Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Новак, О наилучшем локальном приближении наименее простейшими дробями, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 882–887

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:16:20

О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями

Я. В. Новак

В работе приводятся две теоремы о локальном наилучшем приближении наипростейшими дробями, т.е. логарифмическими производными алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами. В теореме 1 получен аналог известной теоремы Бернштейна об описании функций n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ в терминах локальных приближений в равномерной метрике алгебраическими многочленами. Теорема 2 дает описание наипростейшей дроби Паде как предела последовательности наипростейших дробей наилучшего равномерного приближения и является аналогом известного результата Уолша о классических дробях Паде.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. *Наипростейшей дробью степени n* (термин предложен Е. П. Долженко) называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)}, \quad \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\},$$

где $P(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.

Как аппарат приближения наипростейшие дроби активно исследуются с 1999 года, когда В. И. и Д. Я. Данченко (см. [1]) установили возможность равномерного приближения с произвольной точностью наипростейшими дробями каждой (комплексной) функции, непрерывной на компакте и аналитической в его внутренних точках, при условии, что этот компакт не разбивает плоскость (аналог известной теоремы С. Н. Мергеляна). Некоторые другие задачи теории равномерного приближения наипростейшими дробями изучались в работах [2]–[4]. Например, в [2] установлен аналог известной теоремы Джексона о приближении непрерывных на отрезке функций с заданным модулем непрерывности, а в [3] доказана возможность приближения наипростейшими дробями функций, непрерывных на вещественной оси $\mathbb{R}$, которые исчезают на бесконечности.

В настоящей работе приводятся две теоремы о локальных приближениях наипростейшими дробями. Для их формулировки введем следующие обозначения.

Как обычно, $C(I)$ – линейное пространство непрерывных на отрезке $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, функций f с нормой $\|f\|_I = \max_{t \in I} |f(t)|$, $C^n(I)$ – множество n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке I . Через $\mathbf{SR}_n$ мы обозначаем множество

всех наипростейших дробей степени не выше n ; при $n = 0$ по определению оно состоит из единственной функции тождественно равной нулю.

Через

$$\rho_n(f; I) := \inf\{|f - r_n|_I : r_n \in \mathbf{SR}_n\}$$

обозначим величину наилучшего равномерного приближения функции $f \in C(I)$ наипростейшими дробями степени не выше n . Если в определении величины $\rho_n(f; I)$ заменить множество $\mathbf{SR}_n$ на множество $\mathbf{P}_n$ всех алгебраических многочленов степени не выше n , то получим определение величины $E_n(f; I)$. Для функции f , интегрируемой на отрезке I и для фиксированной точки $x \in I$, положим $\alpha(f, x; t) := \int_x^t f(\tau) d\tau$. Функция $\alpha(f, x; t)$, очевидно, принадлежит пространству $C(I)$.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\Delta := [a, b]$, и пусть $n \in \mathbb{N}$. В принятых обозначениях имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы непрерывная функция $f(t)$ на отрезке Δ была на нем n раз непрерывно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\lambda \in C(\Delta)$ такая, что*

$$\frac{\rho_n(f; [\alpha, \beta])}{(\beta - \alpha)^n} \rightarrow \lambda(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha, \beta \rightarrow x$. Если последнее условие выполнено, то имеет место тождество

$$n! 2^{2n-1} \lambda(x) \equiv \left| \frac{d^n}{dt^n} \left(f(t) e^{\alpha(f, x; t)} \right) \right|_{t=x}. \quad (1)$$

Следует заметить, что выражение под модулем в (1) (для краткости, обозначим его через $f^{[n]}(x)$) после упрощений принимает вид, не содержащий функции $e^{\alpha(f, x; t)}$. Это делается с помощью рекуррентных соотношений

$$f^{[n+1]}(x) = \frac{d}{dx} f^{[n]}(x) + f(x) \cdot f^{[n]}(x), \quad f^{[0]}(x) := f(x).$$

Теорема 1 является аналогом известного результата Бернштейна [5] о том, что для принадлежности непрерывной функции $f(t)$ классу $C^n(\Delta)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$E_{n-1}(f; [\alpha, \beta])(\beta - \alpha)^{-n} \rightarrow \lambda(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha, \beta \rightarrow x$, где $\lambda \in C(\Delta)$; если это условие выполнено, то имеет место равенство

$$n! 2^{2n-1} \lambda(x) \equiv |f^{(n)}(x)|.$$

Для формулировки второй теоремы напомним определение наипростейшей дроби Паде.

