/n}}{\sum_{m=0}^{2n-1} B(t + \xi + m\pi/n) e^{-i\pi lm/n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция s непрерывна на $\mathbb{R}^2$ и при любом $t \in \mathbb{R}$ функция $s(\cdot, t)$ принадлежит пространству

$$\begin{aligned} S_{2n-1, B, J} &= \left\{ \sum_{j \in J} \gamma_j e^{ij(\cdot)} + \sum_{l \in J'_n} d_l \Phi_{l, B} : \gamma_{-j} = \bar{\gamma}_j, d_{-l} = \bar{d}_l \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j \in J} \gamma_j e^{ij(\cdot)} + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right) : \right. \\ &\quad \left. \gamma_{-j} = \bar{\gamma}_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \hat{\beta}_l = 0, l \in J, \hat{\beta}_n = 0 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{l, B}(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} B\left(x + \frac{j\pi}{n}\right) e^{-i\pi jl/n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для выполнения условия (8) достаточно того, чтобы множество $S_{2n-1, B, J}$ было чебышевской системой (T -системой) размерности $2n - 1$, т.е. чтобы оно имело размерность $2n - 1$ и всякая ненулевая функция из $S_{2n-1, B, J}$ имела не более, чем $2n - 2$ нуля.

ЛЕММА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \in [1 - n : n - 1]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $T \in \mathcal{T}_J$, $d \in L$, $\nu(d + P) \leq 2n - 2$ для любого $P \in \mathcal{T}_J$. Тогда $\nu(G - G * d - T) \leq 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – количество элементов J , d_J – проекция функции d на $\mathcal{T}_J$,

$$F(t) = M + \max\{d(t) - d_J(t), 0\} + 1.$$

Положим при $\delta \in (0, \pi)$

$$Q_\delta(t) = \begin{cases} 0, & \delta \leq |t| \leq \pi, \\ 2\pi \left(\int_\delta^\delta F \right)^{-1} F(t), & t \in (-\delta, \delta). \end{cases}$$

Тогда $Q_\delta \geq 0$, $c_0(Q_\delta) = 1$, $Q_\delta * G \xrightarrow{\delta \rightarrow 0+} G$ почти всюду (если $G \in C$, то равномерно).

Поскольку $F \in L$, при достаточно малых δ будет $\int_{-\delta}^\delta F < 2\pi$, и при всех $t \in (-\delta, \delta)$

$$Q_\delta(t) \geq F(t) > d(t) - d_J(t) + M \geq d(t) + (Q_\delta - d)_J(t),$$

так как

$$|(Q_\delta)_J(t)| = \left| \sum_{k \in J} c_k(Q_\delta) e^{ikt} \right| \leq M |c_0(Q_\delta)| = M.$$

Следовательно, при таких δ функция $\varphi = Q_\delta - d - (Q_\delta - d)_J$ не меняет знака на $(-\delta, \delta)$, и $\nu(\varphi) \leq \nu(d + (Q_\delta - d)_J) + 2 \leq 2n$. Кроме того, $\varphi \perp \mathcal{T}_J$. Значит, в силу неувеличения осцилляции

$$\begin{aligned} \nu(G - G * d - T) &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0+} \nu(G * (Q_\delta - d) - T) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \nu(G * \varphi + (G * (Q_\delta - d)_J - T)) \leq 2n. \end{aligned}$$

Для $G \in L$, $\alpha > 0$ положим $G_\alpha = G * \Pi_\alpha$. Известно, что функции G_α аналитичны, $G_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} G$ в L и почти всюду (если $G \in C$, то равномерно). Кроме того [17], для любой ненулевой функции G

$$Z(G_\alpha) \leq \nu(G). \quad (9)$$

Пусть $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$,

$$H(\xi) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k G\left(\xi + \frac{k\pi}{n}\right),$$

$H_\alpha = H * \Pi_\alpha$, $\xi_\alpha^* = \xi_{n,\alpha,G}^*$ – корень уравнения $H_\alpha(\xi) = 0$. Если $H = 0$ тождественно, то $G \in \mathcal{T}_{2n-1}$ по лемме 1; в этом тривиальном случае выберем ξ_α^* произвольно. Пусть H – ненулевая функция. Тогда, поскольку

$$Z(H_\alpha) \leq \nu(H) \leq 2n,$$

ξ_α^* единственно с точностью до слагаемого, кратного π/n .

Так как $H(\xi + \pi/n) = -H(\xi)$ и $\nu(H) \leq 2n$, на каждом промежутке длины π/n между двумя точками, где H принимает значения существенно разных знаков, функция H существенно меняет знак ровно один раз. Поэтому найдется такой отрезок $[\xi_1, \xi_2]$ (возможно, вырождающийся в точку), что $0 \leq \xi_2 - \xi_1 < \pi/n$, $H = 0$ на $[\xi_1, \xi_2]$, а для всех достаточно малых $\delta > 0$ функция H не меняет знака на $(\xi_1 - \delta, \xi_1)$ и $(\xi_2, \xi_2 + \delta)$ и

$$\left(\int_{\xi_1 - \delta}^{\xi_1} H \right) \left(\int_{\xi_2}^{\xi_2 + \delta} H \right) < 0.$$

Положим $\xi^* = \xi_{n,G}^* = (\xi_1 + \xi_2)/2$. Так как ξ^* определяется с точностью до слагаемого, кратного π/n , можно считать, например, что $\xi^* \in [0, \pi/n)$. Поскольку ядро теплопроводности экспоненциально убывает, для любого $\xi \in (\xi^*, \xi_2)$ при достаточно малых $\alpha > 0$ знак $H_\alpha(\xi)$ такой же, как у функции H справа от точки ξ_2 , а для любого $\xi \in (\xi_1, \xi^*)$ – как слева от точки ξ_1 . Следовательно, при соответствующем выборе ξ_α^* будет $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \xi_\alpha^* = \xi^*$.

Отметим два частных случая: если G четна, то $\xi^* = \xi_\alpha^* = 0$, а если G нечетна, то $\xi^* = \xi_\alpha^* = \pi/(2n)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \in [1 - n : n - 1]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $D \in L$, $B = G * D \in C$, B удовлетворяет условию (8), $\alpha > 0$, $s_{n,\alpha,G,D,J}(x, t)$ определяется соотношениями: $s_{n,\alpha,G,D,J}(\cdot, t) \in S_{2n-1, B_\alpha, J}$,

$$s_{n,\alpha,G,D,J}(x, t) = G_\alpha(x - t) \quad \text{при } x = t + \xi_\alpha^* + \frac{k\pi}{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это определение корректно, по крайней мере, при достаточно малых α , так как в силу равномерной сходимости B_α к B функция B_α при достаточно малых α также удовлетворяет условию (8), а в силу определения ξ_α^* выполнено условие (7), в котором в качестве η_k выступает

$$\eta_{k,\alpha,G} = G_\alpha\left(\xi_\alpha^* + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s_{n,\alpha,G,D,J}(x, t) &= \frac{1}{2n} \sum_{l \in J} \hat{\eta}_{l,\alpha,G} e^{il(x-t-\xi_\alpha^*)} \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{l \in J'_n} \hat{\eta}_{l,\alpha,G} \frac{\sum_{j=0}^{2n-1} B_\alpha(x - j\pi/n) e^{i\pi j l/n}}{\sum_{m=0}^{2n-1} B_\alpha(t + \xi_\alpha^* + m\pi/n) e^{-i\pi l m/n}}. \end{aligned} \quad (10)$$

ЛЕММА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \in [1 - n : n - 1]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $D \in \mathcal{D}_{2n-2}(J)$, $B = G * D \in C$, B удовлетворяет условию (8). Тогда существует такое $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, что при всех достаточно малых $\alpha > 0$, $x, t \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon \sin n(x - t - \xi_\alpha^*)(G_\alpha(x - t) - s_{n,\alpha,G,D,J}(x, t)) \geq 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$ и обозначим

$$g_\alpha(x, t) = G_\alpha(x - t) - s_{n,\alpha,G,D,J}(x, t).$$

Если $g_\alpha(\cdot, t) = 0$ тождественно, то $G_\alpha(y) = s_{n,\alpha,G,D,J}(y + t, t)$ при всех $y \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $c_n(G) = c_n(G_\alpha) = 0$. Тогда $G \in \mathcal{T}_{2n-1}$ по лемме 1. Значит, $g_\alpha(x, t) = 0$ при всех x, t и α , и неравенство (11) тривиально обращается в равенство.

