Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 175–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:34:48

Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов

А. Г. Баскаков

Теория полугрупп линейных ограниченных операторов основывается на спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов), которые выступают в качестве генераторов полугрупп операторов.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X . В данной статье под *полугруппой операторов* понимается сильно непрерывная функция $T: \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \text{End } X$, для которой $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}_+$. *Инфинитезимальным оператором* полугруппы T называется (это классическое определение [1; п. 10.1]) линейный оператор $A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X$ вида

$$A_0 x_0 = T'(0)x_0, \quad x_0 \in D(A_0) = \left\{ x \in X : \text{существует } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

Если T – полугруппа класса C_0 , т.е. выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x, \quad x \in X, \quad (C_0)$$

то оператор A_0 имеет непустое резольвентное множество $\rho(A_0) \subset \mathbb{C}$, а его резольвента удовлетворяет известному условию Хилле–Филлипса–Иосида–Феллера–Миядеры (см. [1], [2]). Однако если полугруппа T не принадлежит классу C_0 , то спектр оператора A_0 , как правило, заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (см. замечания 2 и 4).

Роль оператора A_0 при изучении полугруппы T остается существенной, если есть определенные свойства непрерывности полугруппы T в окрестности нуля. Так, в монографии [1; п. 10.6] основные классы полугрупп классифицировались по способу сходимости операторов полугруппы к тождественному оператору I (при $t \rightarrow 0+$) и при выполнении одного из следующих условий:

$$\int_0^1 \|T(\tau)x\| d\tau < \infty, \quad x \in X, \quad (I_0)$$

$$\int_0^1 \|T(\tau)\| d\tau < \infty. \quad (I_1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00131).

Следующие условия обеспечивали некоторую форму сходимости операторов полу-
группы к тождественному оператору I

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} C(\eta)x = x, \quad x \in X, \quad (C_1)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} -\lambda R(\lambda)x = x, \quad x \in X, \quad (A)$$

где операторы $C(\eta)$, $\eta > 0$, $R(\lambda)$, $\operatorname{Re} \lambda > \omega(T)$, из алгебры $\operatorname{End} X$ определяются формулами

$$C(\eta)x = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta T(\tau)x d\tau, \quad x \in X, \quad (1)$$

$$R(\lambda)x = - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega(T). \quad (2)$$

Число $\omega(T)$ – тип полу-группы T имеет вид

$$\omega(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \infty.$$

Полугруппа T , для которой выполняется одна из следующих пар условий:

$$(I)_0, (C_1), \quad (I)_1, (C_1), \quad (I)_0, (A), \quad (I)_1, (A)$$

соответственно относится к полугруппам класса

$$(0, C_1), \quad (1, C_1), \quad (0, A), \quad (1, A).$$

Полугруппы классов $(0, C_1)$ и $(1, C_1)$ образуют класс C_1 (C_1 -полугруппы), а полугруппы класса $(0, A)$ и $(1, A)$ относятся к классу A .

Наконец, наиболее общий класс полугрупп, рассматриваемый в [1; определение 18.4.1], образует полугруппы класса (E) . Полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} X$ относится к классу (E) , если условие $(I)_0$ выполнено на некотором плотном в X подпространстве X_0 и линейные операторы $R(\lambda)$, $\operatorname{Re} \lambda > \omega(T)$, определенные на X_0 формулой (2), ограничены на нем (и, следовательно, допускают единственное расширение на X). Для полугруппы T класса (E) оператор A_0 может быть незамкнутым, а появляющаяся в определении этих классов функция R (заданная формулой (2)), не обязательно является резольventой оператора A_0 и, более того, она может не быть резольventой никакого линейного оператора. Еще больше проблем с использованием спектральной теории линейных операторов возникает при изучении полугрупп операторов с более сложным ее поведением при $t \rightarrow 0+$.

В данной статье для исследования полугрупп операторов используются (в качестве их генератора) линейные отношения (многозначные линейные операторы). При этом осуществляется пересмотр большинства результатов из [1], касающихся упомянутых классов полугрупп операторов и особенно полугрупп класса (E) .

Сводка основных понятий и некоторых результатов из теории линейных отношений на банаховых пространствах приведена в п. 2. В п. 3 дано определение генераторов полугруппы операторов, приведены примеры генераторов, изучаются их общие свойства. Особая роль отводится понятию базового генератора как генератора, резольventное множество которого содержит некоторую полуплоскость. В п. 4 изучаются спектральные свойства полугрупп операторов и их генераторов.

Основным результатом в п. 4 является теорема 4, в которой получено представление резольвенты базового генератора исследуемой полугруппы операторов на векторах из некоторого подпространства. В теореме 5 получены условия единственности базового генератора, а в теореме 6 – условия, когда генератор является базовым. При условии, что полугруппа T удовлетворяет $(I)_0$, в теореме 7 описан ее базовый генератор и получены условия его единственности в некотором классе базовых генераторов. В теоремах 8 и 9 получены результаты, связанные с оператором A_0 . Содержание п. 5 составляют эргодические теоремы для полугрупп операторов. При этом (ввиду недостатка места) рассматриваются только средние полугруппы по Абелю и Чезаро в нуле (согласно терминологии из [1; гл. 18]). В п. 6 рассматривается возможность применения полученных результатов к дифференциальным уравнениям с необратимым оператором при производной.

2. Некоторые сведения из теории линейных отношений. Большинство приводимых понятий из теории линейных отношений можно найти в монографиях [3], [4] и в статьях [5], [6]. Следует отметить, определение спектра и первые результаты по спектральной теории линейных отношений впервые даны в статье Аренса [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из декартова произведения $X \times X$ называется *линейным отношением* на банаховом пространстве X . Линейное отношение $\mathcal{A}$ называется *замкнутым*, если $\mathcal{A}$ – замкнутое (линейное) подпространство из $X \times X$.

Множество всех (линейных) отношений на X обозначим через $LR(X)$, а множество замкнутых отношений на X – через $LCR(X)$. При этом множество $LO(X)$ линейных операторов, действующих в X , считается включенным (при отождествлении их с их графиками) в $LR(X)$. Таким образом, $\text{End } X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X : \text{существует } y \in X \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$; кроме того,

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$$

– *ядро* отношения $\mathcal{A}$,

$$\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in Y : \text{существует } x \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

– его *область значений*. Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого $y \in \mathcal{A}x$, причем $\mathcal{A}0$ – подпространство из X .

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство из $X \times X$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\},$$

где под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух подмножеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$.

Произведением линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство из $X \times X$ вида

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \{(x, z) \in X \times X : \text{существует } y \in D(\mathcal{B}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}, (y, z) \in \mathcal{B}\}.$$

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \subset X \times X$ называется линейное отношение

$$\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется *инъективным*, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\text{Im } \mathcal{A} = X$. Замкнутое отношение $\mathcal{A}$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}$ одновременно инъективно и сюръективно, и тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$.

Резольвентным множеством отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$ замкнут. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X, \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$.

Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см. [1] и нижеследующее определение), причем

$$\begin{aligned} \text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m &= \mathcal{A}^m 0, & \text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m &= D(\mathcal{A}^m) \\ && \text{для любых } \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому далее нами используются обозначения $\text{Ker } R(\cdot, \mathcal{A})^m$ и $\text{Im } R(\cdot, \mathcal{A})^m$ вместо $\text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m$ и $\text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m$ соответственно.

Функция $R: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$, определенная на множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ (возможно, однотоочечном), называется *псевдорезольвентой*, если для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ выполняется равенство (тождество Гильберта)

$$\mathcal{R}(\lambda_1) - \mathcal{R}(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathcal{R}(\lambda_1)\mathcal{R}(\lambda_2).$$

ТЕОРЕМА 1 [6]. Каждая псевдорезольвента $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ является резольвентой некоторого линейного отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$, причем $\Omega \subset \rho(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}0 = \text{Ker } \mathcal{R} = \bigcap_{\lambda \in \Omega} \text{Ker } \mathcal{R}(\lambda) = \text{Ker } \mathcal{R}(\cdot, \mathcal{A}),$$

$D(\mathcal{A}) = \text{Im } R(\cdot, \mathcal{A})$ и отношение $\mathcal{A}$ определяется равенством $\mathcal{A} = \mathcal{R}(\lambda)^{-1} + \lambda I$, $\lambda \in \Omega$, которое не зависит от $\lambda \in \Omega$.

Будем говорить, что оператор $B \in \text{End } X$ *перестановочен* с отношением $\mathcal{A} \in LR(X)$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для всех $(x, y) \in \mathcal{A}$.

Если имеет место включение $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ для отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{B}$ является *расширением* отношения $\mathcal{A}$.

3. О некоторых свойствах генераторов полугрупп операторов. Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа операторов, $A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X$ – ее инфинитезимальный оператор.

Введем в рассмотрение подпространства из X вида

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \{x \in X : T(t)x = 0 \text{ для любого } t > 0\} \text{ – ядро полугруппы;} \\ \text{Im } T &= \bigcup_{t > 0} \text{Im } T(t) \text{ – образ полугруппы;} \end{aligned}$$

$\text{fix } T = \{x \in X : T(t)x = x \text{ для любого } t > 0\}$ – множество неподвижных точек полугруппы;

$X_c(T) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x\}$;

$X_1(T) = \{x \in X : \int_0^1 \|T(\tau)x\| d\tau < \infty\}$;

$\tilde{X}_1(T) = \{x \in X_1(T) : \lim_{\eta \rightarrow 0+} \eta^{-1} \int_0^\eta T(\tau)x d\tau = x\}$;

$X_{1,b}(T) = \{x \in X_1(T) : \text{функция } \psi_x(u) = \sup_{\tau \in (0,1]} \tau^{-1} \|\int_0^\tau T(s+u)x ds\| \text{ суммируема на } [0, 1]\}$.

Отметим, что $X_{1,b}$ содержит

$$\left\{ x \in X_1(T) : \sup_{u, \tau \in (0,1]} \tau^{-1} \left\| \int_0^\tau T(s+u)x ds \right\| < \infty \right\}.$$

Полугруппа T называется *вырожденной*, если $\text{Ker } T$ – ненулевое подпространство из X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Строгим инфинитезимальным оператором* полугруппы T называется оператор $\mathbb{A}_0 : D(\mathbb{A}_0) \subset X \rightarrow X$

$$D(\mathbb{A}_0) = \{x \in D(A_0) : A_0x \in X_c(T)\}$$

и $\mathbb{A}_0x = A_0x$, $x \in D(\mathbb{A}_0)$ (таким образом, $\mathbb{A}_0 \subset A_0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Старшим генератором* полугруппы T называется отношение $\mathbb{A} \in LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со следующими свойствами:

- 1) $x \in \overline{\text{Im } T}$;
- 2) выполняются равенства

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)y d\tau, \quad 0 < s \leq t < \infty. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Любое отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$, удовлетворяющее условиям

- 1) $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$;
- 2) $\mathcal{A}$ перестановочно с операторами $T(t)$, $t > 0$,

называется *генератором* полугруппы $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$. Генератор $\mathcal{A}$ полугруппы T называется *базовым*, если резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ содержит полуплоскость $\mathbb{C}_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > \omega\}$ для некоторого $\omega \geq \omega(T)$.

Отметим, что старший генератор $\mathbb{A}$ полугруппы перестановочен с операторами $T(t)$, $t > 0$.

Множество всех генераторов полугруппы T обозначим символом $\text{Gen}(T)$. Значит, $\mathbb{A}_0, A_0, \mathbb{A} \in \text{Gen}(T)$. Важно отметить, что в определении генераторов полугруппы отсутствуют какие-либо априорные предположения относительно характера поведения полугруппы при $t \rightarrow 0+$ (например, условий, обеспечивающих сходимость интеграла в формуле (2)).

В дальнейшем систематически используется

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения старшего генератора $\mathbb{A}$ полугруппы T следует, что

$$\mathbb{A} = \{(x_0, y) \in \overline{\text{Im } T} \times X : \text{функция } x(t) = T(t)x_0, t > 0, \\ \text{дифференцируема и } x'(t) = T(t)y, t > 0\}.$$

Действительно, интегрирование по промежутку $[s, t]$ выражения $x'(\tau) = T(\tau)y$, $\tau > 0$, ведет к равенствам (3), где $x = x_0$. Дифференцирование равенств (3) (по t) ведет, в свою очередь, к равенствам $x'(\tau) = T(\tau)y$, где $x(\tau) = T(\tau)x_0$, $\tau > 0$.

Из замечания 1 и определения 4 следует

ЛЕММА 1. *Имеют место равенства*

$$\text{Gen}(T_\lambda) = \{\mathcal{A} - \lambda I : \mathcal{A} \in \text{Gen}(T)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $T_\lambda(t) = T(t)e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Символами $\mathbb{A}_c$, $\mathbb{A}_1$, $\tilde{\mathbb{A}}_1$, $\mathbb{A}_{1,b}$ обозначим генераторы из $\text{Gen}(T)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_c &= \mathbb{A} \cap (X_c(T) \times X), & \mathbb{A}_1 &= \mathbb{A} \cap (X_1(T) \times X), \\ \tilde{\mathbb{A}}_1 &= \mathbb{A} \cap (\tilde{X}_1(T) \times X), & \mathbb{A}_{1,b} &= \mathbb{A} \cap (X_{1,b} \times X). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}_c \subset \tilde{\mathbb{A}}_1 \subset \mathbb{A}_{1,b} \subset \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}$$

и все эти отношения перестановочны с операторами $T(t)$, $t > 0$ (см. лемму 3).