При $n \geq 1$ наипростейшей дробью Паде порядка n функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, в точке b , в некоторой окрестности U , в которой $f(z)$ однозначна и аналитична, называется наипростейшая дробь $R_n(f, b; \cdot) \in \mathbf{SR}_n$ со свойством:

$$f(z) - R_n(f, b; z) = O((z - b)^n) \quad \text{при } z \rightarrow b.$$

Известно, что дробь $R_n(f, b; z)$ существует, единственна и совпадает с логарифмической производной n -й частичной суммы ряда Тейлора функции $e^{\alpha(f, b; z)}$. Здесь $\alpha(f, b; z) = \int_b^z f(\tau) d\tau$, где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути в некоторой односвязной окрестности точки b , ведущему из b в z . Этот факт установлен в работе [2], а существование и единственность – независимо в [1].

Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой окрестности U точки b , $R_n(\varepsilon, z)$ – наипростейшая дробь ее наилучшего равномерного приближения в круге

$$K(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| \leq \varepsilon\} \subset U$$

(если она не единственна, то фиксируем любую из них), $R_n(z) := R_n(f, b; z)$ – наипростейшая дробь Паде порядка n функции $f(z)$ в точке b . В принятых выше обозначениях имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Функции $R_n(\varepsilon, z)$ сходятся к функции $R_n(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ равномерно на компактных подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащих полюсов функции $R_n(z)$.*

Эта теорема является аналогом известного результата Уолша [6] о том, что аппроксимации Паде являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями.

2. Вспомогательные результаты. Ниже

$$C_1(r) = ((1+r)e^r)^{-1}, \quad C_2(r) = (1+2re^r)e^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \\ d := \max\{\beta - x, x - \alpha\}.$$

Следующая лемма и ее следствие для случая $\eta = 1/2$ доказаны в [2] (см. также [4]). Для общего случая доказательство проводится по той же схеме.

ЛЕММА 1. *Пусть $f, g \in C(I)$, $G(t) = 1 + \alpha(g, x; t)$, $G(t) \neq 0$ на I ,*

$$\delta := \|g - fe^{\alpha(f, x; \cdot)}\|_I, \quad \varepsilon := \left\| \frac{g}{G} - f \right\|_I, \quad \eta := \delta d \cdot \exp(d\|f\|_I) < 1.$$

Тогда

$$\varepsilon \leq ((1-\eta)C_1(d\|f\|_I))^{-1} \cdot \delta, \quad \delta \leq C_2(d\|f\|_I) \cdot \varepsilon$$

при $\varepsilon \leq \|f\|_I$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $f \in C(I) \setminus \mathbf{SR}_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$,*

$$\eta := E_n(fe^{\alpha(f, x; \cdot)})d \cdot \exp(d\|f\|_I) < 1.$$

Тогда

$$(1-\eta)C_1(d\|f\|_I) \leq \frac{E_n(fe^{\alpha(f, x; \cdot)}; I)}{\rho_{n+1}(f; I)} \leq C_2(d\|f\|_I).$$

Поскольку $C_1(d\|f\|_I) \rightarrow 1$, $C_2(d\|f\|_I) \rightarrow 1$, а $\eta = E_n(fe^{\alpha(f, x; \cdot)})d \cdot \exp(d\|f\|_I) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0$, получаем следующий результат.

ЛЕММА 2. *Пусть $f \in C(\Delta) \setminus \mathbf{SR}_{n+1}$, тогда при любом $x \in \Delta$*

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow x} \frac{E_n(fe^{\alpha(f, x; \cdot)}; I)}{\rho_{n+1}(f; I)} = 1.$$

3. Доказательство теоремы 1. Сначала заметим, что функции $f(t)$ и $fe^{\alpha(f,x;t)}$ строго одновременно принадлежат или не принадлежат классу $C^n(\Delta)$ (см. [4; с. 32]).

Пусть $f \in C^n(\Delta)$, тогда также $fe^{\alpha(f,x;t)} \in C^n(\Delta)$. Применяя к последней функции теорему Бернштейна, получаем, что

$$E_{n-1}(fe^{\alpha(f,x;t)}; [\alpha, \beta])(\beta - \alpha)^{-n} \rightarrow \lambda(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha, \beta \rightarrow x$, где непрерывная функция $\lambda(x)$ определяется равенством (1). Сравнивая с леммой 2, получаем необходимость условий теоремы 1.

