Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Ишкин, О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 552–566

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:31:53

О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля

Х. К. Ишкин

Рассматривается уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + qy = \lambda^2 y$$

в некоторой кольцевой области K из $\mathbb{C}$. Получены необходимые и достаточные условия на потенциал q , при которых все решения уравнения $-y''(z) + q(z)y(z) = \lambda^2 y(z)$, $z \in \gamma$, где γ – некоторая кривая, при всех значениях параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, однозначны в области K .

Библиография: 12 названий.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть γ – некоторая гладкая кривая на комплексной плоскости, соединяющая точки 0 и 1, и пусть q – суммируемая на γ функция. Рассмотрим спектральную задачу¹

$$-y''(z) + q(z)y(z) = \lambda^2 y(z), \quad z \in \gamma, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2)$$

Если функция q голоморфна в области Ω , ограниченной кривой γ и отрезком $[0; 1]$, и непрерывна вплоть до границы Ω , то задача (1), (2) преобразуется (с сохранением спектра) в классическую задачу Штурма–Лиувилля на отрезке $[0; 1]$, спектр которой имеет асимптотику

$$\lambda_k \sim \pi k, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Ясно, что для выполнения (3) вовсе не обязательна голоморфность q . Например, при

$$q(z) = \frac{\nu(\nu - 1)}{(z - a)^2},$$

где $a \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{N}$, решения (1) выражаются через бесселевы функции полуцелого порядка [2], которые не имеют ветвления в точке a , поэтому при замене γ на отрезок $[0; 1]$ спектр задачи (1), (2) не меняется, так что и в этом случае справедливо соотношение (3).

Однако, при ν нецелых a является точкой ветвления для решений уравнения (1), поэтому при замене γ на негомотопную в области $\Omega \setminus \{a\}$ кривую спектр задачи

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-97914 и 05-01-00515а).

¹К такому виду приводится задача колебаний струны с комплексной “плотностью” [1].

не сохраняется. Действительно (см. п. 10), при нецелых ν собственные числа задачи (1), (2) распадаются на две серии, которые при больших номерах локализируются около двух лучей:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \frac{\pi k}{a}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim \frac{\pi k}{1-a}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, вопрос о локализации спектра задачи (1), (2) тесно связан с однозначностью всех решений уравнения (1) при всех значениях спектрального параметра λ , т.е. матрица монодромии уравнения (1) при всех λ является единичной. В дальнейшем для краткости указанное свойство решений будем называть однозначностью (в соответствующей области). В связи с этим возникает

ЗАДАЧА. Пусть Ω – некоторая ограниченная односвязная область, и пусть Γ – замкнутая кривая, охватывающая область Ω так, что у нее нет общих точек с границей γ области Ω . Далее, пусть дана некоторая функция q , голоморфная в кольцевой области K , ограниченной кривыми Γ и γ . Каким условиям должна удовлетворять q , чтобы все решения уравнения (1) при всех значениях параметра λ были однозначны в K ?

В предлагаемой работе дано решение этой задачи в случае, когда область Ω выпукла, а ее граница γ является кусочно гладкой кривой.

ТЕОРЕМА 1. При указанных выше условиях решения уравнения (1) однозначны в области K тогда и только тогда, когда

- 1) $q(z)$ аналитически продолжается в область Ω как мероморфная функция с конечным числом полюсов второго порядка $z_1, \dots, z_n$;
- 2) в проколотой окрестности $\dot{U}_k$ каждой точки $z_k, k = 1, \dots, n$, справедливо представление

$$q(z) = \frac{\nu_k(\nu_k - 1)}{(z - z_k)^2} + c_{k0} + \dots + c_{k, \nu_k - 1}(z - z_k)^{2(\nu_k - 1)} + (z - z_k)^{2\nu_k - 1} q_k(z), \quad (4)$$

где $\nu_k \in \mathbb{N}$, $c_{k0}, \dots, c_{k, \nu_k - 1}$ – произвольные числа, функция $q_k(z)$ голоморфна в U_k .