Непосредственно из определения генератора полугруппы следует, что для любого генератора $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$ верны включения

$$D(\mathbb{A}_0) \subset D(\mathcal{A}) \subset D(\mathbb{A}), \quad \text{Im } \mathbb{A}_0 \subset \text{Im } \mathcal{A} \subset \text{Im } \mathbb{A}.$$

ЛЕММА 2. *Старший генератор $\mathbb{A}$ является замкнутым линейным отношением и*

$$(\mathbb{A} - \lambda I)^n 0 = \mathbb{A}^n 0 = \text{Ker } T$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если (x_n, y_n) , $n \geq 1$, — сходящаяся к $(x_0, y_0) \in X \times X$ последовательность из $\mathbb{A}$, то $x_n \in \overline{\text{Im } T}$ и верны равенства

$$T(t)x_n - T(s)x_n = \int_s^t T(\tau)y_n d\tau, \quad n \geq 1, \quad 0 < s \leq t < \infty.$$

Осуществляя в этих равенствах предельный переход (при $n \rightarrow \infty$), получаем, что равенствам (3) удовлетворяет пара (x_0, y_0) , причем $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\text{Im } T}$. Итак, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$.

Равенства

$$(\mathbb{A} - \lambda I)^n 0 = \mathbb{A}^n 0 = \text{Ker } T, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1,$$

докажем методом индукции. Поскольку $(\mathbb{A} - \lambda I)(0) = \mathbb{A}0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, положим $\lambda = 0$. Если $y \in \mathbb{A}0$, то $(0, y) \in \mathbb{A}$, и поэтому из равенств (3) следует, что $\int_s^t T(\tau)y d\tau = 0$ для всех $0 < s \leq t < \infty$. Поэтому из непрерывности подынтегральной функции получаем, что $y \in \text{Ker } T$. Значит, $\mathbb{A}0 \subset \text{Ker } T$. Включение $\text{Ker } T \subset \mathbb{A}0$ очевидно (вытекает из равенств (3)). Предположим, что $\mathbb{A}^m 0 = \text{Ker } T$, $m \geq 1$, и докажем, что $\mathbb{A}^{m+1}0 = \text{Ker } T$. Если $z \in \mathbb{A}^{m+1}0$, то $z \in \mathbb{A}y$, где $y \in \mathbb{A}^m 0 = \text{Ker } T$, причем пара (y, z) удовлетворяет равенствам (3). Следовательно, $\int_s^t T(\tau)z d\tau = 0$ для всех $0 < s \leq t < \infty$. Это означает, что $z \in \text{Ker } T$, т.е. $\mathbb{A}^{m+1}0 \subset \text{Ker } T$. Поскольку $\mathbb{A}0 \subset \mathbb{A}^n 0$, $n \geq 2$, $\text{Ker } T \subset \mathbb{A}^n 0$, $n \geq 2$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеют место равенства $\mathcal{A}^n 0 = (\mathcal{A} - \lambda I)^n 0 = \text{Ker } T$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для любого генератора $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$, удовлетворяющего условию $\mathbb{A}_c \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы любой генератор $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$ был оператором (т.е. $\mathcal{A} \in LO(X)$), необходимо и достаточно, чтобы $\text{Ker } T = \{0\}$.

ЛЕММА 3. Верны следующие свойства:

- 1) операторы $T(t)$, $t > 0$, перестановочны со всеми отношениями из определения 5;
- 2) $\overline{\text{Im}(A_0 - \lambda I)} \subset \overline{\text{Im } T}$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- 3) $\overline{D(\mathbb{A}_0^n)} = \overline{D(\mathcal{A}^n)} = \overline{D(\mathbb{A}^n)} = \overline{X_c(T)} = \overline{\text{Im } T}$, $n \in \mathbb{N}$, для любого $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$;
- 4) $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$ для любого $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$;
- 5) $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{fix } T \subset \text{Ker } \mathbb{A}$ для любого $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$, удовлетворяющего включению $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}_1$;
- 6) $\text{Ker } T \cap X_c(T) = \{0\}$;
- 7) $D(A_0) \cap \text{Ker}(T) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем свойство 1). Если $(x, y) \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – одно из отношений определения 5, то верны равенства (3). Применяя к обеим его частям оператор $T(u)$, $u > 0$, получим, что этим равенствам удовлетворяет пара $(T(u)x, T(u)y)$, причем $T(u)x \in D(\mathbb{A}_0) \subset D(\mathcal{A})$. Значит, она принадлежит $\mathbb{A}_0$ и поэтому принадлежит $\mathcal{A}$.

Свойство 2) непосредственно следует из определения оператора A_0 , при этом следует учесть равенства $\overline{\text{Im } T_\lambda} = \overline{\text{Im } T}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (полугруппа T_λ определена в лемме 1).

Свойство 3) следует из включений $D(\mathbb{A}_0) \subset D(\mathcal{A}) \subset D(\mathbb{A})$ и теоремы 10.3.4 из [1], где оно доказано для оператора A_0 с помощью конструкции Гельфанда. Это доказательство верно и для $\mathbb{A}_0$.

Свойство 4) следует из леммы 2.

Остальные свойства легко следуют из определения участвующих в их формулировке подпространств. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\overline{\text{Im } T} \neq X$, то $\sigma(A_0) = \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из следствия 3 и равенства $\overline{D(A_0)} = \overline{\text{Im } T}$ получаем, что любой оператор $A \in LO(X)$ с $\overline{D(A)} \neq X$ и с $\rho(A) \neq \emptyset$ не может быть инфинитезимальным оператором ни для какой полугруппы операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, $T(t) = 0$, $t > 0$, – нулевая полугруппа операторов, то $\mathbb{A}_c = \mathbb{A} = \{(0, x), x \in X\}$. Следовательно, $D(\mathbb{A}) = \{0\}$, $\text{Im } T = \{0\}$, но $\text{Im } \mathbb{A} = X$, т.е. подпространство $\text{Im } \mathbb{A}_c = \text{Im } \mathbb{A}$ никак не связано с $\overline{\text{Im } T}$.

ТЕОРЕМА 2. Полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ класса (E) обладает базовым генератором, причем функция $R : \mathbb{C}_\omega \rightarrow \text{End } X$, определяемая формулой (2), является резольвентой некоторого базового генератора $\mathcal{A}$ полугруппы T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В монографии [1; теорема 18.4.1] было установлено, что R – псевдорезольвента на полуплоскости $\mathbb{C}_\omega$, где $\omega \geq \omega(T)$. Поэтому в силу теоремы 1 она является резольвентой некоторого линейного отношения $\mathcal{A} \in LCR(X)$. Из представления формулой (2) операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$, на плотном в X подпространстве $X_1(T)$ следует, что операторы $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$, и, следовательно, отношение $\mathcal{A}$ перестановочно с операторами $T(t)$, $t > 0$. Осталось установить, что $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$.

Без ограничения общности считая $\omega < 0$ и $\lambda = 0$ (в силу замечания 1 и леммы 1), из формулы (2) для любого вектора $y \in X_1(T)$ получаем равенство

$$x = \mathcal{A}^{-1}y = - \int_0^\infty T(\tau)y d\tau \in D(\mathcal{A}),$$

и, значит, $(x, y) \in \mathcal{A}$, причем $x \in \overline{\text{Im } T}$. Тогда для любых $0 < s \leq t < \infty$ верны равенства (3). Таким образом, $(x, y) \in \mathbb{A}$. В силу замкнутости $\mathbb{A}$ из доказанного следует, что $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}$. Действительно, если $(x, y) \in \mathcal{A}$ и (y_n) – сходящаяся к y последовательность из $X_1(T)$, то последовательность $x_n = \mathcal{A}^{-1}y_n$, $n \geq 1$, также является сходящейся. Поэтому (x_n, y_n) , $n \geq 1$, – сходящаяся к (x, y) последовательность, причем $(x_n, y_n) \in \mathbb{A}$, $n \geq 1$. В силу замкнутости $\mathbb{A}$ верно включение $(x, y) \in \mathbb{A}$. Если $x \in D(\mathbb{A}_0)$, то $y = \mathbb{A}_0x \in X_c$. Поскольку $T'(t)x = T(t)y$, $t > 0$, имеем

$$x = - \int_0^\infty T(\tau)y d\tau = \mathcal{A}^{-1}y,$$

т.е. $\mathcal{A} \supset \mathbb{A}_0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Имеют место следующие включения и равенства:*

$$(\text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T}) \oplus \text{fix } T_\lambda \subset \text{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

$$\text{fix } T_\lambda = \{0\}, \quad \text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T} = \text{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I), \quad \text{Re } \lambda > \omega(T). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду равенств

$$\text{Ker } T_\lambda = \text{Ker } T, \quad \text{Im } T_\lambda = \text{Im } T, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

из замечания 1 и леммы 1 следует, что (4) и (5) достаточно доказать для $\lambda = 0$ при $\omega(T) < 0$. Написание знака прямой суммы в (4) оправдано равенством $\text{Ker } T \cap \text{fix } T = \{0\}$. Если $x_* \in \text{fix } T \subset \text{Im } T$, то $x_* \in \text{Ker } \mathbb{A}_0 \subset \text{Ker } \mathbb{A}$. Для вектора $x_0 \in \text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T}$ из определения генератора $\mathbb{A}$ следует, что $(x_0, 0)$ удовлетворяет равенствам (3) и, значит, $x_0 \in \text{Ker } \mathbb{A}$. Итак, включения (4) доказаны.

Из определения полугруппы T_λ следует, что $\text{fix } T_\lambda = \{0\}$ при $\text{Re } \lambda > \omega(T)$. Поэтому, доказывая (5), осталось установить, что $\text{Ker } \mathbb{A} \subset \text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T}$. Пусть $x_0 \in \text{Ker } \mathbb{A}$. Тогда $(x_0, 0) \in \mathbb{A}$ и из равенств (3) получаем, что $T(t)x_0 = T(s)x_0$ для всех $0 < s \leq t < \infty$. Поскольку $\omega(T) < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x_0 = 0$. Значит, $x_0 \in \text{Ker } T$. Из включения $x_0 \in D(\mathbb{A}) \subset \overline{\text{Im } T}$ следует, что $x_0 \in \text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Резольвентное множество $\rho(\mathbb{A}) = \emptyset$, если*

$$\text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T} \neq \{0\}. \quad (6)$$

В связи с условием (6) возникает вопрос существования полугруппы операторов, для которой это условие выполнено.

ПРИМЕР 1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_0, e_1, e_2, \dots$, и $(\lambda_n), \lambda_k \neq 0$, $k \geq 1$, – последовательность вещественных чисел, для которой $\sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k s} < \infty$ для любого $s > 0$. Полугруппу $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } H$ определим равенствами

$$T(t)x = \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k t} (x, e_k) e_k + \left(\sum_{k \geq 1} (x, e_k) e^{\lambda_k t} \right) e_0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Ясно, что $\text{Ker } T$ – одномерное подпространство, содержащее вектор e_0 . Из равенств $T(t)e_n = e^{\lambda_n t}(e_n + e_0)$, $n \geq 1$, $t > 0$, следует, что $\text{Im } T$ содержит векторы $e_n + e_0$, $n \geq 1$. Поскольку

$$\left\| e_0 - n^{-1} \sum_{k=1}^n (e_k + e_0) \right\|^2 = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

то $e_0 \in \overline{\text{Im } T}$, и поэтому $\overline{\text{Im } T} = H$. Таким образом, $\text{Ker } T \cap \overline{\text{Im } T} = \text{Ker } T$ – ненулевое подпространство, порожденное вектором e_0 . Из следствия 4 получаем, что $\sigma(A) = \mathbb{C}$ для генератора A этой полугруппы. Для последующих вычислений отметим, что ряд $\sum_{k \geq 1} \alpha_k (e_k + e_0)$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, сходится в точности тогда, когда сходятся ряды $\sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2$, $\sum_{k \geq 1} \alpha_k$. Так из этого замечания следует, что область определения $D(A_0)$ инфинитезимального оператора A_0 рассматриваемой полугруппы операторов T состоит из векторов вида $x = \sum_{k \geq 1} \alpha_k e_k$, для которых сходятся числовые ряды

$$\sum_{k \geq 1} |\lambda_k|^2 |\alpha_k|^2, \quad \sum_{k \geq 1} \lambda_k \alpha_k,$$

и тогда

$$A_0 x = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \alpha_k (e_k + e_0).$$

Последовательность

$$x_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} e_k, \quad n \geq 1,$$

обладает следующими свойствами:

$$x_n \in D(A_0), \quad n \geq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (e_k + e_0) = e_0.$$

Следовательно, оператор A_0 не замкнут (и не замыкаем в классе операторов).

4. Спектральные свойства полугрупп операторов и их генераторов. Содержание данного пункта тесно связано с вопросом описания класса полугрупп операторов, исследование которых возможно с использованием резольвенты их генераторов. Как и ранее, через $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ обозначается рассматриваемая полугруппа операторов. Далее используются обозначения из п. 3 для ее генераторов.

ЛЕММА 4. Если $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$, то для любой пары $(x, y) \in \mathcal{A}$, где $y \in X_1(T)$, существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x_0 \in X_c(T), \quad x - x_0 \in \text{Ker } T,$$

причем $x_0 \in D(A_0)$, $A_0 x_0 = y_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0+} C(\eta)y$, если $y \in \tilde{X}_1(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \in \mathcal{A}$, где $y \in X_1(T)$. Тогда из включения $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}$ следует, что имеют место равенства (3), из которых при $s \rightarrow 0+$ получаем, что существует $\lim_{s \rightarrow 0+} T(s)x = x_0$. Ясно, что $T(u)x_0 = \lim_{s \rightarrow 0+} T(u+s)x$, и отсюда получаем, что $\lim_{u \rightarrow 0+} T(u)x_0 = x_0$. Поскольку

$$T(u)(x - x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} T(\epsilon)(T(u)(x - x_0)) = T(u)x_0 - T(u)x_0 = 0, \quad u > 0,$$

$x - x_0 \in \text{Ker } T$.

Если $y \in \tilde{X}_1(T)$, то переходя к пределу при $u \rightarrow 0+$ в равенствах

$$\frac{T(u+t)x - T(u)x}{t} = \frac{1}{t} \int_u^{u+t} T(\tau)y \, d\tau, \quad u, t > 0,$$

получим

$$\frac{T(t)x_0 - x_0}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y \, d\tau, \quad t > 0.$$

Снова переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$ в последних равенствах, приходим к выводу, что $x_0 \in D(A_0)$ и $Ax_0 = y_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} C(t)y$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{A}$ – базовый генератор полугруппы T . Тогда для любых $x \in X_{1,b}(T)$ и $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ имеет место равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(\tau)R(\lambda, \mathcal{A})x \, d\tau = - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x \, d\tau. \quad (8)$$

В частности, если $R(\lambda, \mathcal{A})x \in \tilde{X}_1(T)$, то

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x \, d\tau. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая замечание 1 и лемму 1, без ограничения общности можно считать (учитываются также равенства $X_{1,b}(T_\lambda) = X_{1,b}(T)$, $\tilde{X}_1(T_\lambda) = \tilde{X}_1(T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$), что $\omega < 0$ и $\lambda = 0 \in \rho(\mathcal{A})$. Поскольку $A_0 \subset \mathbb{A}$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ для любого $x_0 \in D(A_0)$ и $y_0 = A_0x_0$. Ввиду перестановочности операторов $T(t)$, $t > 0$, с $\mathcal{A}$, получаем, что

$$(T(t)x_0, T(t)y_0) = \left(T(t)x_0, \frac{d}{dt}(T(t)x_0) \right) \in \mathcal{A}$$

для всех $t > 0$. Значит,

$$\left(\frac{d}{dt} T(t)x_0, T(t)x_0 \right) \in \mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X,$$

т.е.

$$\mathcal{A}^{-1} \frac{d}{dt} (T(t)x_0) = T(t)x_0, \quad t > 0.$$

Из этих равенств (интегрированием по промежутку $(0, \infty)$) получаем представление (9), где $\lambda = 0$. Таким образом, представление (9) доказано для всех $x \in D(A_0)$.

Пусть теперь $x \in X_{1,b}(T)$. Поскольку $x \in X_1(T)$, вектор

$$x_\tau = \tau^{-1} \int_0^\tau T(s)x \, ds, \quad \tau > 0,$$

является пределом последовательности векторов

$$x_n = \tau^{-1} \int_{1/n}^\tau T(s)x \, ds, \quad n \geq 1,$$

каждый из которых принадлежит $D(A_0)$, причем $A_0 x_n = \tau^{-1}(T(\tau) - T(1/n))x$. Как только что было доказано, для векторов x_n , $n \geq 1$, верно представление (9) и, значит, оно верно для векторов x_τ , $\tau > 0$. Следовательно, имеют место равенства

$$R(\lambda, A)x_\tau = -\tau^{-1} \int_0^\tau \left(\int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u+s)x du \right) ds = f(\tau, \lambda), \quad \tau > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\omega \cap \rho(\mathcal{A}).$$

Перепишав левую часть приведенного равенства в виде $\tau^{-1} \int_0^\tau T(s)R(\lambda, \mathcal{A})x ds$, из леммы 4 получаем существование при $\tau \rightarrow 0+$ предела этой части равенства, который совпадает с вектором $R(\lambda, \mathcal{A})x$, если $R(\lambda, \mathcal{A})x \in \tilde{X}_1(T)$.

Теперь осталось доказать, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \left\| f(\tau, \lambda) + \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u)x du \right\| = 0.$$

Это равенство следует из оценок

$$\begin{aligned} \left\| f(\tau, \lambda) + \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u)x du \right\| &= \left\| \tau^{-1} \int_0^\tau \left(\int_0^\infty e^{-\lambda u} (T(u+s) - T(u))x du \right) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda u} \left[\tau^{-1} \int_0^\tau (T(u+s) - T(u))x ds \right] du \right\| \\ &\leq \int_0^\infty \phi_\tau(u) du, \end{aligned}$$

где семейство функций $\phi_\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\phi_\tau(u) = \tau^{-1} \left\| \int_0^\tau (T(u+s) - T(u))x ds \right\| e^{-(\operatorname{Re} \lambda)u}, \quad \tau \in (0, 1),$$

обладает следующими свойствами (учитывается, что $x \in X_{1,b}(T)$):

- 1) $\phi_\tau \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\tau \in (0, 1]$ и $\sup_{0 < \tau \leq 1} \|\phi_\tau\|_1 < \infty$, где $L_1(\mathbb{R}_+)$ – банахово пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+$ функций и $\|f\|_1$ – норма функции $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$;
- 2) $\int_{u \geq \alpha} \phi_\tau(u) du \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0+$ для любого $\alpha > 0$;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\sup_{\tau \in (0, 1]} \|\Phi_\tau\|_{L_1(0, \sigma)} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $\mathcal{A}$ – базовый генератор полугруппы T , $\omega > \omega(T)$ и $x_0 \in \tilde{X}_1(T)$, то

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} x_0 \in D(A_0) \quad \text{и} \quad (A_0 - \lambda I)(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} x_0 = x_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\epsilon > 0$ из формулы (9) следуют равенства (используется теорема 4 и предполагается, что $0 \in \mathbb{C}_{\omega(T)}$)

$$\begin{aligned} \frac{T(\epsilon) - I}{\epsilon} \mathcal{A}^{-1} x_0 &= -\frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty [T(\epsilon + \tau) - T(\tau)] x_0 d\tau \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(\tau) x_0 d\tau \rightarrow x_0 (\epsilon \rightarrow 0+). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{A}^{-1} x_0 \in D(A_0)$ и $A_0 \mathcal{A}^{-1} x_0 = x_0$. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\overline{X_{1,b}(T)} = X$ и существует базовый генератор $\mathcal{A}$ полугруппы T с $D(\mathcal{A}) \subset \tilde{X}_1(T)$. Тогда он единственен в классе всех базовых генераторов, область определения которых содержится в $\tilde{X}_1(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_0$ – еще один базовый генератор полугруппы T . Тогда из теоремы 4 следует (в силу плотности $X_{1,b}(T)$ в X) совпадение их резольвент в полуплоскости $\mathbb{C}_\omega$ при некотором $\omega > \omega(T)$. Из теоремы 1 получаем, что $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$ имеет непустое резольвентное множество, причем $\rho(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}_{\omega(T)} \neq \emptyset$ и $D(\mathcal{A}) \subset \tilde{X}_1(T)$. Тогда он является базовым генератором и $\rho(\mathcal{A}) \supset \mathbb{C}_{\omega(T)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}_{\omega(T)}$. Рассмотрим операторнозначную функцию $R: \mathbb{C}_{\omega(T)} \rightarrow \text{End } X$ вида

$$R(\lambda)x = R(\lambda_0, \mathcal{A})x + (\lambda_0 - \lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) R(\lambda_0, \mathcal{A})x dt, \quad \text{Re } \lambda > \omega(T), \quad x \in X.$$

Поскольку $\text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A}) = D(\mathcal{A}) \subset \tilde{X}_1(T)$, из леммы 4 следует, что эта формула определяет для каждого $x \in X$ непрерывно дифференцируемую функцию $\lambda \mapsto R(\lambda)x: \mathbb{C}_{\omega(T)} \rightarrow X$ и, значит, в силу принципа равномерной ограниченности функция $R: \mathbb{C}_{\omega(T)} \rightarrow \text{End } X$ корректно определена и голоморфна. Поскольку она совпадает с резольвентой отношения $\mathcal{A}$ на открытом множестве из $\rho(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}_{\omega(T)}$, из теоремы единственности для голоморфных функций следует, что функция R удовлетворяет тождеству Гильберта на $\mathbb{C}_{\omega(T)}$. Значит, R – резольвента отношения $\mathcal{A}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если для генератора $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$ выполнены условия

$$1) \rho(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}_{\omega(T)} \neq \emptyset,$$

$$2) \mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \tilde{\mathbb{A}}_1,$$

то $\mathcal{A}$ – базовый генератор.

ТЕОРЕМА 7. Если $X_1(T) = X$, то $\mathbb{A}_c$ – базовый генератор полугруппы T , $\mathbb{C}_{\omega(T)} \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и его резольвента допускает представление вида (9), где $\mathcal{A} = \mathbb{A}_c$, причем

$$\sup_{\text{Re } \lambda \geq \omega} \|R(\lambda, \mathbb{A}_c)\| < \infty \quad \text{для любого } \omega > \omega(T)$$

и $D(\mathbb{A}_c^2) \subset D(\mathbb{A}_0)$. Если $\overline{X_{1,b}(T)} = X$, то $\mathbb{A}_c$ – единственный базовый генератор в классе всех генераторов, область определения которых содержится в $\tilde{X}_1(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считая $\omega(T) < 0$ и $\lambda = 0$ (см. замечание 1 и лемму 1), допустим, что $x \in \text{Ker } \mathbb{A}_c$. Тогда из равенств (3) следует, что $T(t)x = x$ для всех $t > 0$. Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$, $x = 0$. Следовательно, $\mathbb{A}_c$ – инъективное отношение. Если y – произвольный вектор из $X = X_1(T)$, то вектор $x = -\int_0^\infty T(\tau)y d\tau$ принадлежит X_c , удовлетворяет равенствам (3) и, значит, $(x, y) \in \mathbb{A}_c$. Поэтому $\mathbb{A}_c$ – непрерывно обратимое отношение и верна формула (9).

Ограниченность резольвенты отношения $\mathbb{A}_c$ следует из формулы (9), где $\mathcal{A} = \mathbb{A}_c$ и [1; теорема 3.8.2]. Единственность базового генератора $\mathbb{A}_c$ следует из теоремы 5.

Если $y \in D(\mathbb{A}_c^2)$, то вектор y можно представить в виде $y = \mathbb{A}_c^{-1}x$, где $x \in D(\mathbb{A}_c) \subset X_c(T)$. Из доказательства следствия 5 получаем, что $y \in D(\mathbb{A}_0)$. Таким образом, $D(\mathbb{A}_c^2) \subset D(\mathbb{A}_0)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $X_1(T) = X$ и $\tilde{X}_1(T)$ плотно в X . Тогда $\bar{A}_0 = \mathbb{A}_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $A_0 \subset \mathbb{A}_c$ и отношение $\mathbb{A}_c$ замкнуто (ввиду того, что оно имеет непустое резольвентное множество), $\bar{A}_0 \subset \mathbb{A}_c$. Считая $\omega(T) < 0$, получаем, что $0 \in \rho(\mathbb{A}_c)$. Из следствия 5 теоремы 4 вытекает, что $\mathbb{A}_c^{-1}y = x \in D(A_0)$ для любого вектора $y \in \tilde{X}_1(T)$ и $A_0x = y$. Если (x, y) – произвольная пара из $\mathbb{A}_c$, то существует последовательность (y_n) из $\tilde{X}_1(T)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Тогда по доказанному последовательность $x_n = \mathbb{A}_c^{-1}y_n, n \geq 1$, принадлежит $D(A_0)$ и сходится к вектору x . Поскольку $y_n = A_0x_n, n \geq 1$, то $\bar{A}_0 \supset \mathbb{A}_c$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. При выполнении условий теоремы 8 замыкание $\bar{A}_0$ оператора A_0 является линейным оператором тогда и только тогда, когда $\text{Ker } T = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $X = X_1(T)$. Для того чтобы $\mathbb{A}_c = A_0$, необходимо и достаточно, чтобы $X = \tilde{X}_1(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\omega(T) < 0$, и, значит, $\mathbb{A}_c$ – обратимый оператор. Если $\mathbb{A}_c = A_0$ и $x_0 \in X$, то из равенств, приведенных при доказательстве следствия 5, получаем, что $x_0 \in \tilde{X}_1(T)$. Если $X = \tilde{X}_1(T)$, то равенство $\mathbb{A}_c = A_0$ вытекает из следствия 5 и теоремы 8. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\rho(\mathbb{A}_0) \cap \mathbb{C}_{\omega(T)} \neq \emptyset$, то $(\mathbb{A}_0 - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}_{\omega(T)}$. Непосредственно из определения оператора $\mathbb{A}_0$ следует, что $\text{Im}(\mathbb{A}_0 - \lambda I) = X_c = X$. Таким образом, T – полугруппа класса C_0 .

5. Эргодические теоремы для полугрупп операторов. Наличие базового генератора у полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ позволяет рассматривать эргодические средние Абеля и, следовательно, появляется возможность получения эргодических теорем. Приводимые в этом пункте эргодические теоремы существенно используют понятия и результаты статьи [8] и работы [9; гл. 2]; поэтому в начале остановимся на их формулировке.

Пусть $\mathfrak{A}$ – коммутативная замкнутая подалгебра из алгебры $\text{End } X$ и $\mathcal{I}$ – замкнутый идеал из алгебры $\mathfrak{A}$. Через $\overline{\mathcal{I}X}$ обозначим замыкание в X наименьшего линейного подпространства $\mathcal{I}X$, содержащего все векторы вида Ax , где $A \in \mathcal{I}$ и $x \in X$. Символ $X(\mathcal{I})$ введем для обозначения (замкнутого) подпространства $\{x \in X : Ax = 0 \text{ для любого } A \in \mathcal{I}\}$. В банаховой алгебре $\text{End } X$ будет рассматриваться сильная операторная топология so .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Ограниченную направленность (A_α) операторов из $\text{End } X$, где α берется из направленного множества Λ , назовем $\mathcal{I}$ -направленностью операторов (направленностью по идеалу $\mathcal{I}$), если выполнены следующие условия:

- 1) $\text{so-lim } A_\alpha A = 0$ для любого $A \in \mathcal{I}$;
- 2) $A_\alpha x - x \in \overline{\mathcal{I}X}$ для любых $\alpha \in \Lambda, x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если $(A_\alpha, \alpha \in \Lambda)$ есть направленность по идеалу $\mathcal{I}$ из алгебры $\mathfrak{A}$, то символом $\text{Erg}(X, (A_\alpha))$ обозначим замкнутое подпространство

$$\{x \in X : \text{существует } \lim A_\alpha x\}$$

и назовем его эргодическим подпространством, отвечающим направленности (A_α) .

Следующая теорема была доказана в работах [8; теорема 1], [9; теорема 2.2.5].

ТЕОРЕМА 10. Пусть $(A_\alpha, \alpha \in \Lambda)$ – направленность по идеалу $\mathcal{I}$ из алгебры $\mathfrak{A}$. Для того чтобы имели место равенства

$$X = X(\mathcal{I}) \oplus \overline{\mathcal{I}X} = \text{Erg}(X, (A_\alpha)), \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы из подпространства $X(\mathcal{I})$ разделяли векторы из подпространства

$$X^*(\mathcal{I}) = \{\xi \in X^* : A^*\xi = 0 \text{ для любого } A \in \mathcal{I}\},$$

где X^* – сопряженное к X банахово пространство и A^* – сопряженный к A оператор.

По исследуемой полугруппе $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ введем в рассмотрение замкнутую подалгебру $\mathfrak{A}_T$ из алгебры $\text{End } X$, содержащую операторы $T(t)$, $t > 0$, и тождественный оператор I . Символом $\mathcal{I}_T$ обозначим наименьший замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{A}_T$, порожденный операторами $T(t)$, $t > 0$ (он либо является максимальным, либо совпадает с $\mathfrak{A}_T$). В этом случае верны равенства

$$X(\mathcal{I}_T) = \text{Ker } T, \quad \overline{\mathcal{I}_T X} = \overline{\text{Im } T}, \quad X^*(\mathcal{I}_T) = \text{Ker } T^* = \bigcap_{t>0} \text{Ker } T^*(t). \quad (11)$$

В дальнейшем предполагается существование базового генератора $\mathcal{A} \in \text{Gen}(T)$. Множество $\mathbb{R}_\omega$ считается направленным по возрастанию чисел из $\mathbb{R}_\omega$, и будем предполагать, что направленность операторов $A_\lambda = \lambda R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{R}_\omega$, ограничена в $\text{End } X$, т.е. $\sup_{\lambda > \omega} \|A_\lambda\| = M < \infty$.

ЛЕММА 5. Направленность операторов

$$A'_\lambda = I + \lambda R(\lambda, \mathcal{A}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_\omega,$$

является направленностью по идеалу $\mathcal{I}_T$ и

$$\text{Erg}(X, A'_\lambda) = \text{Ker } T \oplus \overline{\text{Im } T}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ограниченности направленности операторов $(A'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_\omega)$ условие 1) из определения 6 достаточно проверить только для операторов $T(t)$, $t > 0$, являющихся образующими идеала $\mathcal{I}_T$. Из теоремы 4 (ввиду включения $\text{Im } T \subset \tilde{X}_1(T)$) следует, что для любых $\delta > 0$, $x \in X$ и $\lambda > \max\{\omega, 0\}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|A'_\lambda T(t)x\| &= \lambda \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} (T(t+\tau) - T(t))x \, d\tau \right\| \\ &\leq \lambda \left\| \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} (T(t+\tau) - T(t))x \, d\tau \right\| + \lambda \left\| \int_\delta^\infty e^{-\lambda\tau} (T(t+\tau) - T(t))x \, d\tau \right\| \\ &\leq 2 \sup_{0 < \tau \leq \delta} \|(T(t+\tau) - T(t))x\| + \lambda \left(\frac{e^{-\lambda\delta}}{\lambda} + \frac{e^{(\omega-\lambda)\delta}}{\lambda - \omega} \right) \|T(t)x\|, \end{aligned}$$

где $t > 0$ и $C > 0$. Из этих оценок следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A'_\lambda T(t)x = 0$.

Поскольку $\text{Im } R(\lambda, \mathcal{A}) = D(A)$ для любого $\lambda > \omega$ и $D(\mathcal{A}) \subset D(A) \subset \overline{\text{Im } T}$, то $A'_\lambda x - x = A_\lambda x \in \mathcal{I}_T x$ для любого вектора $x \in X$.

Равенство (12) вытекает из более общих результатов статьи [10; лемма 1] и работы [11; лемма 2.2.4]. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим направленность операторов вида

$$C(\alpha, \beta)x = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} T(\tau)x d\tau, \quad x \in X, \quad (\alpha, \beta) \in \Lambda,$$

где направленное множество $\Lambda = \{(a, b) \in (0, 1)^2 : a < b\}$ с отношением порядка $(\alpha_2, \beta_2) \prec (\alpha_1, \beta_1)$, если $\alpha_2 \geq \alpha_1$, $\beta_2 \geq \beta_1$. Далее предполагается, что эта направленность ограничена на каждом векторе $x \in X$ и, следовательно, равномерно ограничена.

ЛЕММА 6. *Направленность операторов*

$$A_{\alpha, \beta} = I - C(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \in \Lambda,$$

является направленностью по идеалу $\mathcal{I}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $t > 0$ и $x \in X$ верны равенства

$$A(\alpha, \beta)T(t)x = -\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (T(t + \tau) - T(t))x d\tau, \quad (\alpha, \beta) \in \Lambda.$$

Из непрерывности функции $\tau \mapsto T(t + \tau)x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ следует, что

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0, \beta > \alpha} A(\alpha, \beta)T(t)x = 0.$$

Значит (см. доказательство леммы 4), выполнено условие 1 из определения 6. Очевидно, что $C(\alpha, \beta)x \in \overline{\mathcal{I}_T x}$ для всех $x \in X$ и $(\alpha, \beta) \in \Lambda$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 11. *Для каждой из $\mathcal{I}_T$ -направленностей $(A_{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}_{\omega}), (A_{\alpha, \beta}, (\alpha, \beta) \in \Lambda)$ верны равенства*

$$X = \text{Ker } T \oplus \overline{\text{Im } T} = \mathbb{A}0 \oplus \overline{\text{Im } T} \quad (13)$$

тогда и только тогда, когда векторы из подпространства $\text{Ker } T$ разделяют функционалы из подпространства

$$\text{Ker } T^* = \bigcap_{t > 0} \text{Ker } T^*(t).$$

В частности, равенства (13) имеют место, если выполнено одно из следующих трех условий:

- 1) X – рефлексивное банахово пространство;
- 2) соответствующая $\mathcal{I}_T$ -направленность слабо компактна на каждом векторе $x \in X$;
- 3) $\dim \text{Ker } T = \dim \text{Ker } T^*$.

Кроме того, разложение (13) осуществляет проектор

$$Px = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0, \beta > \alpha} C(\alpha, \beta)x = \lim_{\omega < \lambda \rightarrow \infty} A_{\lambda}x, \quad x \in X, \quad \text{Im } P = \overline{\text{Im } T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 5, 6 и из теоремы 10, если воспользоваться равенствами (11) при расшифровке равенств (10). Выполнение любого из трех условий теоремы 11 гарантирует выполнение условия разделения векторами из $\text{Ker } T$ функционалов из подпространства $\text{Ker } T^*$.

6. Дифференциальные уравнения с необратимым оператором при производной. Рассматриваемые в предыдущих пунктах классы полугрупп естественным образом появляются при исследовании задачи Коши

$$F\dot{x}(t) = Gx(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$x(0) = x_0 \in X, \quad (15)$$

где $G: D(G) \subset X \rightarrow Y$, $F: D(F) \subset X \rightarrow Y$ – линейные операторы с областями определения $D(G)$, $D(F)$ соответственно из банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y . Далее предполагается, что $\text{Ker } F \neq \{0\}$. Упорядоченной паре операторов (G, F) сопоставим линейное отношение $\mathcal{A}_\ell \in LR(X)$ вида

$$\mathcal{A}_\ell = F^{-1}G = \{(x_1, x_2) \in D(G) \times D(F) : Gx_1 = Fx_2\} \subset X \times X.$$

Тогда задача (14), (15) эквивалентна задаче (15) для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}_\ell x(t), \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Поэтому описание решений задачи (14), (15) может вестись с использованием вырожденных полугрупп операторов, одним из генераторов которой может являться отношение $\mathcal{A}_\ell$. Исследование задачи Коши (14), (15) с применением линейных дифференциальных включений проводилось в монографии [4], в которой имеется обширная библиография, и в статье [6]. Отметим также работы [10], [12]–[14].

Нетривиальные примеры вырожденных полугрупп операторов возникают при исследовании задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вида

$$B\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m), \quad (18)$$

где $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^m$ – многочлены порядка не выше p , $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $L_2 = L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ – гильбертово пространство измеримых функций, определенных на $\mathbb{R}^n$ со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом. Применение преобразования Фурье (по переменной $x \in \mathbb{R}^n$) сводит задачу (17), (18) к задаче (см. [11] и [12])

$$B(s)\frac{\partial \widehat{u}(t, s)}{\partial t} = A(s)\widehat{u}(t, s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (\widehat{17})$$

$$\widehat{u}(0, s) = \widehat{f}(s), \quad \widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m), \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (\widehat{18})$$

Функции A, B определяют операторы умножения в L_2 , обозначаемые $\widetilde{G}$ и $\widetilde{F}$ соответственно, с областями определения

$$D(\widetilde{G}) = \{x \in L_2 : Ax \in L_2\}, \quad D(\widetilde{F}) = \{x \in L_2 : Bx \in L_2\}.$$

Используя обратное преобразование Фурье, естественным образом определим области определения операторов G и F с помощью дифференциальных выражений $A(-i\partial/\partial x)$ и $B(-i\partial/\partial x)$ соответственно, т.е. задача (17), (18) приобретает вид (14), (15), где $X = L_2$.

Используемые далее понятия и результаты из спектральной теории упорядоченных пар операторов содержатся в статье [6]. Будем считать, что для каждого $s \in \mathbb{R}^n$ резольвентное множество $\rho(A(s), B(s)) = \rho(A_\ell(s))$, где $A_\ell(s) = B(s)^{-1}A(s)$, пары $(A(s), B(s))$ непусто и $\text{Ker } B(s) \neq \{0\}$. Следовательно, число точек расширенного спектра $\tilde{\sigma}(A(s), B(s)) = \tilde{\sigma}(A_\ell(s))$ пары $(A(s), B(s))$ не превосходит числа m , причем $\infty \in \tilde{\sigma}(A(s), B(s))$, $s \in \mathbb{R}^n$. Для каждого $s \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим замкнутый положительно ориентированный жорданов контур $\gamma(s)$, содержащий множество $\sigma(A_\ell(s)) = \sigma(A(s), B(s))$. Формула

$$(T(t)x)(s) = \Phi(t, s)x(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad x \in L_2, \quad t > 0, \quad (19)$$

определяет в L_2 полугруппу $\{T(t) : t > 0\}$ замкнутых операторов умножения на функцию

$$\Phi(t, s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} e^{\lambda t} R(\lambda, A_\ell(s)) d\lambda, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

со следующими свойствами:

- 1) $\Phi(t_1 + t_2, s) = \Phi(t_1, s)\Phi(t_2, s)$, $t_1, t_2 \geq 0$, $s \in \mathbb{R}^n$,
- 2) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\Phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ допускает голоморфное расширение на $\mathbb{C}^n$.

Непосредственно из теоремы Планшереля в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и определения базового генератора следует

ТЕОРЕМА 12. *Для того чтобы полугруппа T была полугруппой ограниченных операторов, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t > 0$ выполнялось условие $\sup_{s \in \mathbb{R}^n} \|\Phi(t, s)\| < \infty$. При выполнении этого условия отношение*

$$\mathcal{A}_\ell = \{(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) : x(s) = A(s)x_0(s), \\ y(s) = B(s)x_0(s), s \in \mathbb{R}^n, \text{ для некоторой функции } x_0 \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)\},$$

является базовым генератором полугруппы T .

Пусть теперь $m = 2$ и функции A, B определяются с помощью матричных функций

$$A_0 = (a_{ij}), \quad B_0 = (b_{ij}), \quad a_{ij}, b_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad i, j = 1, 2.$$

Будем считать выполненными следующие условия:

- 1) $\det B_0(s) = 0$, $s \in \mathbb{R}^n$,
- 2) $\varphi(s) \neq 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, для многочлена $\varphi = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Тогда

$$R(\lambda, A_\ell(s)) = R(\lambda, A(s))B(s) = \left(\lambda I - \frac{\det A(s)}{\varphi(s)} \right)^{-1} P_0(s), \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где $P_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^2$ – проекторнозначная функция, являющаяся оператором умножения на матричную функцию

$$\frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} & a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} \\ a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} & a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

В данном случае функция $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^2$ имеет вид

$$\Phi(t, s) = \left(\exp \frac{\det A(s)}{\varphi(s)} t \right) P_0(s), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим также, что

$$\tilde{\sigma}(A(s), B(s)) = \left\{ \frac{\det A(s)}{\varphi(s)}, \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(s) = \operatorname{Re} \frac{\det A(s)}{\varphi(s)}, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

При выполнении условий

$$\operatorname{Re} \frac{\det A(s)}{\varphi(s)} \leq -C_1 \|s\|^h + C_2, \quad |\varphi(s)| \geq C_3, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

для некоторых положительных постоянных h , C_1 , C_3 и $C_2 \in \mathbb{R}$ получаем, что формула (19) определяет вырожденную полугруппу операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} L_2$, для которой

$$\|T(t)\| \leq \frac{Ce^{\gamma t}}{t^\alpha}, \quad t > 0,$$

для некоторых $C > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Тем самым открывается возможность использования полученных в пп. 3–5 результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хилле, Р. С. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [2] К.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [3] R. Cross, *Multivalued Linear Operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [4] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **215**, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [5] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:4 (2002), 65–70.
- [6] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42.
- [7] R. Arens, “Operational calculus of linear relations”, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 9–23.
- [8] А. Г. Баскаков, “Операторные эргодические теоремы и дополняемые подпространства банаховых пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 11, 3–11.
- [9] А. Г. Баскаков, “Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов”, *СМФН*, **9** (2004), 3–151.
- [10] Г. А. Свиридюк, В. А. Федоров, “Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:5 (1995), 1130–1145.
- [11] Н. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, М., 1958.
- [12] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [13] Н. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально-операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.
- [14] У. А. Ануфриева, И. В. Мельникова, “Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами”, *СМФН*, **14** (2005), 3–156.

А. Г. Баскаков

Воронежский государственный университет

E-mail: mmio@amm.vsu.ru

Поступило

22.03.2007

Исправленный вариант

15.01.2008