Пусть теперь

$$\rho_n(f; [\alpha, \beta])(\beta - \alpha)^{-n} \rightarrow \lambda(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha, \beta \rightarrow x$, где непрерывная функция $\lambda(x)$ определяется равенством (1). Снова воспользовавшись леммой 2, получаем справедливость условия теоремы Бернштейна для функции $fe^{\alpha(f,x;t)}$, согласно которой последняя (а вместе с ней и сама функция $f(t)$) принадлежит классу $C^n(\Delta)$. Этим доказана достаточность условий теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Доказательство проводится по схеме подобной оригинальному доказательству Уолпа [6]. Не теряя общности, будем считать, что $b = 0$.

Пусть разложения в ряд Тейлора (при $|z| < \varepsilon$) функций $f(z)$ и $R_n(\varepsilon, z)$ имеют соответственно вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \\ R_n(\varepsilon, z) = \frac{v_1 + 2v_2 z + \dots + nv_n z^{n-1}}{1 + v_1 z + \dots + v_n z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varepsilon) z^k$$

(мы нормировали знаменатель дроби $R_n(\varepsilon, z)$, придав ему значение 1 в точке $z = 0$; в нуль, очевидно, он обращаться не может). Отсюда получаем равенство

$$(1 + v_1 z + \dots + v_n z^n) \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varepsilon) z^k = v_1 + 2v_2 z + \dots + nv_n z^{n-1}.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z^j , $j = 0, \dots, n-1$, после упрощений, получим следующую систему n уравнений (в которой $b_k(\varepsilon) =: b_k$)

$$\begin{aligned} v_1 &= b_0, \\ -b_0 v_1 + 2v_2 &= b_1, \\ &\dots\dots\dots \\ -b_{n-2} v_1 - b_{n-3} v_2 - \dots - b_0 v_{n-1} + nv_n &= b_{n-1}. \end{aligned}$$

Предположив $b_k(\varepsilon)$ известными, ее всегда можно решить, и при том однозначно, относительно неизвестных v_j , $j = 1, \dots, n$, поскольку ее определитель отличен от нуля (равен $n!$).

Пользуясь определением $R_n(z)$ мы можем записать

$$R_n(z) = \frac{t_1 + 2t_2z + \dots + nt_nz^{n-1}}{1 + t_1z + \dots + t_nz^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k.$$

Применяя ту же процедуру, что и выше, получим аналогичную предыдущей систему (такого же вида)

$$\begin{aligned} t_1 &= a_0, \\ -a_0 t_1 + 2t_2 &= a_1, \\ &\dots\dots\dots \\ -a_{n-2} t_1 - a_{n-3} t_2 - \dots - a_0 t_{n-1} + nt_n &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

которую точно также можно однозначно решить относительно неизвестных t_j , $j = 1, \dots, n$, при известных коэффициентах a_k .

Используя экстремальное свойство $R_n(\varepsilon, z)$, имеем

$$\max_{z \in K(\varepsilon)} |f(z) - R_n(\varepsilon, z)| \leq \max_{z \in K(\varepsilon)} |f(z) - R_n(z)|.$$

Поскольку тейлоровские коэффициенты функций $f(z)$ и $R_n(z)$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$ совпадают, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max_{z \in K(\varepsilon)} |f(z) - R_n(\varepsilon, z)| = O(\varepsilon^n).$$

Воспользовавшись интегральным представлением, получим

$$a_k - b_k(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z) - R_n(\varepsilon, z)}{z^{k+1}} dz, \quad a_k - b_k(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-k}),$$

и, таким образом, $a_k - b_k(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Последнее обстоятельство позволяет нам утверждать, что решения $t_j = t_j(a_0, \dots, a_{n-1})$ равномерно стремятся к решениям $v_j = v_j(b_0, \dots, b_{n-1})$, $j = 1, \dots, n$, при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (для этого достаточно воспользоваться известными формулами Крамера для решений обеих линейных систем), и как следствие мы получаем заключение теоремы 2.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность А. В. Покровскому за постановку задач и помощь в работе над статьей, а также О. Н. Косухину за ряд полезных замечаний по поводу ее первоначального варианта.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, "О приближении наимпростейшими дробями", *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559.
- [2] О. Н. Косухин, "Об аппроксимационных свойствах наимпростейших дробей", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 4, 54–59.
- [3] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, "О приближении наимпростейшими дробями на действительной оси", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8.

- [4] О. Н. Косухин, *О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2005.
- [5] С. Н. Бернштейн, “К вопросу о локальном наилучшем приближении функций”, *Докл. АН СССР*, **26**:9 (1940), 839–842.
- [6] J. L. Walsh, “Padé approximants as limits of rational functions of best approximation”, *J. Math. Mech.*, **13**:2 (1964), 305–312.

Я. В. Новак

Институт математики НАН Украины

E-mail: novak@imath.kiev.ua

Поступило

23.10.2007