Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Беляев, Почти продолжимость решений дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 05:11:01

Почти продолжимость решений дифференциальных уравнений

С. А. Беляев

Вводится понятие почти продолжимости решения дифференциального уравнения 1-го порядка $dy/dx = f(x, y)$ на всю действительную ось. Дается критерий почти продолжимости решений в том случае, когда правая часть рассматриваемого уравнения является мероморфной функцией одного переменного y : $f(x, y) = g(y)$. В качестве примера подробно изучен случай рациональной и, в частности, целой функции $g(y)$.

Библиография: 1 название.

1. Почти продолжимость

1.1. Определение. Пусть f – определенная и непрерывная в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^2$ функция, $(x_0, y_0) \in G$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad x, y \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (1), (2) называется *почти продолжимым через точку* $x = a$, в которой функция φ не является решением уравнения (1) в классическом смысле, если

- 1) функция $y = \varphi(x)$ определена в некоторой *левосторонней* ε -окрестности точки $x = a$ и имеет конечный или бесконечный предел *слева* в точке a ;
- 2) существует единственное решение исходного уравнения, определенное в *правосторонней* ε -окрестности точки a и имеющее тот же самый конечный или, соответственно, бесконечный предел *справа* в точке a .

Пусть $\mathcal{M}$ – множество тех точек числовой прямой, в которых функция y не является решением уравнения (1) в классическом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение $y = \varphi(x)$ называется *почти продолжимым на* $\mathbb{R}^1$, если

- 1) множество $\mathcal{M}$ состоит из изолированных точек;
- 2) решение $y = \varphi(x)$ почти продолжимо через все точки множества $\mathcal{M}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05.01.00422 а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1549.2003.1).

1.2. Связь продолжимости и почти продолжимости.

ЛЕММА 1. Если некоторое решение задачи Коши (1), (2) (просто) продолжимо на $\mathbb{R}^1$, то оно и почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть некоторое решение $y = y(x)$ задачи Коши (1), (2) (просто) продолжимо на $\mathbb{R}^1$. Тогда оно определено, конечно и непрерывно дифференцируемо для любого $x \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, $\mathcal{M} = \emptyset$ и определение 1 выполнено.

2. Критерий почти продолжимости решений для мероморфной правой части

Разберем теперь задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = h(y), \quad (3)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad (4)$$

в которой h будем считать мероморфной функцией. Пусть $\mathcal{N}$ – множество ее (изолированных!) нулей, а $\mathcal{P}$ – множество ее (также изолированных) конечных полюсов. Тогда все нули и полюса функции h разбивают числовую ось на несколько промежутков постоянного знака функции h , каждый из которых может быть одного из следующих восьми видов:

$$\underbrace{(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \alpha), \quad (\beta, \beta')}_{\text{конечные типы}}, \quad \underbrace{(-\infty, \alpha), \quad (\alpha, +\infty), \quad (-\infty, \beta), \quad (\beta, +\infty)}_{\text{бесконечные типы}}, \quad (5)$$

где $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ – нули функции h , $\beta, \beta' \in \mathcal{P}$ – ее полюса.

Исследуем продолжимость решений задачи Коши (3), (4) для мероморфной функции h , определенной на каждом из промежутков вышеперечисленных видов, выбирая y_0 в этом же промежутке.

2.1. Продолжимость для промежутка вида “нуль-полюс”.

ЛЕММА 2. Пусть мероморфная функция h в (3) определена на конечном интервале (α, β) , причем $h(\alpha) = 0$, а в точке β функция h имеет полюс порядка k , $h(y) \neq 0$, $y \in (\alpha, \beta)$. Тогда

- если $h(y) > 0$, $y \in (\alpha, \beta)$, то любое решение задачи Коши (3), (4) с $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ (просто) продолжимо влево на $(-\infty; x_0]$ и не продолжимо вправо;
- если $h(y) < 0$, $y \in (\alpha, \beta)$, то оно продолжимо вправо на $[x_0, +\infty)$ и не продолжимо влево.