2. Предварительные замечания. Заменяя при необходимости γ на другую кривую, лежащую в K , можно считать, что γ – гладкая строго выпуклая кривая. Кроме того, можно считать, что Γ – также гладкая и строго выпуклая. Действительно, для этого достаточно в качестве Γ взять кривую в K , гомотетичную γ относительно некоторой точки, лежащей в Ω . Тогда функция q будет аналитична вплоть до границ области K .

Достаточность условий 1), 2) для однозначности решений (1) вполне естественна, и ее доказательство не вызывает особых трудностей (п. 3): коль скоро верно условие 1), мы имеем дело с уравнением класса Фукса [3]. Благодаря хорошо известным свойствам решений таких уравнений, проверка однозначности решений (1) сводится к решению некоторой линейной алгебраической системы уравнений.

Доказательство необходимости условий 1), 2) (пп. 4–9) существенно сложнее. Основную трудность здесь составляет доказательство аналитической продолжимости функции q в область Ω (утверждение 1) теоремы 1). Как только удастся это сделать, доказательство 2) в достаточной части сводится к исследованию некоторых систем линейных алгебраических уравнений.

При доказательстве необходимости условий 1), 2) для однозначности решений уравнения (1) мы решаем обратную задачу восстановления (в качественном смысле) функции q по матрице монодромии. В связи с этим отметим, что наша постановка задачи, которая возникает в связи с вопросом о локализации спектра задачи (1), (2), существенно отличается от классической [4]. Для фуксовых уравнений² она звучит так [6]: “Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии”. Таким образом, в классической постановке предполагается, что известны и особые точки, и группа монодромии. В нашей постановке мы считаем группу монодромии не только заданной при всех значениях параметра λ , но и тривиальной. Зато неизвестны не только особенности функции q , но и сама функция q не определена в области Ω .

Также отметим работу [7], в которой рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + P_2(z)y^{(n-2)} + \dots + P_n(z)y = 0.$$

Здесь каждый коэффициент $P_k(z)$ разлагается в сходящийся в кольце $K = \{z, r < |z| < R\}$ ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ki} z^i.$$

В терминах корней некоторой трансцендентной функции, выражающейся через регуляризованный определитель бесконечного порядка от коэффициентов a_{ki} получено необходимое и достаточное условие существования однозначных решений. К сожалению, из этого критерия нельзя вывести сколько-нибудь явные условия на коэффициенты $P_k(z)$, поэтому он не может быть применен для доказательства условий 1), 2).

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что при доказательстве утверждения 1) ключевым является следующий факт: если решения уравнения (1) однозначны, то для любой пары точек a, b из K и любой кривой $\gamma_{ab} \in K$, соединяющей эти точки, спектр любой краевой задачи (например, задач Дирихле или Неймана) для уравнения (1) на γ_{ab} устроен (асимптотически) так же, как и спектр соответствующей краевой задачи для уравнения $-y'' + \tilde{q}y = \lambda^2 y$ на отрезке $[a; b]$, “пронизывающем” область Ω . Отсюда возникает идея построить $\tilde{q}$ как решение обратной задачи по спектральным данным задачи на кривой γ_{ab} . Подробное исследование аналитических свойств ядра интегрального оператора основного уравнения позволяет реализовать эту идею. При этом естественным образом преодолеваются трудности, связанные с разрешимостью основного уравнения, независимостью функции $\tilde{q}$ от выбора точек a, b , а также выявляются множество и характер особенностей $\tilde{q}$.

3. Доказательство достаточности. Справедлива

ЛЕММА 1. Пусть функция $q(z)$ имеет вид

$$q(z) = \frac{\nu(\nu-1)}{(z-z_k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \quad (5)$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $q_1 = q_3 = \dots = q_{2\nu-3} = 0$, ряд в правой части (5) сходится в некотором круге $U_R = \{0 < |z| < R\}$. Тогда решения уравнения (1) однозначны в кольце $K_R = \{0 < |z| < R\}$.

