Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, Абелевы группы как
UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$, *Матем. заметки*, 2010,
том 87, выпуск 3, 412–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:36:54

Абелевы группы как UA -модули над кольцом $\mathbb{Z}$

О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков

Пусть V – модуль над кольцом R . Модуль V называется модулем с однозначным сложением (UA -модулем), если не существует нового сложения на множестве V без изменения действия R на V . В работе найдены UA -модули над кольцом $\mathbb{Z}$.

Библиография: 5 названий.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, V – унитарный левый R -модуль. Модуль V называется *модулем с однозначным сложением* (UA -модулем), если невозможно задать новое сложение на множестве V , не изменяя при этом действия кольца R на V . Нетрудно видеть, что модуль V является UA -модулем тогда и только тогда, когда все R -биекции f на R -модуль W (т.е. f – взаимно однозначное отображение и $f(rv) = rf(v)$ для всех $r \in R, v \in V$) являются R -изоморфизмами модулей V и W [1]. В работе найдены все UA -модули над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Далее везде под словом группа понимается абелева группа. Через $F(A)$ и $T(A)$ обозначается часть без кручения и периодическая часть группы A ; $r_0(A)$ – ранг без кручения группы A ; A_p – примарная компонента периодической группы A ; $Z(p^\infty)$ – квазициклическая группа; $Z(2)$ – группа вычетов по модулю 2; P – множество простых чисел; $o(a)$ – порядок элемента a .

Непустое подмножество C в группе A называется *сильно сервантным*, если $0 \neq na \in C$ влечет $a \in C$ для всех $n \in \mathbb{Z}, a \in A$ (см. [2]). Заметим, что для групп без кручения сильная сервантность равносильна сервантности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – смешанная абелева группа. $\mathbb{Z}$ -Модуль A является UA -модулем тогда и только тогда, когда $r_0(A) = 1$ и $T(A) \cong Z(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* По условию группа A является UA -модулем. Предположим, что $T(A) \not\cong Z(2)$. Пусть $\varphi \in \text{Aut}(T(A)) \setminus \{\text{id}\}$ (такой автоморфизм существует, см., например, [3; т. 2, с. 293]). Полагаем

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in T(A), \\ x, & x \notin T(A). \end{cases}$$

Так как $T(A)$ сильно сервантная подгруппа в A , то $f(nx) = nf(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}, x \in A$.

Если $x \in A \setminus T(A), y \in T(A)$ и $\varphi(y) \neq y$, то

$$f(x+y) = x+y \neq x+\varphi(y) = f(x)+f(y).$$

Противоречие. Следовательно, $T(A) \cong Z(2)$.

Поскольку периодическая часть группы A является ограниченной группой, по [3; теорема 27.5.] группа A расщепляется (см. также [3; теорема 100.1.]).

Допустим, что $r_0(A) > 1$. Пусть $L = \{a_i\}$, $i \in I$, – максимальная линейно независимая система части без кручения $F(A)$ группы A . Рассмотрим подгруппу A^* группы A , сервантно порожденную элементом $a_i \in L$. Так как система L содержит более одного элемента, то $A^* \neq A$. Тогда $A = A^* \cup B$ и $A^* \cap B = \emptyset$ для некоторого множества B . Определим $\mathbb{Z}$ -биекцию $f: A \rightarrow A$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in A^*, \\ x, & x \in B. \end{cases}$$

Пусть $0 \neq x \in A^*$, $0 \neq y \in B$. Тогда

$$f(x+y) = x+y \neq -x+y = f(x)+f(y).$$

Противоречие. Следовательно, $r_0(A) = 1$.

Достаточность. Имеем $r_0(A) = 1$, $T(A) \cong Z(2)$. Тогда $A \cong F(A) \oplus Z(2)$, где $r(F(A)) = 1$ (см., например, [3; следствие 27.2]). Пусть $f: A \rightarrow B$ – $\mathbb{Z}$ -биекция, где B – абелева группа. Покажем, что f – изоморфизм групп A и B .

Пусть $x, y \in F(A)$. Тогда найдутся $r, s \in \mathbb{Z}$ такие, что $rx = sy$, где либо s , либо r – нечетное число. В дальнейшем нечетным считается число s , откуда

$$\begin{aligned} sf(x+y) &= f(sx+sy) = f(sx+rx) = f((s+r)x) \\ &= (s+r)f(x) = sf(x) + rf(x) = sf(x) + sf(y) = s(f(x) + f(y)). \end{aligned}$$

Поскольку f сохраняет порядки элементов группы A , то $T(B) \cong Z(2)$. Следовательно, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ясно также, что f сохраняет сложение на $T(A) \cong Z(2)$.

Пусть $x, y \notin F(A) \cup T(A)$, т.е.

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a'_1 + a'_2, \quad \text{где } a_1, a'_1 \in F(A), \quad a_2, a'_2 \in T(A).$$

Тогда

$$f(x+y) = f(a_1 + a_2 + a'_1 + a'_2) = f((a_1 + a'_1) + (a_2 + a'_2)) = f(a_1^* + a_2^*),$$

где $a_1^* = a_1 + a'_1$, $a_2^* = a_2 + a'_2$. Проверим, что $f(a_1^* + a_2^*) = f(a_1^*) + f(a_2^*)$. Случаи, когда $a_1^* = 0$ или $a_2^* = 0$, сводятся к рассмотренным ранее. Пусть $a_1^* \neq 0$ и $a_2^* \neq 0$. Тогда $2(f(a_1^* + a_2^*) - f(a_1^*) - f(a_2^*)) = 0$. Напомним, что $T(B) \cong Z(2)$. Поэтому

$$f(a_1^* + a_2^*) - f(a_1^*) - f(a_2^*) = 0 \quad \text{или} \quad f(a_1^* + a_2^*) - f(a_1^*) - f(a_2^*) = 1 \in Z(2).$$

Предположим, что имеет место последнее равенство. Тогда из того, что $f(a_2^*) = 1$, вытекает $f(a_1^* + a_2^*) - f(a_1^*) = f(a_2^*) + 1 = 0$. Следовательно, $f(a_1^* + a_2^*) = f(a_1^*)$, что противоречит инъективности f . Таким образом, $f(a_1^* + a_2^*) = f(a_1^*) + f(a_2^*)$. Так как отображение f сохраняет сложение на $F(A)$ и $T(A)$, то

$$f(a_1^*) = f(a_1 + a'_1) = f(a_1) + f(a'_1) \quad \text{и} \quad f(a_2^*) = f(a_2 + a'_2) = f(a_2) + f(a'_2).$$

Итак, f – изоморфизм и A – UA-модуль. Теорема доказана.

Из [1] вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – абелева группа без кручения. $\mathbb{Z}$ -Модуль A является UA -модулем тогда и только тогда, когда $r(A) = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A = \bigoplus_{p \in P} A_p$ – периодическая абелева группа. Тогда группа A как $\mathbb{Z}$ -модуль является UA -модулем в том и только том случае, если группы A_p неразложимы для всех $p \in P$ или $A_2 \cong Z(2) \oplus Z(2)$ и A_p неразложимы для всех $p \in P \setminus \{2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть группа A_p разложима для некоторого $p \in P$. Покажем, что существует разложение $A_p \cong C \oplus B$, где C – коциклическая группа, которая изоморфна некоторой подгруппе B_1 группы B . Действительно, если A_p – делимая группа, то $A_p \cong \bigoplus Z(p^\infty)$, и утверждение очевидно. Если $A_p = R_p \oplus D_p$, где R_p – редуцированная подгруппа в A_p , $0 \neq D_p$ – делимая подгруппа в A_p , то R_p содержит циклическое прямое слагаемое C (см., например, [3; следствие 27.3]): $R_p = C \oplus C^*$. Тогда в качестве B берем подгруппу $C^* \oplus D_p$, и подгруппа C изоморфна некоторой подгруппе группы D_p . Наконец, если группа A_p является редуцированной группой, то существуют разложения (конечные или бесконечные)