$h(y) > 0, y, y_0 \in (\alpha, \beta)$		$h(y) < 0, y, y_0 \in (\alpha, \beta)$	
влево	вправо	влево	вправо
всегда продолжимо	не продолжимо	не продолжимо	всегда продолжимо

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $h(y) > 0$, $y \in (\alpha, \beta)$, $h(\alpha) = 0$, β – полюс функции h k -го порядка. Уравнение (3) можно проинтегрировать

$$x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{d\xi}{h(\xi)} = x_0 + H(y). \quad (6)$$

Так как $H'(y) = 1/h(y) > 0$, $y \in (\alpha, \beta)$, то H является строго монотонно возрастающей функцией на (α, β) . Следовательно, $y = y(x) = H^{-1}(x - x_0)$ является решением уравнения (3), где H^{-1} – функция, обратная к H .

Если интеграл $\int_{\alpha}^{y_0} dy/h(y)$ расходится, то переходя в (3) к пределу при $y \rightarrow \alpha + 0$, имеем

$$\lim_{y \rightarrow \alpha+0} x(y) = \lim_{y \rightarrow \alpha+0} \left[x_0 - \int_y^{y_0} \frac{d\xi}{h(\xi)} \right] \stackrel{h(y)>0}{=} -\infty.$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} H^{-1}(x - x_0) = \alpha + 0,$$

т.е. решение $y = y(x)$ продолжимо влево на всю числовую полуось $(-\infty, x_0]$.

Если же интеграл $\int_{\alpha}^{y_0} dy/h(y)$ сходится, то

$$\lim_{y \rightarrow \alpha+0} x(y) = x_0 - \int_{\alpha}^{y_0} \frac{dy}{h(y)} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x} \stackrel{h(y)>0}{<} x_0,$$

т.е. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}+0} y(x) = \alpha + 0$. Но тогда решение $y = y(x)$ можно продолжить по особому решению $y = \alpha$ [1]. Именно, функция

$$y = y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [\bar{x}, x_0], \\ \alpha, & x \in (-\infty, \bar{x}), \end{cases}$$

является решением задачи Коши (3), (4), продолжимым на всю полуось $(-\infty, x_0]$.

Итак, вне зависимости от сходимости интеграла $\int_{\alpha}^{y_0} dy/h(y)$ решение задачи Коши (3), (4) с $y_0 \in (\alpha, \beta)$ продолжимо влево на всю числовую полуось $(-\infty, x_0]$.

Перейдем теперь в (6) к пределу при $y \rightarrow \beta - 0$:

$$\lim_{y \rightarrow \beta-0} x(y) = \lim_{y \rightarrow \beta-0} \left[x_0 + \int_{y_0}^y \frac{d\xi}{h(\xi)} \right].$$

Так как точка β является полюсом функции h порядка $k \in \mathbb{N}$, интеграл $\int_{y_0}^{\beta} dy/h(y)$ сходится или расходится одновременно с интегралом $I = \int_{y_0}^{\beta} (y - y_0)^k dy$. Так как $k \in \mathbb{N}$, то I сходится. Обозначим

$$\tilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow \beta-0} x(y) = x_0 + H(\beta) = x_0 + \int_{y_0}^{\beta} \frac{dy}{h(y)} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}-0} y(x) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}-0} H^{-1}(x - x_0) = \beta - 0,$$

и решение $y = y(x)$ не продолжимо вправо за точку $x = \tilde{x}$. Отметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{dy}{dx} = \lim_{y \rightarrow \beta-0} g(y) = +\infty,$$

т.е. интегральная кривая решения $y = y(x)$ подходит к точке $(\tilde{x}, \beta)$ с вертикальной касательной.

Итак, решение $y = y(x)$ всегда продолжимо влево на всю полуось $(-\infty, x_0]$ и не продолжимо вправо, так как существует лишь для $x \in (-\infty, \tilde{x})$, $\tilde{x} > x_0$. Подобным образом разбирается случай $h(y) < 0$, $y \in (\alpha, \beta)$. Лемма доказана.

2.2. Продолжимость для всех видов промежутков. Совершенно аналогично формулируются и доказываются леммы для остальных видов промежутков (5). Сформулируем их все (включая лемму 2) единым образом.

ЛЕММА 3. Пусть мероморфная функция h в (3) определена на конечном или бесконечном промежутке $I \subset \mathbb{R}^1$ одного из типов (5). Тогда для односторонней продолжимости решений задачи Коши (3), (4) с $y_0 \in I$ необходима и достаточна расходимость интегралов, указанных в следующей таблице. Если в клетке таблицы стоит прочерк, то решение продолжимо в указанную сторону без каких-либо условий.

В этой таблице $\alpha \in \mathcal{N}$ – нуль функции h , а $\beta \in \mathcal{P}$ – ее полюс. Тот факт, что решение не продолжимо в ту или иную сторону означает, как и в лемме 2, что решение обрывается в конечной точке, а угловой коэффициент касательной к интегральной кривой стремится, при приближении к точке обрыва, к бесконечности.

№	I – промежуток	$g(y) > 0, y, y_0 \in I$		$g(y) < 0, y, y_0 \in I$	
		влево	вправо	влево	вправо
1	$(-\infty, \beta)$	$\int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{h(y)}$	не продолжимо	не продолжимо	$\int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{h(y)}$
2	(β, α)	не продолжимо	–	–	не продолжимо
3	(β, β')	не продолжимо	не продолжимо	не продолжимо	не продолжимо
4	$(\beta, +\infty)$	не продолжимо	$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$	$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$	не продолжимо
5	$(-\infty, \alpha)$	$\int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{h(y)}$	–	–	$\int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{h(y)}$
6	(α, β)	–	не продолжимо	не продолжимо	–
7	(α, α')	–	–	–	–
8	$(\alpha, +\infty)$	–	$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$	$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$	–

2.3. Почти продолжимость для мероморфной функции h в (3). Исследуем теперь почти продолжимость решений задачи Коши (3), (4). Пусть, как и выше, $\mathcal{N}$ – множество действительных нулей мероморфной функции h в (3), $\mathcal{P} \neq \emptyset$ – множество ее полюсов, $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$ – их объединение. Ясно, что $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Решение дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция h в (3) является мероморфной. Тогда для почти продолжимости решений задачи Коши (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы

- 1) кратности всех полюсов функции h были четны;
- 2) расходились на бесконечном пределе интегралы, которые указаны в следующей таблице в зависимости от структуры множества $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$ – объединения множеств нулей $\mathcal{N}$ и полюсов $\mathcal{P}$ функции h .

$\sup \mathcal{R} = +\infty,$ $\inf \mathcal{R} = -\infty$	$\sup \mathcal{R} = +\infty,$ $\inf \mathcal{R} = \gamma < \infty$	$\sup \mathcal{R} = \delta < \infty,$ $\inf \mathcal{R} = -\infty$	$\sup \mathcal{R} = \delta < \infty,$ $\inf \mathcal{R} = \gamma < \infty$
–	$\int_{-\infty}^{\gamma} \frac{dy}{h(y)}$	$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$	$\int_{-\infty}^{\gamma} \frac{dy}{h(y)} \cup \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)}$

Теорема 1 будет получена из следующих теорем 2–5, которые исследуют различную структуру множества $\mathcal{R}$.

2.3.1. $\mathcal{R}$ неограниченно ни справа, ни слева.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция h в (3) является мероморфной. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$ – объединение множеств ее нулей и полюсов является неограниченным ни справа, ни слева. Любое решение задачи Коши (3), (4) почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда кратности всех полюсов функции h четны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^1$ в (4). Если $y_0 \in \mathcal{N}$, то $y(x) \equiv y_0$ – продолжимое на $\mathbb{R}^1$, а потому по лемме 1 и почти продолжимое решение. Если $y_0 \in \mathcal{P}$, то задача Коши (3), (4) не имеет решения. Если же $y_0 \notin \mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$, то ввиду неограниченности $\mathcal{R}$ существует такой конечный интервал I , что $y_0 \in I$, $h(y) \neq 0$, $y \in I$.

Так как I конечен, он может быть только одного из следующих видов (5):

$$(\alpha, \beta) \quad (\alpha, \alpha') \quad (\beta, \alpha) \quad (\beta, \beta'),$$

где $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\beta, \beta' \in \mathcal{P}$.

Если I имеет вид (α, α') , т.е. границы интервала являются нулями функции h , то, как доказано в [1], решение продолжимо, а значит, и почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$. Разберем подробно тот случай, когда I имеет вид (α, β) и $h(y) > 0$ $y \in I$. Остальные случаи разбираются совершенно аналогично.

Итак, пусть $I = (\alpha, \beta)$, $y_0 \in I$, $h(\alpha) = 0$, β – полюс кратности k функции h . Так как множество $\mathcal{R}$ не ограничено и состоит из изолированных нулей и полюсов функции h , следующий за I на числовой оси промежуток J является конечным интервалом. Может представиться два случая: $J = (\beta, \alpha')$ или $J = (\beta, \beta')$, где $\alpha' \in \mathcal{N}$, $\beta' \in \mathcal{P}$ – точка множества $\mathcal{R}$ следующая на числовой оси за точкой β . Для дальнейшего будет важно только то, что общий конец интервалов I и J (точка β) является полюсом функции h . Лишь для определенности будем считать, что $J = (\beta, \alpha')$. Если окажется, что $J = (\beta, \beta')$, то все нижеследующие рассуждения нужно будет повторить для точки β' .

Пусть, наконец, для определенности $h(y) > 0$, $y \in I$ (хотя для дальнейшего будет важно лишь то, что $h(y) \neq 0$, $y \in I$). Тогда к I применима лемма 3 и решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (3), (4) с $y_0 \in I$ продолжимо влево и не продолжимо вправо за точку с абсциссой

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \int_{y_0}^{\beta} \frac{dy}{h(y)} \Big|_{h(y) > 0} x_0.$$

Причем

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \varphi(x) = \beta - 0, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} d\varphi(x)/dx = +\infty.$$

Пусть k – кратность полюса β – число четное; тогда $h(y) > 0$, $y \in J$ так же, как и при $y \in I$. Покажем, что решение $y = \varphi(x)$ с $y_0 \in I$ почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$.

Рис. 1. Продолжимость решений для промежутка “нуль-полюс”

Если $x'_0 \in \mathbb{R}^1$ и $y'_0 \in \mathbb{R}^1$, то к интервалу J применима лемма 3 и решение $y = \psi(x)$ с такими начальными условиями не продолжимо вправо за точку

$$\bar{x}' = x'_0 - \int_{\beta}^{y'_0} \frac{dy}{h(y)} \quad h(y) < 0, \quad x'_0,$$

причем

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}'+0} \psi(x) = \beta + 0, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}'+0} \frac{d\psi(x)}{dx} = +\infty.$$

Покажем, что можно так выбрать $x'_0, y'_0 \in J$, что точки обрыва решений $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ совпадут: $\bar{x} = \bar{x}'$. В самом деле, $y'_0 \in J$ можно выбрать произвольно; тогда x'_0 однозначно определяется из уравнения $\bar{x} = \bar{x}'$, откуда имеем

$$x_0 + \int_{y_0}^{\beta} \frac{dy}{h(y)} = x'_0 - \int_{\beta}^{y'_0} \frac{dy}{h(y)} \quad \Leftrightarrow \quad x'_0 = x_0 + \int_{y_0}^{\beta} \frac{dy}{h(y)} + \int_{\beta}^{y'_0} \frac{dy}{h(y)}.$$

В точке β – несобственной для каждого из интегралов в формуле в рамке – эти интегралы сходятся одновременно (по теореме сравнения) со сходящимися интегралами $\int_{y_0}^{\beta} (y - \beta)^k dy$ и $\int_{\beta}^{y'_0} (y - \beta)^k dy$. Так как при $x = \bar{x}$ имеем $dy/dx|_{x=\bar{x}} = h(y)|_{y=\beta} = +\infty$, то ни решение $y = \varphi(x)$, ни решение $y = \psi(x)$ не являются решениями уравнения (3) в точке $x = \bar{x}$ – в этой точке обе части (3) обращаются в $+\infty$.

Покажем, однако, что решение $y = \varphi(x)$ является почти продолжимым на $\mathbb{R}^1$, а именно, это продолжение осуществляет функция

$$y = y(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [x_0, \bar{x}), \\ \beta, & x = \bar{x}, \\ \psi(x), & x \in (\bar{x}, x'_0]. \end{cases} \quad (7)$$

В самом деле, $y = \varphi(x)$ определено в левосторонней окрестности точки $\bar{x}$, имеет бесконечный левосторонний предел в этой точке и для него существует решение $y = \psi(x)$, определенное в правосторонней окрестности этой точки и имеющее в ней

такой же правосторонний предел ($\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}+0} \psi(x) = \beta$). Единственность решения $y = \psi(x)$, обладающего указанными свойствами (см. определение 1), следует из теоремы существования и единственности решения задачи, примененной к интервалу J и однозначности выбора x'_0 по произвольному $y'_0 \in J$.

Пусть, наконец, k – кратность полюса β – число нечетное. Тогда $h(y) > 0$, $y \in I$, но $h(y) < 0$, $y \in I$, т.е. характер монотонности решений уравнения (3) на обоих промежутках разный. Для решения $y = \varphi(x)$ с $x_0 \in \mathbb{R}^1$ и $y_0 \in I$ аналогично вышесказанному доказывается существование и единственность решения $y = \psi(x)$ с $x'_0 \in \mathbb{R}^1$ и $y'_0 \in I$ такого, что

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}+0} \psi(x) = \beta.$$

Однако, ввиду различия знаков функции h на I и J имеем

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} \varphi'(x) = \lim_{y \rightarrow \beta-0} h(y) = +\infty,$$

но

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}+0} \psi'(x) = \lim_{y \rightarrow \beta+0} h(y) = -\infty.$$

Следовательно, функция $y = \psi(x)$ не является почти продолжением решения $y = \varphi(x)$ через точку $x = \bar{x}$ ибо имеет в этой точке правосторонний предел ($= -\infty$), отличный от левостороннего предела ($= +\infty$) функции $y = \varphi(x)$ в этой точке.

Геометрически последнее обстоятельство обозначает, что графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ лежат по одну сторону от их общей вертикальной касательной $x = \bar{x}$, а потому (7) не является функцией.

Итак, k – кратность полюса β – не может быть нечетной. Теорема доказана.

2.3.2. $\mathcal{R}$ неограничено справа, но ограничено слева.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция h в (3) является мероморфной. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$ – объединение множеств ее нулей и полюсов – является неограниченным справа, но ограниченным слева: $\inf \mathcal{R} = \gamma > -\infty$. Любое решение задачи Коши (3), (4) почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда

- 1) кратности всех полюсов функции h четны;
- 2) расходится на бесконечном пределе интеграл $\int_{-\infty}^{\gamma} dy/h(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^1$. Если $y_0 \in \mathcal{N}$, то $y(x) \equiv y_0$ – продолжимое, а по лемме 1 и почти продолжимое на $\mathbb{R}^1$, решение задачи Коши (3), (4). Если $y_0 \in \mathcal{P}$, то (3) решения не имеет. Если $y_0 \in (\gamma, +\infty) \setminus \mathcal{R}$, то применимы рассуждения теоремы 2. Остается разобрать случай $y_0 \in (-\infty, \gamma)$. В каждом из случаев $\gamma \in \mathcal{N}$ либо $\gamma \in \mathcal{P}$ доказательство завершает лемма 3. Теорема доказана.

2.3.3. Другие виды множества $\mathcal{R}$. Доказательство следующих двух теорем совершенно аналогично.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция h в (3) является мероморфной. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$ – объединение множеств ее нулей и полюсов – является неограниченным слева, но ограниченным справа: $\sup \mathcal{R} = \delta < +\infty$. Любое решение задачи Коши (3), (4) почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда

- 1) кратности всех полюсов функции h четны;
- 2) расходится на бесконечном пределе интеграл $\int_{\delta}^{+\infty} dy/h(y)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция h в (3) является мероморфной. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$ – объединение множеств ее нулей и полюсов – является ограниченным как слева: $\inf \mathcal{R} = \gamma > -\infty$, так и справа: $\sup \mathcal{R} = \delta < +\infty$. Любое решение задачи Коши (3), (4) почти продолжимо на $\mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда

- 1) кратности всех полюсов функции h четны;
- 2) расходятся на бесконечном пределе интегралы $\int_{-\infty}^{\gamma} dy/h(y)$ и $\int_{\delta}^{+\infty} dy/h(y)$.

Теорема 1 – это собранные воедино теоремы 2–5.

3. Пример $h(y) = P_n(y)/Q_m(y)$ – рациональная функция

Простейшим примером мероморфной функции является, как известно, рациональная функция. Итак, пусть $h(y) = P_n(y)/Q_m(y)$, где P_n и Q_m – многочлены степеней n и m соответственно; пусть также $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $l \in \{1, \dots, n\}$, – действительные нули числителя P_n , т.е. $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, а $\beta_1, \dots, \beta_s$, $s \in \{1, \dots, m\}$, – действительные нули знаменателя Q_m , т.е. $\mathcal{P} = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$, $k_1, \dots, k_s$ – кратности этих полюсов. Для рациональной функции h в (3) теорема 1 принимает особенно простой вид, так как $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$ – конечное множество.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция h в (3) является рациональной: $h(y) = P_n(y)/Q_m(y)$. Любое решение задачи Коши (3), (4) является почти продолжимым на $\mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда

- 1) кратности всех нулей знаменателя Q_m – числа $k_1, \dots, k_s$, $s \in \{1, \dots, m\}$, – четны;
- 2) расходятся на бесконечном пределе интегралы

$$\int_{-\infty}^{\min \mathcal{R}} \frac{Q_m(y)}{P_n(y)} dy \quad \text{и} \quad \int_{\max \mathcal{R}}^{+\infty} \frac{Q_m(y)}{P_n(y)} dy.$$

4. Пример $h(y)$ – целая функция

Другим примером мероморфной функции является функция целая. Пусть $\mathcal{N}$ – множество ее нулей. Запись $\sup \mathcal{N} = +\infty$ означает, что множество $\mathcal{N}$ нулей неограниченно справа. Запись $\inf \mathcal{N} = y_1$ означает, что оно ограничено слева конечным числом y_1 . Аналогичный смысл имеют все подобные записи. Как следствие из теоремы 1 выводится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция h в (3) является целой. Тогда для продолжимости (а значит, по лемме 1 и почти продолжимости) решений задачи Коши (3), (2) необходима и достаточна расходимость на бесконечном пределе интегралов, которые указаны в следующей таблице в зависимости от структуры множества $\mathcal{N}$ нулей функции g .

$\sup \mathcal{N} = +\infty,$ $\inf \mathcal{N} = -\infty$	$\sup \mathcal{N} = +\infty,$ $\inf \mathcal{N} = y_1$	$\sup \mathcal{N} = y_n,$ $\inf \mathcal{N} = -\infty$	$\sup \mathcal{N} = y_n,$ $\inf \mathcal{N} = y_1$
–	$\int_{-\infty}^{y_1} \frac{dy}{g(y)}$	$\int_{y_n}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}$	$\int_{-\infty}^{y_1} \frac{dy}{g(y)} \text{ и } \int_{y_n}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}$

Автор выражает глубокую признательность и благодарность Л. Д. Кудрявцеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Н. Бибилов, *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*, Высшая школа, М., 1991.

С. А. Беляев

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: sergey_belyaev@mail.ru

Поступило

15.06.2007

Исправленный вариант

21.04.2008