Пусть функция $g_\alpha(\cdot, t)$ ненулевая. Тогда в силу (9)

$$\begin{aligned} Z(g_\alpha(\cdot, t)) &\leq \nu\left(G(\cdot - t) - \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j^{(\alpha)}(t)(G * D)\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right) - T\right) \\ &= \nu(G(\cdot - t) - G(\cdot - t) * K - T), \end{aligned}$$

где $T \in \mathcal{T}_J$, $\widehat{\beta}_n^{(\alpha)}(t) = 0$, $\widehat{\beta}_l^{(\alpha)}(t) = 0$ при всех $l \in J$,

$$K = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j^{(\alpha)}(t) D\left(\cdot + t - \frac{j\pi}{n}\right).$$

По лемме 2 в силу свойства ядра D

$$\nu(G(\cdot - t) - G(\cdot - t) * K - T) \leq 2n.$$

Следовательно, нули $x = t + \xi_\alpha^* + k\pi/n$ функции $g_\alpha(\cdot, t)$ простые, и других нулей у нее нет. Поэтому найдется такое $\varepsilon_\alpha \in \{-1, 1\}$, не зависящее от t , что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_\alpha \sin n(x - t - \xi_\alpha^*) g_\alpha(x, t) \geq 0.$$

Осталось заметить, что в силу непрерывной зависимости ξ_α^* от α ε_α на самом деле не зависит от α .

Пусть $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $c_l(G) \neq 0$ при всех $l \in J$. Возьмем в качестве D ядро Дирихле

$$D_n(u) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{iku}.$$

Тогда $s_{n,\alpha,G,D_n,J}(x, t)$ – тригонометрический многочлен порядка не выше $n - 1$ от $x - t$, интерполирующий функцию G_α в точках $\xi_\alpha^* + k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$s_{n,\alpha,G,D_n,J}(x, t) = \sum_{l=1-n}^{n-1} c_l^{(\alpha)} e^{il(x-t)}, \quad c_l^{(\alpha)} = \frac{1}{2n} e^{-il\xi_\alpha^*} \widehat{\eta}_{l,\alpha,G}.$$

Ввиду леммы 3 по известной теореме Маркова (см., например, [18; с. 69]) этот многочлен является многочленом наилучшего приближения ядра G в пространстве L :

$$s_{n,\alpha,G,D_n,J}(x, t) = T_n(G_\alpha, x - t)_1.$$

Поскольку L -нормы многочленов $T_n(G_\alpha)_1$, $\alpha > 0$, ограничены в совокупности:

$$\|T_n(G_\alpha)_1\|_1 \leq \|T_n(G_\alpha)_1 - G_\alpha\|_1 + \|G_\alpha\|_1 \leq 2\|G_\alpha\|_1 \leq 2\|G\|_1,$$

найдется последовательность α_ν , стремящаяся к нулю, такая, что последовательность $T_n(G_{\alpha_\nu})_1$ сходится (в L). Ее предел является многочленом наилучшего приближения функции G : $T_n(G)_1$. Следовательно, и последовательности коэффициентов $c_l^{(\alpha_\nu)}$ сходятся к некоторым пределам c_l , а тогда и последовательности $\eta_{k,\alpha_\nu,G}$ (линейно выражающиеся через $c_l^{(\alpha_\nu)} e^{-il\xi_{\alpha_\nu}^*}$) сходятся к некоторым пределам $\eta_{k,G}$. Ясно, что если при некотором k функция G непрерывна в точке $\xi^* + k\pi/n$, то $\eta_{k,G} = G(\xi^* + k\pi/n)$.

Так как функция B непрерывна,

$$B_\alpha\left(t + \xi_\alpha^* + \frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} B\left(t + \xi^* + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Значит, при всех x и t существует предел последовательности $s_{n,\alpha_\nu,G,D,J}(x,t)$. Обозначим его через $s_{n,G,D,J}(x,t)$:

$$s_{n,G,D,J}(x,t) = \frac{1}{2n} \sum_{l \in J} \hat{\eta}_{l,G} e^{il(x-t-\xi^*)} + \frac{1}{2n} \sum_{l \in J'_n} \hat{\eta}_{l,G} \frac{\sum_{j=0}^{2n-1} B(x - j\pi/n) e^{i\pi j l/n}}{\sum_{m=0}^{2n-1} B(t + \xi^* + m\pi/n) e^{-i\pi l m/n}}. \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $T_n(G)_1$ единственный, в частности, если $G \in C$, то

$$T_n(G_\alpha)_1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} T_n(G)_1.$$

В общем случае мыслима ситуация, когда разные многочлены наилучшего интегрального приближения G будут частичными пределами $T_n(G_\alpha)_1$ при $\alpha \rightarrow 0+$, хотя реализуется ли она в действительности, неизвестно. Поэтому утверждается лишь о существовании последовательности α_ν , что достаточно для дальнейшего.

ЛЕММА 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \in [1-n : n-1]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $D \in \mathcal{D}_{2n-2}(J)$, $B = G * D \in C$, B удовлетворяет условию (8). Тогда существует такое $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon \sin n(x - t - \xi^*)(G(x - t) - s_{n,G,D,J}(x,t)) \geq 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует сделать предельный переход в неравенстве (11) для $\alpha = \alpha_\nu$ и учесть, что $G_\alpha \rightarrow G$ почти всюду.

3. Неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Пусть n , J , G , D , B такие, как в лемме 4, $\varphi \in L$, $T \in S_{2n-1,B,J}$,

$$f(x) = T(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) G(x - t) dt, \quad (14)$$

Положим

$$X_{n,G,D,J}(f, x) = T(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) s_{n,G,D,J}(x, t) dt. \quad (15)$$

Из формулы (12) ясно, что $X_{n,G,D,J}(f) \in S_{2n-1,B,J}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $J \in [1-n : n-1]$, $-J = J$, $G \in \mathcal{A}_{2n}(J)$, $D \in \mathcal{D}_{2n-2}(J)$, $B = G * D \in C$, B удовлетворяет условию (8), $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi \in L_p$, функции f и φ связаны равенством (14). Тогда

$$\|f - X_{n,G,D,J}(f)\|_p \leq \mathcal{K}_{n,G} \|\varphi\|_p, \quad (16)$$

$$E(f, S_{2n-1,B,J})_p \leq \mathcal{K}_{n,G} E(\varphi, S_{2n-1,D,J})_p, \quad (17)$$

$$E(f, S_{2n-1,B,J})_p \leq \mathcal{K}_{n,G} \|\varphi\|_p. \quad (18)$$

При $p = 1$ и $p = \infty$ константу в неравенствах (16)–(18) на классе функций $f = \varphi * G$, $\varphi \perp S_{2n-1,B,J}$, уменьшить нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Запишем

$$f(x) - X_{n,G,D,J}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)(G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)) dt.$$

Сначала докажем неравенство (16) при $p = \infty$. Пусть $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - X_{n,G,D,J}(f, x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} \sin n(x-t-\xi^*) (G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)) dt \right|. \end{aligned}$$

Так как $c_{(2l+1)n}(s_{n,G,D,J}(x, \cdot)) = 0$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - X_{n,G,D,J}(f, x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} \sin n(x-t-\xi^*) G(x-t) dt \right| = \mathcal{K}_{n,G},$$

откуда и следует (16).

Докажем неравенство (16) при $p = 1$. Пусть $\|\varphi\|_1 \leq 1$. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} \|f - X_{n,G,D,J}(f)\|_1 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)| |G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)| dt dx \\ &\leq \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} \sin n(x-t-\xi^*) (G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)) dx \right|. \end{aligned}$$

Так как $c_{(2l+1)n}(s_{n,G,D,J}(\cdot, t)) = 0$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f - X_{n,G,D,J}(f)\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign} \sin n(u - \xi^*) G(u) du \right| = \mathcal{K}_{n,G}.$$

Неравенство (16) при $1 < p < \infty$ следует из доказанного неравенства при $p = 1$ и $p = \infty$ и интерполяционной теоремы (см., например, [19; с. 144]).

2. Пусть $T_{2n-1,D,J}(\varphi)_p$ – элемент наилучшего приближения φ в $S_{2n-1,D,J}$. Ясно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(t) - T_{2n-1,D,J}(\varphi, t)_p) (G(x-t) - s_{n,G,D,J}(x, t)) dt = f(x) - R(x),$$

где $R \in S_{2n-1,B,J}$. Дальнейшая часть доказательства неравенства (17) такая же, как и (16).

Неравенство (18) следует из (16) или (17).

3. При $p = 1$ точность неравенства (18), а следовательно, и неравенств (16) и (17), доказывается (см. [3]) с помощью функций

$$\varphi_{1h}(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k F_h \left(t - \frac{k\pi}{n} \right),$$

где F_h – ядро Стеклова: $F_h(t) = 0$, если $h/2 \leq |t| \leq \pi$; $F_h(t) = 1/h$, если $0 \leq |t| < h/2$; а также сдвигов φ_{1h} .

При $p = \infty$ экстремалью является функция $\varphi_\infty(t) = \text{sign} \sin nt$ и ее сдвиги; докажем это. Положим $f_\infty = \varphi_\infty * G$. Если функция $P \in C$ такова, что

$$\|f_\infty - P\|_\infty < \|f_\infty\|_\infty = \mathcal{K}_{n,G},$$

то P принимает значения с чередующимися знаками в $2n$ равноотстоящих точках – экстремумах функции f_∞ . Тогда при некотором λ и достаточно малых h будет $\int_{-\pi}^{\pi} P(t)\varphi_{1h}(t+\lambda) dt > 0$. Следовательно, $P \notin S_{2n-1,B,J}$, так как $S_{2n-1,B,J} \perp e^{i(2l+1)n(\cdot)}$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, а $c_k(\varphi_{1h}) = 0$ при $k \neq (2l+1)n$. Значит,

$$E(f_\infty, S_{2n-1,B,J})_\infty = \mathcal{K}_{n,G}. \quad (19)$$

(Если $S_{2n-1,B,J}$ – чебышевская система, то для доказательства равенства (19) можно применить теорему Валле–Пуссена; см. [18; с. 83]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Положим

$$\Psi_{l,B}(t) = \left(\sum_{m=0}^{2n-1} B\left(t + \xi^* + \frac{m\pi}{n}\right) e^{-i\pi lm/n} \right)^{-1}.$$

Из формул (12) и (15) следует, что если $T \perp e^{il(\cdot)}$ и $\varphi \perp e^{il(\cdot)}$ при некотором $l \in J$, то $X_{n,G,D,J}(f) \perp e^{il(\cdot)}$, а если $T \perp e^{il(\cdot)}$ и $\varphi \perp \Psi_{l,B}$ при некотором $l \in J'_n$, то $X_{n,G,D,J}(f) \perp \Phi_{l,B}$. В частности, если $T = 0$, $\varphi \perp e^{il(\cdot)}$ при всех $l \in J$, $\varphi \perp \Psi_{l,B}$ при всех $l \in J'_n$, то $X_{n,G,D,J}(f) = 0$ и неравенство (16) переписывается в виде

$$\|f\|_p \leq \mathcal{K}_{n,G} \|\varphi\|_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В [9] (см. там же историю вопросов, относящихся к вычислению поперечников) доказано следующее утверждение. Пусть $J = \emptyset$ или $J = \{0\}$, $G \in C$, при всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $0 \leq x_1 < \dots < x_m < 2\pi$ множества

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \beta_j G(\cdot - x_j) : \beta_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad J = \emptyset,$$

$$\left\{ \beta + \sum_{j=1}^m \beta_j G(\cdot - x_j) : \beta_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^m \beta_j = 0 \right\}, \quad J = \{0\},$$

имеют размерность m и являются слабыми чебышевскими системами (WT -системами) при нечетных m . Тогда при $p = 1$ и $p = \infty$ $(2n-1)$ -мерный поперечник по Бернштейну (а также по Колмогорову, Гельфанду и линейный), и $2n$ -мерные поперечники по Колмогорову и Гельфанду (а также линейный) классов сверток равны $\mathcal{K}_{n,G}$. В качестве экстремального $(2n-1)$ -мерного подпространства для поперечников по Колмогорову и линейных поперечников указано $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Из перечисленных условий на G вытекает, что $G \in CVD_{2m}(J)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и, следовательно, ядро G удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом, указан широкий класс подпространств, реализующих поперечники по Колмогорову и линейные поперечники классов сверток.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Ввиду неравенства (13) в качестве интерполирующего агрегата ядра $G(x-t)$ наряду с $s_{n,G,D,J}(x,t)$ можно использовать также и последовательность $r_{n,G,D,J}(x,t) = s_{n,G,D,J}(-t,-x)$. При каждом $t \in \mathbb{R}$ функция $r_{n,G,D,J}(\cdot, t)$ принадлежит пространству

$$R_{2n-1,B,J} = \left\{ \sum_{j \in J} \gamma_j e^{-ij(\cdot)} + \sum_{l \in J'_n} d_l \Psi_{l,B}(-\cdot) : \gamma_{-j} = \bar{\gamma}_j, d_{-l} = \bar{d}_l \right\},$$

которое, таким образом, также является экстремальным. При $D = D_n$ оба пространства $S_{2n-1,B,J}$ и $R_{2n-1,B,J}$ совпадают с $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Если $D = D_n$, то получаются известные результаты о приближении классов сверток тригонометрическими многочленами.

ПРИМЕР 2. При $J = \{0\}$, $G = d_r$, $D = d_{\mu+1-r}$ получаются результаты из [14] о приближении классов r раз дифференцируемых функций $(2n-1)$ -мерными подпространствами $2n$ -мерных пространств сплайнов порядка $\mu \geq r$ минимального дефекта с узлами $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$. При этом сплайновые операторы сходятся к полиномиальному, когда порядок сплайна стремится к бесконечности (например, по норме операторов из L в C).

Сформулируем два обобщения этого свойства.

ПРИМЕР 3. Пусть $G \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, $B_\mu = G * d_\mu$, $S_{2n-1,B_1,\{0\}}$ – чебышевская система. Тогда

$$X_{n,G,B_\mu,\{0\}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} X_{n,G,D_n,\{0\}}.$$

Действительно, в силу теоремы Ролля $S_{2n-1,B_\mu,\{0\}}$ – тоже чебышевская система, что обеспечивает выполнение условия (8) и возможность построения операторов $X_{n,G,B_\mu,\{0\}}$. Достаточно установить, что $s_{n,G,B_\mu,\{0\}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} s_{n,G,D_n,\{0\}}$ равномерно по двум переменным. Это (см. формулу (12)) вытекает из того, что

$$\frac{\Phi_{l,B_\mu}(x)}{2nc_l(B_\mu)} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} e^{ilx}$$

равномерно при всех l таких, что $0 < |l| < n$. Последнее очевидно, так как

$$\frac{1}{2n} \Phi_{l,B_\mu}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{l+2nq}(B_\mu) e^{i(l+2nq)x},$$

а $c_l(B_\mu) = c_l(G)/(il)^\mu$.

ПРИМЕР 4. Пусть $G \in \mathcal{A}_{2n}(\{J\}) \cap \mathcal{A}_{2n-2}(\{J\})$, $G_\mu = G * \dots * G$ (μ раз), $G_2 \in C$, $S_{2n-1,G_2,J}$ – чебышевская система, $|c_l(G)| > |c_q(G)|$ при всех $l \in J'_n$, $|q| > n$. Тогда

$$X_{n,G,G_\mu,J} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} X_{n,G,D_n,J}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Некоторые неравенства для коэффициентов Фурье функции из $CVD_{2n}(\emptyset)$ содержатся в [17].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Следующее обобщение теоремы 1 имеет приложения к “классическим” ядрам, однако, по-видимому, ранее не отмечалось даже для приближений тригонометрическими многочленами. Сумма ядер, не увеличивающих осцилляцию, может увеличивать осцилляцию. Тем не менее, неравенства теоремы 1 могут выполняться для конических комбинаций ядер, не увеличивающих осцилляцию.

Пусть Λ – пространство с мерой μ , при всех $\lambda \in \Lambda$ функции $G_\lambda \in \mathcal{A}_{2n}(J) \cap C$, $G_\lambda(x)$ суммируема на Λ как функция аргумента λ при всех $x \in \mathbb{R}$, $G_\lambda(x)$ суммируема на $[0, \pi] \times \Lambda$ как функция двух аргументов x и λ , ξ_{n, G_λ}^* не зависит от λ ; $G = \int_\Lambda G_\lambda d\mu(\lambda)$, функции $D_\lambda \in \mathcal{D}_{2n-2}(J)$ таковы, что функция $B = G_\lambda * D_\lambda$ не зависит от λ , непрерывна и удовлетворяет условию (8), функция $D \in L$ определяется равенством $B = G * D$. Пусть также ε в лемме 4 для функций G_λ и D_λ не зависит от λ . Положим

$$s_{n, G, D, J}(x, t) = \int_\Lambda s_{n, G_\lambda, D_\lambda, J}(x, t) d\mu(\lambda).$$

Тогда справедливы утверждения, аналогичные теореме 1 и замечаниям 4 и 6.

Доказательство теоремы 1 с небольшими изменениями сохраняет силу.

Условия на функции D_λ (т.е. в конечном счете на приближающее подпространство) очень ограничительны, однако приближение тригонометрическими многочленами (т.е. когда $D_\lambda \in \mathcal{T}_{2n-1}$, $c_k(D_\lambda) = 1/(c_k(G_\lambda))$ при $k \in J'_n$) охватывается этим замечанием. В частности, теорема 1 справедлива для ядер вида

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}, \quad \text{где} \quad a_k = \int_0^{+\infty} e^{-k^2 \lambda} d\Phi(\lambda) \quad \text{при} \quad |k| \geq n, \quad (20)$$

Φ – возрастающая на $(0, +\infty)$ функция такая, что интегралы конечны. Ядро Пуассона $P_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|\alpha} e^{ikt}$ имеет указанный вид, так как

$$e^{-|k|\alpha} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k^2 \lambda} e^{-\alpha^2/(4\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}},$$

но оно увеличивает осцилляцию при α , достаточно близких к 1 [20]. Теорема 1 для приближения интегралов Пуассона тригонометрическими многочленами хорошо известна, так как последовательность коэффициентов Фурье ядра Пуассона удовлетворяет условию Нады трехкратной монотонности (см. [18; с. 91–92]). Вместе с тем, последовательности вида (20) не обязаны быть выпуклыми (как в случае ядра теплопроводности).

4. Неравенства со вторым модулем непрерывности. Пусть

$$\omega_2(f, h)_p = \sup_{0 \leq t \leq h} \|f(\cdot - t) - 2f(\cdot) + f(\cdot + t)\|_p$$

– модуль непрерывности второго порядка функции f в L_p ,

$$S_{h,1}(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t) dt, \quad S_{h,2}(f) = S_{h,1}(S_{h,1}(f))$$

– средние Стеклова функции f .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $D \in \mathcal{D}_{2n-2}(\{0\})$, функции $\Phi_{l,D}$ ненулевые при всех $l \in [1-n : n-1] \setminus \{0\}$, $B = d_2 * D$, $h > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$. Тогда

$$\|f - X_{n,d_2,D,\{0\}}(S_{h,2}(f))\|_p \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8n^2h^2}\right) \omega_2(f, h)_p.$$

В частности,

$$\|f - X_{n,d_2,D,\{0\}}(S_{\pi/2n,2}(f))\|_p \leq 1 \cdot \omega_2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_p. \quad (21)$$

Кроме того,

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sup_{f \in C} \frac{E(f, S_{2n-1,B,\{0\}})_\infty}{\omega_2(f, \pi/2n)_\infty} \leq 1. \quad (22)$$

Из соотношения (22) вытекает, что при $p = \infty$ константу 1 в неравенстве (21) нельзя уменьшить для всех n одновременно, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение пространством $S_{2n-1,B,\{0\}}$.

Для приближений тригонометрическими многочленами оценки сверху получены Жуком [21], оценка снизу – Шалаевым [22] (см. также [23; с. 321–322]); оценки сверху для приближений операторами общего вида (в частности, сплайнами) – Виноградовым и Жуком [24]. Оценка из (22) снизу для сплайнов анонсирована в [25].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем, что $S_{2n-1,B,\{0\}}$ – чебышевская система размерности $2n-1$. Так как функции $\Phi_{l,B}$ и 1 ненулевые и имеют непересекающиеся спектры, они линейно независимы, т.е. размерность $S_{2n-1,B,\{0\}}$ равна $2n-1$. По обобщенной теореме Ролля (см. [7; с. 21]) и в силу условия на ядро D для всех $\beta_j \in \mathbb{R}$, таких, что $\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_0 = 0$, не равных нулю одновременно, будет

$$z\left(\beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\right) \leq \nu\left(\sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j D\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\right) \leq 2n-2.$$

Следовательно, $S_{2n-1,B,\{0\}}$ – чебышевская система.

Так как $d_2 \in \mathcal{A}_{2n}(\{0\})$, для любой $g \in W_p^{(2)}$

$$\|g - X_{n,d_2,D,\{0\}}(g)\|_p \leq \frac{\pi^2}{8n^2} \|g''\|_p.$$

Оценка сверху получается известным методом с помощью неравенств

$$\begin{aligned} \|f - S_{h2}(f)\|_p &\leq \frac{1}{2} \omega_2(f, h)_p, \\ \|S_{h2}(f) - X_{n,d_2,D,\{0\}}(S_{h,2}(f))\|_p &\leq \frac{\pi^2}{8n^2} \|S''_{h,2}(f)\|_p \leq \frac{\pi^2}{8n^2h^2} \omega_2(f, h)_p. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $b \in (0, (2\varepsilon)/n^2)$, $x_0 = 0$, $x_k = k\pi/n - (n-k)b$ и $x_{-k} = x_k$ при $k \in [1 : n]$. В [22] (см. также [23; с. 321–322]) были построены функции $f^* = f_{n,b}^* \in C$ со следующими свойствами: $\omega_2(f^*, \pi/(2n)) = 1$ и

$$f^*(x_k) - \frac{1}{2n} D_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{1}{2n}\right), \quad k \in [-n : n] \quad (23)$$

(D_n – ядро Дирихле). Покажем, что функции f^* являются экстремальными и в неравенстве (21). Положим

$$D_{n,B}(u) = 1 + \sum_{\substack{l=1-n \\ l \neq 0}}^{n-1} \frac{\Phi_{l,B}(u)}{\Phi_{l,B}(0)}.$$

Функция $D_{n,B}$ играет для пространства $S_{2n-1,B,\{0\}}$ ту же роль, что ядро Дирихле для пространства $\mathcal{T}_{2n-1}$. Ясно, что $D_{n,B}(k\pi/n) = D_n(k\pi/n)$ при всех целых k . Поэтому равенства (23) останутся верными, если D_n заменить на $D_{n,B}$. Так как функция $D_{n,B}$ непрерывна, найдется такое b , что

$$\left| D_{n,B}(x_k) - D_{n,B}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } k.$$

Следовательно, при таком b разность $f^* - 1/(2n)D_{n,B}$ принимает в $2n$ точках промежутка $(-\pi, \pi]$ с чередующимися знаками значения, по абсолютной величине большие, чем $1 - 1/(2n) - \varepsilon$. К подпространству $S_{2n-1,B,\{0\}}$ применима теорема Валле–Пуассона об оценке наилучшего приближения, согласно которой

$$E(f^*, S_{2n-1,B,\{0\}})_\infty > 1 - \frac{1}{2n} - \varepsilon,$$

что и доказывает оценку (22) снизу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Favard, “Sur les meilleurs procédés d’approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques”, *Bull. Sci. Math.* (2), **61** (1937), 209–224; 243–256.
- [2] Н. Ахиезер, М. Крейн, “О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций”, *Докл. АН СССР*, **15** (1937), 107–111.
- [3] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10** (1946), 207–256.
- [4] В. М. Тихомиров, “Наилучшие методы приближения и интерполирования функций в пространстве $C_{[-1,1]}$ ”, *Матем. сб.*, **80:2** (1969), 290–304.
- [5] N. P. Korneichuk, “Exact error bound of approximation by interpolating splines on L -metric on the classes W_p^r ($1 \leq p < \infty$) of periodic functions”, *Anal. Math.*, **3:2** (1977), 109–117.
- [6] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [7] Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения*, Наука, М., 1984.
- [8] A. A. Ligun, “Inequalities for upper bounds of functionals”, *Anal. Math.*, **2:1** (1976), 11–40.
- [9] A. Pinkus, *n -Widths in Approximation Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1985.
- [10] В. М. Тихомиров, “Об экстремальных подпространствах для классов функций, задаваемых ядрами, не повышающими осцилляцию”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, № 4, 16–19.
- [11] В. Ф. Бабенко, “Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок”, *Докл. АН СССР*, **290:5** (1986), 1033–1036.
- [12] В. Ф. Бабенко, “Приближение классов свертки”, *Сиб. матем. журн.*, **28:5** (1987), 6–21.
- [13] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теории наилучших приближений”, *УМН*, **15:3** (1960), 81–120.

- [14] О.Л. Виноградов, “Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта”, *Проблемы матем. анализа*, **25** (2003), 29–56.
- [15] В.Л. Великин, “О предельной связи между приближениями периодических функций сплайнами и тригонометрическими полиномами”, *Докл. АН СССР*, **258**:3 (1981), 525–529.
- [16] Т.Х. Нгуен Тхи, “Оператор $D(D^2 + 1^2) \cdots (D^2 + n^2)$ и тригонометрическая интерполяция”, *Anal. Math.*, **15**:4 (1989), 291–306.
- [17] S. Karlin, *Total Positivity*, V. 1, Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1968.
- [18] А.Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
- [19] А. Зигмунд, *Т. 2*, Мир, М., 1965.
- [20] А.К. Кушпель, “Точные оценки поперечников классов сверток”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:6 (1988), 1305–1322.
- [21] В.В. Жук, “О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 1974, № 1, 21–26.
- [22] В.В. Шалаев, “К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами”, *Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям*, Вып. 8, ДГУ, Днепропетровск, 1977, 39–43.
- [23] В.В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1982.
- [24] О.Л. Виноградов, В.В. Жук, “Точные оценки отклонений линейных методов приближения периодических функций посредством линейных комбинаций модулей непрерывности различных порядков”, *Проблемы матем. анализа*, **25** (2003), 57–97.
- [25] О.Л. Виноградов, “Точное неравенство типа Джексона для приближений сплайнами и второго модуля непрерывности”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы (Саратов, 27 января – 3 февраля 2004 г.), Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, Саратов, 2004, 45–46.

О. Л. Виноградов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило

05.05.2005

Исправленный вариант

15.05.2008