$$A_p = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

такие, что $A_k = \langle a_{k+1} \rangle \oplus A_{k+1}$ и $o(a_k) = p^{n_k}$, где $1 \leq n_1 < \dots < n_k < \dots$ (см., например, [3; д-во теоремы 108.1]). В этом случае в качестве C возьмем циклическое прямое слагаемое наименьшего порядка.

Пусть $C \not\cong Z(2)$. Рассмотрим множество $H = \{(a, b) \mid a \in C, b \in B, o(a) = o(b)\}$. Так как $C \cong B_1$, то a пробегает все элементы из группы C . Заметим далее, что множество H сильно сервантно в A_p . Действительно, пусть $n(a, b) \in H$ для некоторого элемента $(a, b) \in A_p$, $n = p^l n_1$, где $(n_1, p) = 1$. Если $o(a) = p^s$ и $o(b) = p^t$, то $o(na) = p^{s-l}$ и $o(nb) = p^{t-l}$, откуда $p^{s-l} = p^{t-l}$ и $s = t$. Следовательно, $(a, b) \in H$. Определим отображение $f: A_p \rightarrow A_p$ следующим образом:

$$f(a, b) = \begin{cases} \varphi^*(a, b), & (a, b) \in H, \\ (a, b), & (a, b) \notin H, \end{cases}$$

где $\varphi^*: H \rightarrow H$, $\varphi^*(a, b) = (\varphi(a), b)$, $\varphi \in \text{Aut } C \setminus \{\text{id}\}$. Ясно, что f – биекция. Далее, по построению множества H из $a, b \in H$ следует, что $n(a, b) \in H$. Тогда, учитывая сильную сервантность H в A_p , для $(a, b) \in H$ имеем

$$f(n(a, b)) = f(na, nb) = (\varphi(na), nb) = (n\varphi(a), nb) = n(\varphi(a), b) = nf(a, b).$$

Так как случай $(a, b) \notin H$ очевиден, получили, что f является $\mathbb{Z}$ -биекцией.

Пусть $\varphi(x) \neq x$ для некоторого $x \in C$, и пусть $y \in B$ такой, что $o(x) = o(y)$. Тогда

$$f((x, 0) + (0, y)) = f(x, y) = \varphi^*(x, y) = (\varphi(x), y).$$

С другой стороны, $f(x, 0) + f(0, y) = (x, y)$. Таким образом, A не является UA -модулем. Противоречие.

Пусть теперь $C \cong Z(2)$. Рассмотрим в $A_2 \cong Z(2) \oplus \bar{A}_2$ ($\bar{A}_2 \not\cong Z(2)$) подгруппу $H = \{(0, 0), (0, x), (1, x), (1, 0)\}$, где $x \in \bar{A}_2$ – некоторый фиксированный элемент порядка два. Отображение $\varphi: H \rightarrow H$ такое, что

$$\varphi(0, 0) = (0, 0), \quad \varphi(0, x) = (0, x), \quad \varphi(1, x) = (1, 0), \quad \varphi(1, 0) = (1, x),$$

является автоморфизмом. Тогда отображение $f: A_2 \rightarrow A_2$, определенное по правилу

$$f(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in H, \\ y, & y \notin H, \end{cases}$$

является $\mathbb{Z}$ -биекцией. Действительно, пусть $y = (a, b) \notin H$, но $ny \in H$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Если $o(b) = 2^s$, $s > 1$, то n делится на 2^{s-1} . Откуда получаем

$$f(n(a, b)) = f(0, nb) = \varphi(0, nb) = (0, nb) = nf(a, b).$$

Следовательно, $f(ny) = nf(y)$. Другие случаи проверяются непосредственно. Пусть, например, $(a, b) \in H$; n нечетное и $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда

$$f(n(a, b)) = f(na, nb) = \varphi(na, nb) = \varphi(1, nb) = (1, 0) = nf(a, b).$$

Итак, отображение f сохраняет умножение на целые числа.

Пусть $0 \neq b \in \bar{A}_2$ и $b \neq x$. Тогда

$$f((1, 0) + (0, b)) = (1, b) \neq (1, b + x) = f(1, 0) + f(0, b),$$

и мы снова приходим к противоречию с тем, что A – UA-модуль. Значит, $\bar{A}_2 = 0$ или $\bar{A}_2 \cong Z(2)$.

Достаточность. Если $A = \bigoplus_{p \in P} A_p$, где A_p неразложимы для всех $p \in P$, то A – локально циклическая группа и, следовательно, является UA-модулем (доказательство аналогично доказательству достаточности в теореме 1, см. также [2]).

Пусть теперь $A \cong Z(2) \oplus Z(2) \oplus A^*$, где $A^* = \bigoplus_{p \in P \setminus \{2\}} A_p$ и группы A_p неразложимы. Допустим, что $+$, $+$ ₁ – два сложения на группе A . Покажем, что $a +_1 b \in A_2$ для всех $a, b \in A_2$. Пусть $a +_1 b = c$, $o(c) = 2^{\gamma_0} p_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots p_{i_s}^{\gamma_{i_s}}$, где $\gamma_0 \in \{0, 1\}$. Если $x = 2$, $y = p_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots p_{i_s}^{\gamma_{i_s}}$, то найдутся такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что $mx + ny = 1$. Тогда

$$a +_1 b = (mx + ny)(a +_1 b) = ny(a +_1 b) = (ny)c.$$

Откуда заключаем, что элемент $a +_1 b$ либо равен нулю, либо имеет порядок 2. Следовательно, $a +_1 b \in A_2$. Аналогично проверяется, что $a +_1 b \in A^*$ для всех $a, b \in A^*$. Таким образом, сложение $+$ ₁ индуцирует сложение на A_2 и A^* . Учитывая [1; с. 4108] и [2], получаем, что $(A_2, +) = (A_2, +_1)$ и $(A^*, +) = (A^*, +_1)$. Пусть теперь $u \in A_2$, $w \in A^*$, $o(w) = p_{j_1}^{\ell_{j_1}} \cdots p_{j_t}^{\ell_{j_t}}$. Для $x = 2$ и $y = p_{j_1}^{\ell_{j_1}} \cdots p_{j_t}^{\ell_{j_t}}$ существуют $m, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $mx + ny = 1$. Тогда

$$mx((w + u) - (w +_1 u)) = mx(w + u) - mx(w +_1 u) = mxw - mxw = 0.$$

Аналогично получаем, что $ny((w + u) - (w +_1 u)) = 0$, откуда $w + u = w +_1 u$. Следовательно, $(A, +) = (A, +_1)$ и A – UA-модуль. Теорема доказана.

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Михалеву за постановку задачи описания абелевых групп как UA-модулей (над $\mathbb{Z}$, над своим кольцом эндоморфизмов), а также параллельной задачи нахождения абелевых групп, имеющих UA-кольца эндоморфизмов (см., например, [4], [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. van der Merwe, “Unique addition modules”, *Comm. Algebra*, **27**:9 (1999), 4103–4115.
- [2] J. Hausen, J. A. Johnson, “Centralizer near-rings that are rings”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **59**:2 (1995), 173–183.
- [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [4] О. В. Любимцев, “Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1419–1422.
- [5] О. В. Любимцев, “Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 736–741.

О. В. Любимцев

Нижегородский государственный архитектурно-строительный
университет

E-mail: cas@nnspu.ru

Поступило

15.11.2005

Исправленный вариант

25.09.2009

Д. С. Чистяков

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: chistyakovds@yandex.ru