²Эта задача допускает обобщения на системы с регулярными особыми точками [5; с. 135].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим два линейно независимых решения уравнения (1), однозначных в кольце $K_R = \{0 < |z| < R\}$.

Одно из таких решений можно взять в виде ряда:

$$\varphi(z, \lambda) = z^\nu \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\lambda) z^k \right), \quad (6)$$

где φ_k удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \\ 2(2\nu + 1)\varphi_2 - (q_0 - \lambda^2)\varphi_0 &= 0, \\ (k + 2)(2\nu + k + 1)\varphi_{k+2} - (q_0 - \lambda^2)\varphi_k - q_1\varphi_{k-1} - \dots - q_k\varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно [3; с. 100], что при каждом фиксированном λ ряд (6) сходится в круге U_R . Далее, поскольку

$$q_1 = q_3 = \dots = q_{2\nu-3} = 0,$$

то из соотношений (7) будем иметь

$$2(2k-1)(\nu+k-1)\varphi_{2k-1} - (q_0 - \lambda^2)\varphi_{2k-3} - q_2\varphi_{2k-5} - \dots - q_{2k-4}\varphi_1 = 0, \quad k = 2, \dots, \nu.$$

Отсюда по индукции заключаем, что

$$\varphi_3 = \dots = \varphi_{2\nu-1} = 0,$$

так что решение $\varphi(z, \lambda)$ имеет вид

$$\varphi(z, \lambda) = z^\nu f_\nu(z, \lambda) + z^{3\nu+1} g_\nu(z, \lambda), \quad (8)$$

где

$$f_\nu(z, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\nu} \varphi_{2k}(\lambda) z^{2k},$$

$g_\nu(z, \lambda)$ аналитична в круге U_R .

Из представления (8) следует, что $\varphi(z, \lambda) \neq 0$ в некотором кольце $K' = \{0 < |z| < R'(\lambda)\}$ и

$$\varphi^{-2}(z, \lambda) = z^{-2\nu} f_\nu^{-2}(z, \lambda) + h(z, \lambda),$$

где $h(z, \lambda)$ аналитична в круге K' . Следовательно,

$$\operatorname{Re} z_{z=0} \varphi^{-2}(z, \lambda) = 0. \quad (9)$$

Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in K'$ и рассмотрим функцию

$$\psi(z, \lambda) = \varphi(z, \lambda) \int_{z_0}^z \varphi^{-2}(t, \lambda) dt,$$

где интегрирование ведется по любому пути, лежащему в K' . В силу соотношения (9) функция $\psi(z, \lambda)$ аналитична и однозначна в K' . Тогда $\psi(z, \lambda)$ как решение (1) аналитически продолжается с K' на все кольцо K_R .

Далее, поскольку $W(\varphi, \psi) = 1$, то функции φ и ψ образуют ФСР уравнения (1), однозначную во всем кольце K_R . Лемма доказана.

Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда в силу доказанной леммы для каждого $k = 1, \dots, n$ решения уравнения (1) однозначны в $\bar{U}_k$. Отсюда следует однозначность решений (1) во всей области $\Omega \cup K$.

4. Специальное решение. В этом пункте, предваряющем доказательство необходимости условий 1), 2), мы построим одно решение (1), которое в дальнейшем будет играть важную роль.

Итак, всюду далее будем считать, что решения уравнения (1) однозначны в кольце K . Введем обозначения. Пусть $\beta \in (-\pi; \pi]$ – аргумент λ , B_β – точка кривой Γ , в которой достигает минимума функция $\text{Im}(ze^{i\beta})$, $z \in \Gamma$. Так как Γ выпукла (см. п. 2), то точка B_β определяется однозначно.

ЛЕММА 2. *Существует решение $\psi(z, \lambda)$ уравнения (1), для которого справедливо равномерное по $\beta \in (-\pi; \pi]$ и $z \in K$ асимптотическое разложение*

$$\psi^{(k)}(z, \lambda) = (-i\lambda)^k e^{-i\lambda z} \left(1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_{B_\beta}^z q(t) dt + O(\lambda^{-2}) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $k = 0, 1$ и символ $\int_a^b$ означает интеграл по некоторому пути $\gamma_{ab} \in K$, соединяющему точки a, b (см. замечание 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в качестве $\psi(z, \lambda)$ можно взять решение (1), удовлетворяющее условиям

$$\psi(B_\beta, \lambda) = e^{-i\lambda B_\beta}, \quad \frac{d}{dz} \psi(B_\beta, \lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda B_\beta}.$$

Имеем

$$\psi(z, \lambda) = e^{-i\lambda z} + \frac{1}{\lambda} \int_{B_\beta}^z \sin \lambda(z-t) q(t) \psi(t, \lambda) dt,$$

где в силу однозначности $\psi(z, \lambda)$ интеграл не зависит от выбора пути интегрирования.

Положим $\tilde{\psi}(z, \lambda) = e^{i\lambda z} \psi(z, \lambda)$. Тогда

$$\tilde{\psi}(z, \lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_{B_\beta}^z (1 - e^{2i\lambda(z-t)}) q(t) \tilde{\psi}(t, \lambda) dt. \quad (11)$$

Так как функция $\tilde{\psi}(z, \lambda)$ и ее производная (по z) однозначны в K , то для любой замкнутой кривой C в K

$$\oint_C q(t) \tilde{\psi}(t, \lambda) dt = 0, \quad \oint_C e^{-2i\lambda t} q(t) \tilde{\psi}(t, \lambda) dt = 0. \quad (12)$$

Отсюда и из определения точки B_β следует, что любую точку $z \in K$ можно соединить с точкой B_β некоторым путем $\gamma(B_\beta, z) \in K$, при движении вдоль которого от B_β до z функция $\text{Im}(te^{i\lambda\beta})$ не убывает. Тогда $|e^{2i\lambda(z-t)}| \leq 1$, так что норма интегрального оператора

$$A(\lambda)f = \frac{1}{2i\lambda} \int_{\gamma(B_\beta, z)} (1 - e^{2i\lambda(z-t)}) q(t) f(t) dt$$

в пространстве $C(K)$ непрерывных на K функций допускает оценку $O(\lambda^{-1})$ (равномерно по $\beta \in (-\pi; \pi]$). Выбирая в (11) в качестве пути интегрирования $\gamma(B_\beta, z)$, получим

$$\tilde{\psi}(z, \lambda) = 1 - A(\lambda)1 + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (13)$$

откуда легко следует (10).

СЛЕДСТВИЕ. Если решения (1) однозначны, то

$$\oint_{\gamma} q dt = 0. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (13) имеем $\tilde{\psi}(t, \lambda) = 1 + O(\lambda^{-1})$, $\lambda \rightarrow \infty$, равномерно по $t \in K$. Подставляя это соотношение в первое из равенств (12), получим (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (14) следует, что значение интеграла $\int_{\gamma_{ab}}$ одно и то же для всех кривых $\gamma_{ab} \in K$, соединяющих точки a и b . Поэтому такой интеграл в дальнейшем мы будем обозначать просто $\int_a^b q dt$.

5. Функция S_{ab} . Выберем в кольце K произвольные точки a и b и обозначим через $e_{ab}(z, \lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$e_{ab}(b, \lambda) = e^{i(b-a)\lambda}, \quad \frac{d}{dz} e_{ab}(b, \lambda) = i\lambda e^{i(b-a)\lambda}.$$

Далее, положим

$$S_{ab}(\lambda) = \frac{e_{ab}(a, -\lambda)}{e_{ab}(a, \lambda)}.$$

ЛЕММА 3. Существует не зависящая от a и b постоянная $R > 0$ такая, что в полуплоскости $\Pi_{ab} = \{\lambda : \operatorname{Im}(b-a)\lambda \geq R\}$ функция $S_{ab}(\lambda)$ не имеет полюсов и

$$\sup_{\lambda \in \Pi_{ab}, (a,b) \in K^2} \left| \left(S_{ab}(\lambda) - 1 - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b q dt \right) \lambda^2 e^{2i\lambda(b-a)} \right| < \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10) для вронскиана функций $\psi(z, \lambda)$ и $\psi_1(z, \lambda) \equiv \psi(z, -\lambda)$ имеем

$$W(\psi, \psi_1) = 2i\lambda \left(1 + \frac{1}{2i\lambda} \int_{B_{\pi+\beta}}^{B_{\beta}} q dt + O(\lambda^{-2}) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\beta \in (-\pi; \pi]$. Следовательно, при достаточно больших λ функции $e^{\pm} \equiv e_{ab}(z, \pm\lambda)$ можно выразить через ψ и ψ_1 :

$$e^{\pm} = k^{\pm} \psi + k_1^{\pm} \psi_1,$$

где

$$k^{\pm} = \frac{W(e^{\pm}, \psi_1)}{W(\psi, \psi_1)}, \quad k_1^{\pm} = \frac{W(e^{\pm}, \psi)}{W(\psi, \psi_1)}.$$

Отсюда, снова воспользовавшись (10), для больших λ из Π_{ab} будем иметь

$$\begin{aligned} e_{ab}(z, \lambda) &= e^{i(z-a)\lambda} \left(1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_z^b q dt + O(\lambda^{-2}) \right), \\ e_{ab}(z, -\lambda) &= e^{-i(z-a)\lambda} \left(1 + \frac{1}{2i\lambda} \int_z^b q dt + O(\lambda^{-2} e^{-2i\lambda(b-z)}) \right), \end{aligned}$$

причем оценки остаточных членов равномерны по z, a, b из K .

Из полученных соотношений легко следует утверждение леммы.

6. Функция f_{ab} и ее свойства. Зафиксируем $R > 0$, которое фигурирует в формулировке леммы 3, и обозначим через l_{ab} прямую $\{\operatorname{Im}(b-a)\lambda = R\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$f_{ab}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_{ab}} (S_{ab}(\lambda) - 1) e^{i(z-a)\lambda} d\lambda, \quad z \in m_{ab}, \quad (16)$$

где m_{ab} – полупрямая $\{z = a + (b-a)\zeta, \zeta > 0\}$.

ЛЕММА 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *функция $f_{ab}(z)$ при любых фиксированных $(a, b) \in K^2$ абсолютно непрерывна на m_{ab} , ее производная принадлежит $L^2(m_{ab})$ и*

$$\sup_{(a,b) \in K^2} \|f'_{ab}\|_{L^2(m_{ab})} < \infty;$$

- 2) *$f_{ab}(z) \equiv 0$ при $z = 2b - a + (b-a)\zeta, \zeta > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$r_{ab}(\lambda) = S_{ab}(\lambda) - 1 - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b q dt. \quad (17)$$

Тогда, поскольку для любого z из m_{ab}

$$\int_{l_{ab}} \frac{1}{\lambda} e^{i\lambda(z-a)} d\lambda = 0,$$

то

$$f_{ab}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_{ab}} r_{ab}(\lambda) e^{i\lambda(z-a)} d\lambda. \quad (18)$$

Из (15) и (17) имеем

$$\sup_{\lambda \in l_{ab}, (a,b) \in K^2} |\lambda^2 r_{ab}(\lambda)| < \infty. \quad (19)$$

Отсюда следует утверждение 1).

Пусть $z = 2b - a + (b-a)\zeta, \zeta > 0$. Тогда, переходя в (18) к новой переменной $\mu = (b-a)\lambda - iR$, будем иметь

$$f_{ab}(2b - a + (b-a)\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu) e^{i\mu\zeta} d\mu,$$

где функция $\Phi(\mu)$ в силу (15) удовлетворяет оценке

$$|\Phi(\mu)| \leq \frac{C}{|\mu|^2 + 1}, \quad \operatorname{Im} \mu \geq 0, \quad C = \operatorname{const} > 0.$$

Отсюда, применяя лемму Жордана, получим 2).

Для дальнейшего нам удобнее перейти от z к новой переменной, которая уже не будет зависеть от a и b . Итак, пусть

$$\tilde{f}(\xi, a, b) = f_{ab}(a + (b-a)\xi), \quad \xi > 0.$$

ЛЕММА 5. Функция $\tilde{f}(\xi, a, b)$ при любых фиксированных $\xi > 0$ голоморфна по (a, b) на K^2 и

$$|\tilde{f}(\xi, a, b)| \leq C|b - a|, \quad (20)$$

где $C > 0$ не зависит от ξ, a, b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (18) имеем

$$\tilde{f}(\xi, a, b) = \frac{1}{2\pi} e^{-\xi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\mu} \tilde{r}(\mu, a, b) d\mu, \quad (21)$$

где

$$\tilde{r}(\mu, a, b) = \frac{1}{b - a} r_{ab} \left(\frac{\mu + iR}{b - a} \right).$$

Согласно (19)

$$|\tilde{r}(\mu, a, b)| \leq \frac{C_1 |b - a|}{\mu^2 + R^2},$$

где $C_1 > 0$ не зависит от μ, a, b . Отсюда следует (20). Далее, поскольку при фиксированных $(\xi, a, b) \in \mathbb{R}_+ \times K^2$ подынтегральная функция в (21) непрерывна по μ , то в силу известных свойств интеграла, зависящего от параметра [8; с. 201], функция $\tilde{f}(\xi, a, b)$ голоморфна по $(a, b) \in K^2$ при $\xi > 0$.

7. Основное уравнение. Пусть точки a, b таковы, что $[a; b] \subset K$. Пусть M_{ab} – полупрямая, которая получается из m_{ab} присоединением точки a . Далее, пусть $q_{ab}(z)$ – функция на M_{ab} , которая на $[a; b]$ совпадает с $q(z)$, а вне $[a; b]$ равна 0. Обозначим через L_{ab} оператор, порожденный в $L^2(M_{ab})$ дифференциальным выражением $-y'' + q_{ab}y$ и краевым условием $y(0) = 0$. Тогда, как известно [9], функции $e_{ab}(z, \lambda)$ и $e^{i\lambda(z-a)}$ связаны соотношением

$$e_{ab}(z, \lambda) = e^{i\lambda(z-a)} + \int_{M_{zb}} k_{ab}(z, x) e^{i\lambda(x-a)} dx, \quad (22)$$

где $k_{ab}(z, x)$ – ядро оператора преобразования для L_{ab} .

В работе [10] доказано, что функция $k_{ab}(z, x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, которое в наших обозначениях имеет вид

$$k_{ab}(z, x) - \int_{M_{zb}} f_{ab}(x + s - a) k_{ab}(z, s) ds = f_{ab}(z + x - a), \quad z \in M_{ab}, \quad x \in M_{zb}, \quad (23)$$

где $f_{ab}(z)$ – функция, введенная в п. 6. Соотношение (23), следуя [5], [6] и др., будем называть *основным уравнением*.

Из утверждения 2) леммы 4 следует, что интеграл в (23) фактически берется по отрезку $[z; 2b - x]$, так что $k_{ab}(z, x) \equiv 0$ при $x \in M_{2b-z, b}$.

Далее, заметим следующее: уравнение (23) получено в предположении, что $[a; b] \in K$, но функция $f_{ab}(z)$ имеет смысл при всех $(a, b) \in K^2$. Отсюда возникает вопрос: если $[a; b] \cap \Omega \neq \emptyset$ и уравнение (23) разрешимо при некотором $z \in \Omega$, то какое отношение имеет $k_{ab}(z, x)$ к функции q ?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы преобразуем (23) в более удобное для дальнейшего уравнение, которому удовлетворяет функция $\tilde{k}_{ab}(\zeta, \xi) = k_{ab}(a + (b - a)\zeta, a + (b - a)\xi)$:

$$\tilde{k}_{ab}(\zeta, \xi) - (b - a) \int_{\zeta}^{2-\xi} \tilde{f}(\xi + \eta, a, b) \tilde{k}_{ab}(\zeta, \eta) d\eta = \tilde{f}(\zeta + \xi, a, b), \quad (24)$$

где $0 \leq \zeta \leq 1, \zeta \leq \xi \leq 2 - \zeta$.

Рассмотрим действующий в $L^2(\zeta; 2)$ оператор

$$[F_\zeta(a, b)u](\xi) = (b - a) \int_\zeta^{2-\xi} \tilde{f}(\xi + \eta, a, b)u(\eta) d\eta. \quad (25)$$

ЛЕММА 6. При каждом фиксированном $\zeta \in [0; 2]$ $F_\zeta(a, b)$ – голоморфная в K^2 оператор-функция такая, что для каждой точки $(a, b) \in K^2$ $F_\zeta(a, b)$ – компактный в $L^2(\zeta, 2)$ оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $F_\zeta(a, b)$ компактен при каждом $(a, b) \in K^2$, следует из того, что в силу оценки (20) $F_\zeta(a, b)$ – оператор Гильберта–Шмидта. Далее, из той же оценки при каждом $\zeta \in [0; 2]$ имеем

$$\sup_{(a, b) \in K^2} \|F_\zeta(a, b)\| < \infty,$$

поэтому согласно известному критерию [11; с. 459] достаточно показать, что для любых u, v , непрерывных на $[\zeta; 2]$, функция $\Phi(a, b) = (F_\zeta(a, b)u, v)$ аналитична в K^2 . А это утверждение непосредственно следует из известных свойств интеграла, зависящего от параметра [8; с. 201].

8. Аналитическое продолжение функции q в область Ω .

ЛЕММА 7. Функция q аналитически продолжается с кольца K в область Ω как мероморфная функция с конечным числом полюсов, каждый из которых имеет второй порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\zeta_0 \in (0; 1)$ и $b_0 \in \Gamma$ и для краткости обозначим $u_a(\xi) = \tilde{k}_{a, b_0}(\zeta_0, \xi)$, $u_a^0(\xi) = \tilde{f}(\zeta_0 + \xi, a, b_0)$, $\mathcal{F}_a = F_{\zeta_0}(a, b_0)$, где $a \in K$, $\xi \in [\zeta_0; 2 - \zeta_0]$. Тогда уравнение (24) примет вид

$$u_a - \mathcal{F}_a u_a = u_a^0, \quad u_a \in L^2(\zeta_0; 2 - \zeta_0). \quad (26)$$

Согласно лемме 6 $\mathcal{F}_a$ – голоморфная в K компактнозначная оператор-функция. Из (25) и (20) следует, что при всех $a \in K$, достаточно близких к b_0 , уравнение (26) однозначно разрешимо в $L^2(\zeta_0; 2 - \zeta_0)$. Отсюда, используя аналитическую теорему Фредгольма [12; с. 224], заключаем, что существует дискретное множество $D_0 \subset K$, которое может сгущаться только к границе K , такое, что резольвента $(I - \mathcal{F}_a)^{-1}$ является мероморфной функцией в K с полюсами в точках D_0 . Согласно замечаниям п. 2 $\mathcal{F}_a$ голоморфна вплоть до границы K , поэтому D_0 не может иметь предельных точек в $\bar{K}$. Следовательно, множество D_0 конечно. Пусть $D_0 = \{a_k, k = 1, \dots, m_0\}$. Тогда при всех a из K и отличных от $a_k, k = 1, \dots, m_0$, уравнение (26) имеет единственное решение $u_a = (I - \mathcal{F}_a)^{-1}u_a^0$, которое в силу леммы 5 представляет собой мероморфную в K векторнозначную (как элемент $L^2(\zeta_0; 2 - \zeta_0)$) функцию с полюсами в точках D_0 . Далее, из (22) для функции $v(a, \lambda) = e_{a, b_0}(a + (b_0 - a)\zeta_0, \lambda)$ имеем

$$v(a, \lambda) = e^{i\lambda(b_0 - a)\zeta_0} + (b_0 - a) \int_{\zeta_0}^{2 - \zeta_0} u_a(\tau) e^{i\lambda(b_0 - a)\tau} d\tau,$$

поэтому $v(a, \lambda)$ при любом фиксированном λ голоморфна в $K \setminus D_0$ с полюсами в D_0 . Но

$$v(a, \lambda) = e^{i\lambda a} e_{b_0}(a + (b_0 - a)\zeta_0, \lambda),$$

где $e_b(z, \lambda)$ (см. п. 5) – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$e_b(b, \lambda) = e^{i\lambda b}, \quad \frac{d}{dz} e_b(b, \lambda) = i\lambda e^{i\lambda b}.$$

Значит,

$$e_{b_0}(z, \lambda) = e^{-i\lambda a} v_a\left(\frac{z - b_0\zeta_0}{1 - \zeta_0}, \lambda\right)$$

аналитически продолжается с кольца K в область³

$$\Omega_{\zeta_0} = \{z = (1 - \zeta_0)a + b_0\zeta_0, a \in K\},$$

как мероморфная функция с полюсами в точках множества

$$\Delta_0 = \{z_k = (1 - \zeta_0)a_k + b_0\zeta_0, k = 1, \dots, m_0\}.$$

Выбирая теперь в качестве ζ_0 любое $\zeta \in (0; 1)$, мы построим семейство областей Ω_ζ , обладающих такими же свойствами, что и Ω_{ζ_0} . При этом семейство Ω_ζ , $\zeta \in (0; 1)$, представляет собой открытое покрытие компакта $\overline{\Omega}$. Действительно, для любой точки z из $\overline{\Omega}$ найдется точка a из K такая, что z лежит в интервале (a, b_0) . Тогда $z = a + (b_0 - a)\zeta$, где $\zeta \in (0, 1)$. Следовательно, $z \in \Omega_\zeta$. Поэтому существует конечный набор областей Ω_i , $i = 1, \dots, l$, в совокупности покрывающих $\overline{\Omega}$, каждая из которых может содержать лишь конечное число полюсов функции $e_{b_0}(z, \lambda)$. Обозначим через $\Delta = \{z_k, k = 1, \dots, n\} \subset \Omega$ объединение этих полюсов. Тогда функция $e_{b_0}(z, \lambda)$ при каждом фиксированном λ мероморфна в области $\overline{\Omega} \cup K$ с полюсами в точках из Δ .

Зафиксируем теперь любое $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Тогда, поскольку $e_{b_0}(z, \lambda_0)$ удовлетворяет уравнению (1) в K , то

$$q(z) = \frac{e_{b_0}''(z, \lambda_0) + \lambda_0^2}{e_{b_0}(z, \lambda_0)}, \quad z \in \overline{K} \setminus N_0, \quad (27)$$

где N_0 – множество нулей $e_{b_0}(z, \lambda_0)$ в K . Ясно, что N_0 – конечное множество. Далее, по доказанному функция $e_{b_0}(z, \lambda_0)$ мероморфна в Ω , следовательно, имеет там конечное число нулей $z^1, z^2, \dots, z^l$, каждый из которых является простым. Обозначим это множество N_1 . Тогда функция $q(z)$ по формуле (27) мероморфно продолжается с K в область Ω с особенностями в точках из Δ и N_1 . Ясно, что в точках z_k из Δ функция q имеет полюс второго порядка. Что касается особенностей в точках z^k из N_1 , то они на самом деле являются устранимыми. