Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, Н. В. Якубовский, Модули Шмидта и их некоторые применения, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 681–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:50:54

Модули Шмидта и их некоторые применения

В. А. Ведерников, Н. В. Якубовский

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Неполупростой правый R -модуль $M = M_R$ назовем (правым) модулем Шмидта, если каждый собственный (правый) подмодуль из M полупрост, и модуль M назовем (правым) обобщенным модулем Шмидта, если M не является модулем Шмидта, а каждый его собственный (правый) подмодуль либо полупрост, либо – модуль Шмидта. Аналогично определяется левый R -модуль Шмидта и левый обобщенный R -модуль Шмидта.

В работе получено полное описание строения правых R -модулей Шмидта и обобщенных R -модулей Шмидта, установлено существование подмодулей Шмидта в любом неполупростом артиновом модуле и дано полное описание неполупростых артиновых модулей, в которых каждый подмодуль Шмидта выделяется прямым слагаемым. В качестве следствий в работе получены характеристики (обобщенных) модулей Шмидта над Дедекиндовым кольцом и кольцом матриц над ним.

Библиография: 9 названий.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс алгебр. При исследовании свойств $\mathfrak{X}$ -алгебр существенную роль играют критические $\mathfrak{X}$ -алгебры, т.е. $\mathfrak{X}$ -алгебры, не обладающие некоторым свойством θ , все собственные $\mathfrak{X}$ -подалгебры которых этим свойством обладают. Так в работе [1] исследованы конечные ненильпотентные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Эти группы нашли многочисленные применения в теории групп и впоследствии были названы *группами Шмидта* (см. [2], [3]). Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Неполупростой правый R -модуль $M = M_R$ назовем (*правым*) *модулем Шмидта*, если каждый собственный (правый) подмодуль из M полупрост и модуль M назовем (*правым*) *обобщенным модулем Шмидта*, если M не является модулем Шмидта, а каждый его собственный (правый) подмодуль либо полупрост, либо – модуль Шмидта. Аналогично определяется левый R -модуль Шмидта и левый обобщенный R -модуль Шмидта. В работе показано, что классы модулей Шмидта и обобщенных модулей Шмидта непусты (см. пример 1 и примеры 2–4 соответственно) и различны (теорема 1, следствие 1 и теорема 2).

Цель настоящей работы – дать полное описание строения правых R -модулей Шмидта и обобщенных R -модулей Шмидта, установить существование подмодулей Шмидта в любом неполупростом артиновом модуле и применить подмодули Шмидта к описанию строения некоторых артиновых модулей.

Обозначения и определения, не приведенные в работе, можно найти в книгах [4]–[9]. В дальнейшем, если не оговорено противное, под R -модулем будем подразумевать правый R -модуль и применять следующие обозначения: через $A \leq M$, $A < M$ и $A \leq^b M$ будем обозначать соответственно: A – подмодуль модуля M , A – собственный подмодуль модуля M и A – максимальный подмодуль модуля M ; через $A <^b M$ и $A <_s M$ будем обозначать соответственно: A – существенный или большой (big) подмодуль модуля M и A – косущественный или малый (small) подмодуль модуля M . Собственный подмодуль A модуля M будем называть *наибольшим* (greatest) собственным подмодулем модуля M , если любой собственный подмодуль из M содержится в A , и будем обозначать $A <^g M$. Под *локальным* понимается модуль (не обязательно конечно порожденный), обладающий единственным максимальным подмодулем. Радикал модуля M , обозначаемый через $\text{Rad}(M)$, определяется как пересечение всех максимальных подмодулей M , или, что то же самое, как сумма всех косущественных (малых) подмодулей M .

ЛЕММА 1. *Ненулевой модуль $M = M_R$ локален и цикличесок тогда и только тогда, когда $\text{Rad}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $M = M_R$ – ненулевой циклический локальный модуль. Так как M локален, то $\text{Rad}(M)$ – единственный максимальный подмодуль в M . Поскольку M цикличесок, то по теореме 2.3.11 из [4] каждый собственный подмодуль из M лежит в $\text{Rad}(M)$, т.е. $\text{Rad}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M .

Достаточность. Пусть $M = M_R$ – модуль и $\text{Rad}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M . Тогда $\text{Rad}(M)$ – единственный максимальный подмодуль в M , т.е. M – локальный модуль. Пусть x принадлежит M и $x \notin \text{Rad}(M)$. Поскольку мы рассматриваем кольца с единицей, то $xR \not\subseteq \text{Rad}(M)$. Отсюда следует, что $xR = M$, т.е. M – циклический модуль. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие циклическости в лемме 1 является необходимым. Например, $\mathbb{Z}$ -модуль $M = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \oplus (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$ является локальным с единственным максимальным подмодулем $\text{Rad}(M) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, который не является наибольшим собственным подмодулем в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неполупростой модуль $M = M_R$ назовем *модулем Шмидта*, если каждый его собственный подмодуль полупрост.

ПРИМЕР 1. Модулем Шмидта является, модуль $M = (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$, где p – простое число.

ЛЕММА 2. *Пусть $M = M_R$ – ненулевой модуль. Каждый собственный подмодуль в M полупрост тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- 1) M – ненулевой полупростой модуль;
- 2) M – модуль Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть в ненулевом модуле $M = M_R$ каждый собственный подмодуль полупрост. Если $\text{Soc}(M) = M$, то M – полупростой модуль. Пусть $\text{Soc}(M) < M$. Тогда M – неполупростой модуль, а все собственные подмодули из M полупросты и, значит, по определению 1 M – модуль Шмидта.

Достаточность. Если $M = M_R$ – ненулевой полупростой модуль, то по следствию 8.1.5 из [4] каждый собственный подмодуль в M полупрост. Если M – модуль Шмидта, то по определению 1 каждый собственный подмодуль в M полупрост. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного модуля $M = M_R$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) M является модулем Шмидта;
- 2) $\text{Soc}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M ;
- 3) M – неполупростой локальный циклический модуль, и $\text{Rad}(M)$ полупрост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть M – модуль Шмидта. Тогда имеем следующее: $\text{Soc}(M) \neq M$, каждый собственный подмодуль из M полупрост и поэтому содержится в $\text{Soc}(M)$. Следовательно, $\text{Soc}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M .

2) $\Rightarrow$ 3) Так как $\text{Soc}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M , то $\text{Soc}(M) = \text{Rad}(M)$. Поэтому $\text{Rad}(M)$ полупрост, а по лемме 1 M – локальный циклический модуль. При этом M не является полупростым, так как $\text{Soc}(M) < M$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть M – локальный циклический подмодуль, не являющийся полупростым, и $\text{Rad}(M)$ – полупростой модуль. По лемме 1 $\text{Rad}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M . Тогда по следствию 8.1.5 из [4] каждый собственный подмодуль в M полупрост и по определению 1 M – модуль Шмидта. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если M – модуль Шмидта, то модуль M не представим в виде суммы собственных подмодулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по теореме 1 каждый собственный подмодуль модуля M содержится в $\text{Soc}(M) <^g M$, то сумма любой совокупности собственных подмодулей в M содержится в $\text{Soc}(M) \neq M$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если M – модуль Шмидта, то имеем $\text{Soc}(M) = \text{Rad}(M) \neq 0$, $\text{Soc}(M) <_s M$, $\text{Soc}(M) < \cdot M$ и $\text{Soc}(M) <^b M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 $\text{Soc}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M . Поэтому $\text{Soc}(M)$ – единственный максимальный подмодуль в M и, значит, $\text{Rad}(M) = \text{Soc}(M)$. Так как M – неполупростой модуль, а $M/\text{Rad}(M)$ – простой модуль, то $\text{Rad}(M) \neq 0$. Кроме того, из $\text{Soc}(M) + U = M$ следует $U = M$ и из $\text{Soc}(M) \cap U = 0$ следует, что $U = 0$. Поэтому $\text{Soc}(M) <_s M$ и $\text{Soc}(M) <^b M$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любой ненулевой эпиморфный образ модуля Шмидта либо прост, либо является модулем Шмидта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M_R$ – модуль Шмидта, $\varphi(M) = N$ – его ненулевой эпиморфный образ и $K = \text{Ker}(\varphi)$. Тогда $M/K \cong N \neq 0$ и по теореме 1 $K \leq \text{Soc}(M)$. Если $K = \text{Soc}(M)$, то в силу следствия 2 M/K , а значит, и N являются простыми модулями. Если $K < \text{Soc}(M) = \text{Rad}(M)$, то по теореме 9.2.1 (h) из [4] $\text{Rad}(M)/K \leq \text{Rad}(M/K)$. Так как $\text{Rad}(M)/K < \cdot M/K$, то $\text{Rad}(M/K) = \text{Rad}(M)/K \neq 0$. Пусть

$L/K < M/K$. Тогда $L < M$ и, значит, по теореме 1 $L \leq \text{Soc}(M)$. Так как L полупрост, то по следствию 8.1.5 из [4] и L/K полупрост. Тогда по лемме 2 M/K , а значит, и N являются модулями Шмидта. Следствие доказано.

Из теоремы 1 также можно вывести описание строения модулей Шмидта в некоторых конкретных случаях, в частности над *дедекиндовыми кольцами*. Вначале докажем вспомогательное

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Произвольная область целостности R не содержит собственных минимальных идеалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – область целостности, и пусть $I = x_0 R$, где $x_0 \in R$, $x_0 \neq 0$, – собственный главный идеал. Рассмотрим модули R_R и I_R и отображение $\varphi: R_R \rightarrow I_R$, заданное равенством $\varphi(r) = x_0 r$. Легко проверяется, что φ – модульный эпиморфизм. Пусть $r_0 \in \text{Ker } \varphi$. Тогда $\varphi(r_0) = x_0 r_0 = 0$. Поскольку R – область целостности, то $r_0 = 0$, откуда следует, что $\text{Ker } \varphi = 0$ и $I_R \cong R_R$. Теперь ясно, что модуль I_R не может быть простым, т.е. идеал I не может быть минимальным. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть R – дедекиндово кольцо, не являющееся простым. Модуль $M = M_R$ является модулем Шмидта тогда и только тогда, когда $M \cong R/\mathfrak{p}^2$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть R – дедекиндово кольцо, не являющееся простым кольцом, M_R – модуль Шмидта. Так как по теореме 1 M_R конечно порожден, по утверждению 8.23.9 (b) [7] $M_R = N_R \oplus (I_1)_R \oplus \dots \oplus (I_k)_R$, где N_R – периодический модуль, а (I_j) – правый идеал в R , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Так как по следствию 1 M_R неразложим, то $M_R \cong N_R$ или $M_R \cong I_R$ для некоторого $I \triangleleft R$. Однако во втором случае получаем, что модуль R_R содержит собственный простой подмодуль (точнее – простой подмодуль из разложения $\text{Rad}(M)_R$), т.е. R содержит собственный минимальный идеал, что противоречит выше доказанному утверждению. Таким образом, получаем, что M_R – периодический модуль. По предложению 23 [8; гл. VII, § 5, п°2] получаем (учитывая, что M неразложим): $M \cong R/\mathfrak{p}^n$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R . Так как $\text{Rad}(M) \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n$ и по теореме 1 $\text{Rad}(M)$ – полупростой модуль, получаем, что $n = 2$.

Достаточность очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Абелева группа A является $\mathbb{Z}$ -модулем Шмидта тогда и только тогда, когда $A \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, где p – простое число.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неполупростой модуль $M = M_R$ назовем *обобщенным модулем Шмидта*, если M не является модулем Шмидта, а каждый его собственный подмодуль либо полупрост, либо – модуль Шмидта.

ЛЕММА 3. *Пусть $M = M_R$ – обобщенный модуль Шмидта. Тогда выполняются следующие утверждения:*

- 1) *M содержит подмодуль Шмидта, причем каждый подмодуль Шмидта максимален в M ;*
- 2) *модуль M конечно порожден;*
- 3) *среди максимальных подмодулей модуля M не более одного полупростого подмодуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как M не является модулем Шмидта, в силу определений 1 и 2 в M существует собственный подмодуль Шмидта A . Допустим, что A не является максимальным подмодулем в M . Тогда существует $B < M$ такой, что $A < B$. Так как M – обобщенный модуль Шмидта, по определению 2 B полупрост или модуль Шмидта, и в любом случае A полупрост, что противоречит определению 1. Следовательно, A является максимальным подмодулем в M .

2) По пункту 1) M содержит максимальный подмодуль Шмидта A . Пусть $x \in M \setminus A$. Тогда $M = A + xR$. По теореме 1 A – циклический модуль. Тогда существует $a \in A$ такой, что $A = aR$ и $M = aR + xR$ конечно порожден.

3) Допустим, что среди максимальных подмодулей модуля M имеется два различных полупростых подмодуля C и D . Тогда $M = C + D$ и по следствию 8.1.5 из [4] модуль M полупрост, что противоречит определению 2. Следовательно, среди максимальных подмодулей модуля M не более одного полупростого подмодуля. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Применяя результаты леммы 3, естественно классифицировать обобщенные модули Шмидта по количеству и типу их максимальных подмодулей.

ЛЕММА 4. Пусть $M = M_R$ – обобщенный модуль Шмидта. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) M содержит единственный максимальный подмодуль K , причем K – модуль Шмидта. В этом случае назовем M обобщенным модулем Шмидта 1-типа;
- 2) M содержит максимальный подмодуль P , причем P полупрост. В этом случае назовем M обобщенным модулем Шмидта 2-типа;
- 3) M содержит более одного максимального подмодуля, причем каждый из них является модулем Шмидта. В этом случае назовем M обобщенным модулем Шмидта 3-типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M_R$ – обобщенный модуль Шмидта. Тогда по лемме 4 M содержит максимальный подмодуль Шмидта K . Если M локален, то выполняется утверждение 1). Пусть M не является локальным. По лемме 4 среди максимальных подмодулей модуля M не более одного полупростого подмодуля. Если M содержит максимальный подмодуль P такой, что P полупрост, то выполняется утверждение 2). Если M не содержит максимальный полупростой подмодуль, то выполняется утверждение 3). Лемма доказана.

Укажем конкретные примеры обобщенных модулей Шмидта различных типов.

ПРИМЕР 2. Модуль $M = (\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$, где p – простое число, является обобщенным модулем Шмидта 1-типа.

ПРИМЕР 3. Модуль $M = (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \oplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$, где p и q – простые числа, является обобщенным модулем Шмидта 2-типа. Заметим, что не обязательно $p \neq q$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим матричное кольцо

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in F_2, b, c \in F_4 \right\},$$

где F_q – поле Галуа из q элементов, причем $F_4 = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$. Теперь возьмем правый R -модуль

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in F_4 \right\}.$$

Покажем, что M является обобщенным модулем Шмидта 3-типа.

Перечислим все его собственные подмодули. Множество элементов

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in F_4 \right\}$$

не является подмодулем в M . Действительно, если $x_0 \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin K.$$

Пусть D – ненулевой подмодуль в M . Тогда D содержит матрицу с ненулевым вторым столбцом. Пусть

$$d = \begin{pmatrix} * & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D, \quad \gamma \neq 0.$$

Тогда для любого $x \in F_4$ существует $\delta \in F_4$ такое, что $x = \delta\gamma$. Пусть

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in R.$$

Тогда

$$dr = \begin{pmatrix} * & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D.$$

Пусть D_{ij} – множество всех элементов из F_4 , встречающихся в матрицах из D в i -й строке в j -м столбце. Следовательно, $D_{12} = F_4$. Поэтому подмодуль

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in F_4 \right\}$$

содержится в D . Так как N порождается любым своим ненулевым элементом, то N является простым подмодулем в M . Если $D_{11} = \{0\}$, то $D = N$. При $D_{11} = F_4$ получим $D = M$. Так как D_{11} – подгруппа аддитивной группы F_4 , то для D_{11} имеются еще лишь следующие возможности:

- 1) $D_{11} = \{0, 1\}$; тогда $D = M_1$ и $N < M_1 < M$;
- 2) $D_{11} = \{0, \alpha\}$; тогда $D = M_2$ и $N < M_2 < M$;
- 3) $D_{11} = \{0, 1 + \alpha\}$; тогда $D = M_3$ и $N < M_3 < M$.

Ясно, что M_i является максимальным подмодулем в M . Так как N содержится в каждом ненулевом подмодуле из M , то M_i не является полупростым модулем, а из $|M_i| = 8$ и $|N| = 4$ следует, что N – единственный максимальный подмодуль из M_i для всех $i \in \{1, 2, 3\}$. Следовательно, M_i – модуль Шмидта для всех $i \in \{1, 2, 3\}$, а M – обобщенный модуль Шмидта 3-типа.

ТЕОРЕМА 2. *Модуль $M = M_R$ является обобщенным модулем Шмидта тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

- 1) M – локальный циклический модуль и $\text{Rad}(M)$ – модуль Шмидта;
- 2) $M = S \oplus P$, где S – модуль Шмидта, P – простой модуль;
- 3) $M = S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 – подмодули Шмидта, $S_1 \cap S_2 = \text{Rad}(M)$ и каждый подмодуль из M , не содержащийся в $\text{Rad}(M)$, неразложим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть M – обобщенный модуль Шмидта. По лемме 4 M конечно порожден и содержит подмодуль Шмидта, причем каждый подмодуль Шмидта максимален в M .

Пусть M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа. Тогда по лемме 4 $\text{Rad}(M) < M$ – модуль Шмидта, и M локален. Так как M локален и конечно порожден, отсюда следует, что M циклический. Следовательно, выполняется утверждение 1).

Пусть M – обобщенный модуль Шмидта 2-типа, N и S – максимальные подмодули в M , причем N – полупростой и S – подмодуль Шмидта модуля M . Пусть $D = S \cap N$. Так как N полупрост, существует $P < N$ такой, что $N = D \oplus P$. Тогда $M = S + N = S + (D \oplus P) = S \oplus P$. Так как $S < M$, то $P \cong M/S$ – простой модуль. Следовательно, выполняется утверждение 2).

Пусть M – обобщенный модуль Шмидта 3-типа. По лемме 4 M содержит более одного максимального подмодуля, причем каждый из них является модулем Шмидта. Пусть S_1 и S_2 – различные максимальные подмодули Шмидта модуля M . Тогда $M = S_1 + S_2$. По теореме 1 модуль Шмидта циклический, поэтому существуют $a_i \in S_i$ такие, что $S_i = a_i R$, ($i = 1, 2$). Тогда $M = a_1 R + a_2 R$ и, значит, модуль M конечно порожден. Так как $M/S_2 \cong S_1/S_1 \cap S_2$ – простой модуль, по следствию 2 $\text{Rad}(S_1) = \text{Soc}(S_1) = S_1 \cap S_2 \supseteq \text{Rad}(M)$. По следствию 9.1.5 из [4] $\text{Rad}(S_1) \subseteq \text{Rad}(M)$. Значит, $\text{Rad}(M) = \text{Rad}(S_1) = S_1 \cap S_2$. Аналогично получим, что $\text{Rad}(H) = \text{Rad}(M)$ для любого подмодуля Шмидта H модуля M .

Пусть $N \leq M$ и $N \not\subseteq \text{Rad}(M)$. Покажем, что N – неразложимый модуль. Пусть $N < M$. Так как M конечно порожден, по теореме 2.3.11 из [4] N содержится в некотором максимальном подмодуле S модуля M . Поскольку S является модулем Шмидта, то $\text{Rad}(M) = \text{Rad}(S)$. Так как $N \not\subseteq \text{Rad}(S)$, по теореме 1 получим, что $N = S$ и, значит, по следствию 1 N – неразложимый модуль. Пусть $N = M$. Допустим, что $M = X \oplus Y$, где $X < M$ и $Y < M$. Пусть $X \leq A < M$. Так как A – модуль Шмидта, и по модулярному тождеству $A = X + (A \cap Y)$, по следствию 1 получим, что $A = X < M$. Аналогично $Y < M$. Тогда $\text{Rad}(M) \subseteq X \cap Y = 0$, что невозможно. Следовательно, M – неразложимый модуль.

Достаточность. Пусть M – модуль из пункта 1) теоремы. Тогда $\text{Rad}(M)$ – наибольший собственный подмодуль в M . Пусть $N < M$. Тогда $N < \text{Rad}(M)$ или $N = \text{Rad}(M)$, т.е. всякий подмодуль в M либо полупрост, либо – модуль Шмидта. Значит, по определению 2 M – обобщенный модуль Шмидта, причем по лемме 4 M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа.

Пусть M – модуль из пункта 2) теоремы. Тогда $M = S \oplus P$, где S – модуль Шмидта, P – простой модуль. Так как M конечно порожден, существует $L < M$ такой, что $P < L$. По модулярному тождеству Дедекинда имеем $L = P \oplus (L \cap S)$, причем $L \cap S$ полупрост, поэтому L также полупрост. Предположим теперь, что $N < M$ и $P \not\subseteq N$. Ясно, что $N \cap P = 0$ и $M = N \oplus P$. Тогда $N \cong M/P \cong S$ и, значит, N – модуль Шмидта. Таким образом, каждый максимальный подмодуль в M либо полупрост, либо – модуль Шмидта. Так как M конечно порожден, каждый его собственный

подмодуль содержится в некотором максимальном подмодуле. Следовательно, M – обобщенный модуль Шмидта 2-типа.

Пусть M – модуль из пункта 3) теоремы. Так как $M = S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 – подмодули Шмидта, то M конечно порожден. Из $S_1 \cap S_2 = \text{Rad}(M)$ по теореме 1 следует, что $\text{Rad}(M) \neq 0$ полупрост.

Пусть $S < M$. Покажем, что S является модулем Шмидта. Поскольку каждый подмодуль из M , не содержащийся в $\text{Rad}(M)$, неразложим и $\text{Rad}(M) < S$, то S неполупрост. Можем считать, что $S \neq S_1$ и $S \neq S_2$. Тогда из $M = S + S_2$ следует, что $M/S_2 \cong S/S \cap S_2$ – простой модуль и, значит, $S \cap S_2 = \text{Soc}(S) < S$. Допустим, что в S существует собственный подмодуль L такой, что $L \not\subseteq \text{Soc}(S)$. Тогда $S = L + \text{Soc}(S)$. Пусть $D = L \cap \text{Soc}(S)$ и $\text{Soc}(S) = D \oplus K$. Тогда $S = L \oplus K$, что невозможно. Следовательно, $\text{Soc}(S)$ – наибольший собственный подмодуль в S и по теореме 1 S – модуль Шмидта. Поэтому в модуле M каждый максимальный подмодуль является модулем Шмидта и, значит, M – обобщенный модуль Шмидта 3-типа. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. *В ненулевом конечно порожденном модуле $M = M_R$ каждый максимальный подмодуль является модулем Шмидта тогда и только тогда, когда M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа или 3-типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из лемм 3 и 4.

Необходимость. Пусть в ненулевом конечно порожденном модуле $M = M_R$ каждый максимальный подмодуль является модулем Шмидта. Ясно, что M – неполупростой модуль и не является модулем Шмидта. Пусть N – произвольный собственный подмодуль в M . По теореме 2.3.11 [4] существует $A < M$ такой, что $N \leq A$. Таким образом, в M каждый собственный подмодуль либо полупрост, либо – модуль Шмидта, и согласно определению 2 M – обобщенный модуль Шмидта. По лемме 4 M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа или 3-типа. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Представляется интересным получить описание строения конечно порожденных R -модулей, в которых каждый второй (третий, n -й) максимальный подмодуль является модулем Шмидта.

Используя теорему 2 и следствие 4, получим описание строения обобщенных модулей Шмидта над дедекиндовыми кольцами.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Пусть R – дедекиндово кольцо, не являющееся простым. Модуль $M = M_R$ является обобщенным модулем Шмидта тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

- 1) $M \cong R/\mathfrak{p}^3$, для некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R ;
- 2) $M \cong R/\mathfrak{p}^2 \oplus R/\mathfrak{q}$ для некоторых простых (не обязательно различных) идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ кольца R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_R – обобщенный модуль Шмидта; тогда, используя лемму 3, 2) и утверждение 8.23.9 (b) [7], получаем, что $M_R = N_R \oplus (I_1)_R \oplus \dots \oplus (I_k)_R$, где N_R – периодический модуль, а (I_j) – правый идеал в R , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Пусть M_R – обобщенный модуль Шмидта 1-типа или 3-типа. Используя тот факт, что M_R неразложим (теорема 2), и рассуждая точно так же, как при доказательстве следствия 4, получаем что M_R – периодический модуль. Пусть M_R – обобщенный

модуль Шмидта 2-типа. Тогда $M_R = S_R \oplus P_R$, где S_R – модуль Шмидта, P_R – простой модуль. Как было показано выше, ни S_R , ни P_R не могут быть изоморфны идеалу кольца R , откуда также следует, что M_R – периодический модуль.

По предложению 23 [8; гл. VII, § 5, п°2] получаем, что $M \cong \bigoplus_{i \in I} (R/\mathfrak{p}_i^{n_i})$ для некоторых конечных семейств $(n_i)_{i \in I}$ и $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$, где n_i – натуральные числа, а $\mathfrak{p}_i$ – простые идеалы кольца R . Если M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа, то он локален и циклическ по теореме 2; в этом случае I состоит из одного элемента и $M \cong R/\mathfrak{p}^n$. Ясно, что $\text{Rad}(M) \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n$. Так как по теореме 2 $\text{Rad}(M)$ – модуль Шмидта, то $\text{Rad}(\text{Rad}(M)) \cong \mathfrak{p}^2/\mathfrak{p}^n$ – полупростой модуль, откуда $n = 3$. Пусть M – обобщенный модуль Шмидта 2-типа. Тогда по теореме 2 M является прямой суммой некоторого модуля Шмидта и простого модуля. Значит, I содержит два элемента, и $M \cong R/\mathfrak{p}^{n_1} \oplus R/\mathfrak{q}^{n_2}$, где $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ не обязательно различны. Положив для определенности, что $R/\mathfrak{q}^{n_2}$ – простой модуль, и используя следствие 4, получим, что $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$. Предположив, что M – обобщенный модуль Шмидта 3-типа, получим противоречие. Действительно, по теореме 2 M не локален, и поэтому I содержит более одного элемента. Но тогда M разложим – противоречие с теоремой 2.

Достаточность. Пусть $M = M_R$, где R – дедекиндово кольцо, не являющееся простым и $M \cong R/\mathfrak{p}^3$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R . Ясно, что $\text{Rad}(M) \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3$, а значит, M – локальный циклический модуль и $\text{Rad}(M)$ – модуль Шмидта. По теореме 2 M – обобщенный модуль Шмидта 1-типа. Если же $M \cong R/\mathfrak{p}^2 \oplus R/\mathfrak{q}$ для некоторых простых (не обязательно различных) идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ кольца R , то по следствию 4 M есть прямая сумма модуля Шмидта и простого модуля; значит, M – обобщенный модуль Шмидта 2-типа. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Абелева группа A является обобщенным $\mathbb{Z}$ -модулем Шмидта тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

- 1) $A \cong \mathbb{Z}_{p^3}$, где p – простое число;
- 2) $A \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_q$, где p и q – простые (не обязательно) различные числа.

Покажем, что модули Шмидта достаточно распространены, точнее

ЛЕММА 5. *Если $M = M_R$ – неполупростой артинов модуль, то M содержит подмодуль Шмидта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M_R$ – неполупростой артинов модуль. Если в M все подмодули полупросты, то по определению 1 M – модуль Шмидта и доказывать нечего. Пусть M содержит собственный неполупростой подмодуль $M_1 < M$. Если в M_1 все собственные подмодули полупросты, то по определению 1 M_1 – модуль Шмидта и лемма доказана. Пусть M_1 содержит собственный неполупростой подмодуль M_2 . Продолжая этот процесс, получим $M > M_1 > M_2 > \dots$. Так как M артинов модуль, через конечное число шагов найдется неполупростой модуль M_n , все собственные подмодули которого полупросты. Следовательно, M_n – подмодуль Шмидта модуля M . Лемма доказана.

Итак, мы показали, что каждый неполупростой артинов модуль содержит подмодуль Шмидта. Наличие определенных свойств у подмодулей Шмидта в неполупростом артиновом модуле M позволяет его достаточно точно описать.

ТЕОРЕМА 3. В неполупростом артиновом модуле $M = M_R$ каждый подмодуль Шмидта выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда

$$M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l, \quad (1)$$

где S_i , $i = 1, \dots, k$, – артинов подмодуль Шмидта и P_j , $j = 1, \dots, l$, – простой подмодуль модуля M , причем для каждого подмодуля Шмидта S модуля M существует индекс $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ такой, что $S \cong S_r$ и

$$M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_{r-1} \oplus S \oplus S_{r+1} \oplus \cdots \oplus S_k \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* По лемме 5 M содержит подмодуль Шмидта S_1 . Тогда $M = S_1 \oplus M_1$. Заметим, что здесь оба подмодуля артиновы, так как артинов модуль M . Если при этом M_1 – полупростой модуль, то он разлагается в прямую сумму конечного числа простых модулей и мы получаем искомое разложение модуля M . Пусть M_1 не является полупростым. Тогда по лемме 5 в M_1 существует подмодуль Шмидта S_2 . Так как S_2 выделяется в M прямым слагаемым, в M найдется подмодуль N такой, что $M = S_2 \oplus N$. Тогда по модулярному тождеству получим, что $M_1 = S_2 \oplus M_2$, где $M_2 = M_1 \cap N$ и, значит, $M = S_1 \oplus S_2 \oplus M_2$, причем $M > M_1 > M_2$. Так как M – артинов модуль, продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим, что $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_k \oplus P$, где P – полупростой подмодуль модуля M . Так как P артинов, он разлагается в прямую сумму конечного числа простых модулей $P_1, \dots, P_l$ и мы получаем для M разложение (1). Заметим, что M – модуль конечной длины. Действительно, пусть S_i – произвольный модуль Шмидта из указанного разложения. Так как S_i – артинов модуль, то $\text{Soc}(S_i)$ также артинов. По теореме 8.1.6 [4] $\text{Soc}(S_i)$ – модуль конечной длины. Так как по следствию 2 $\text{Soc}(S_i) < S_i$, то S_i – модуль конечной длины. Поэтому, по следствию 6.1.3 из [4] M – модуль конечной длины.

Пусть теперь S – произвольный подмодуль Шмидта модуля M . По условию $M = S \oplus T$, где $T < M$. Как и выше, нетрудно построить для модуля M разложение (2) вида

$$M = F_1 \oplus \cdots \oplus F_t \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_s, \quad (2)$$

где F_i , $i = 1, \dots, t$, – подмодуль Шмидта, $F_1 = S$ и Q_j , $j = 1, \dots, s$, – простой подмодуль модуля M . По теореме Шмидта–Орэ (теорема IV.3.12 из [9]) имеем следующее: $k = t$, $l = s$ и существует индекс $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ такой, что $S \cong S_r$ и $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_{r-1} \oplus S \oplus S_{r+1} \oplus \cdots \oplus S_k \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l$.

Достаточность очевидна. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если в неполупростом артиновом модуле $M = M_R$ каждый подмодуль Шмидта выделяется прямым слагаемым, то M – модуль конечной длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в тексте теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что кольца A и B называются *подобными* (или *эквивалентными в смысле Мориты*), если эквивалентны категории $\text{mod-}A$ и $\text{mod-}B$. Говорят, что категории $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ эквивалентны, если существуют такие функторы $T: \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ и $S: \mathfrak{D} \rightsquigarrow \mathfrak{C}$, что функторы TS и ST естественно изоморфны тождественным функторам $\text{Id}_{\mathfrak{D}}$ и $\text{Id}_{\mathfrak{C}}$ соответственно [6; т. 2, с. 402], и кратко обозначают в этом случае $T: \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ – эквивалентность [7; с. 97].

ТЕОРЕМА 4. Пусть кольца A и B эквивалентны в смысле Мориты, и пусть $T: \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$ – соответствующая эквивалентность категорий $\text{mod-}A$ и $\text{mod-}B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $M = M_A$ – модуль Шмидта, то $TM = (TM)_B$ – также модуль Шмидта;
- 1) если $M = M_A$ – обобщенный модуль Шмидта i -типа, то $TM = (TM)_B$ – также обобщенный модуль Шмидта i -типа, $i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как эквивалентность T переводит полупростые A -модули в полупростые B -модули (см. 4.33 в [7]) и, кроме того, существует обратная эквивалентность T^{-1} , то модуль TM не является полупростым, а все его собственные подмодули полупросты. По лемме 2 TM – модуль Шмидта.

2) Пусть M – обобщенный A -модуль Шмидта. Учитывая предыдущее замечание, получаем, что B -модуль TM не является ни полупростым, ни модулем Шмидта. Так как T переводит максимальные подмодули A -модуля M в максимальные подмодули B -модуля TM и, кроме того, существует обратная эквивалентность T^{-1} , используя определение 2 и лемму 4, получим, что обобщенный A -модуль Шмидта i -типа M переходит в обобщенный B -модуль Шмидта i -типа TM . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть R – дедекиндово кольцо, R_n – полное кольцо матриц над R . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) модуль $M = M_{R_n}$ является модулем Шмидта тогда и только тогда, когда M – цепной модуль длины 2;
- 2) модуль $M = M_{R_n}$ является обобщенным модулем Шмидта 1-типа тогда и только тогда, когда M – цепной модуль длины 3;
- 3) модуль $M = M_{R_n}$ является обобщенным модулем Шмидта 2-типа тогда и только тогда, когда $M = S \oplus P$, где S – цепной модуль длины 2, а P – простой модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо R эквивалентно в смысле Мориты кольцу R_n [6; т. 1, с. 530]. Поэтому справедливость утверждения непосредственно вытекает из теоремы 4, следствий 4 и 7. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для индуктивного построения новых классов конечно порожденных R -модулей введем следующие обозначения: $\mathfrak{S}_0$ – класс всех R -модулей Шмидта; $\mathfrak{S}_1$ – класс всех R -модулей, в которых каждый максимальный подмодуль является модулем Шмидта, т.е. принадлежит $\mathfrak{S}_0$, и $\mathfrak{S}_{n+1}$ – класс всех R -модулей, в которых каждый максимальный подмодуль принадлежит $\mathfrak{S}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что R -модули из класса $\mathfrak{S}_1$ являются обобщенными R -модулями Шмидта (1-типа или 3-типа). Возникает вопрос: “не будет ли последовательность классов R -модулей

$$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n, \dots \quad (3)$$

стабилизироваться на конечном шаге?” Для произвольного ассоциативного кольца R с единицей это неверно. Действительно, существует аддитивная циклическая p -группа P_n порядка p^{n+2} для любого $n \in \mathbb{N}$. Рассматривая P_n , как $\mathbb{Z}$ -модуль, замечаем, что $P_n \in \mathfrak{S}_n$ и, значит, существует бесконечная последовательность (3) классов $\mathbb{Z}$ -модулей, которая не стабилизируется на конечном шаге.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Ю. Шмидт, “Группы, все подгруппы которых специальные”, *Матем. сб.*, **31** (1924), 366–372.
- [2] Л. А. Шеметков, “О. Ю. Шмидт и конечные группы”, *Укр. матем. журн.*, **23**:5 (1971), 586–590.
- [3] В. С. Монахов, “Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения”, Украинський математичний конгрес, 2001, *Алгебра і теорія чисел*, Ин-т матем. НАН України, Київ, 2002, 81–90.
- [4] Ф. Каш, *Модули и кольца*, Мир, М., 1981.
- [5] И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, М., 1971.
- [6] *Общая алгебра*, т. 1, Справочная математическая библиотека, ред. Л. А. Скорняков, Наука, М., 1990; т. 2, Справочная математическая библиотека, ред. Л. А. Скорняков, Наука, М., 1991.
- [7] К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 1, Мир, М., 1977; т. 2, Мир, М., 1979.
- [8] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Мир, М., 1971.
- [9] А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*, Физматгиз, М., 1962.

В. А. Ведерников

Московский городской педагогический университет

E-mail: vavedernikov@mail.ru

Поступило

27.12.2005

Исправленный вариант

04.04.2008

Н. В. Якубовский

Московский педагогический государственный университет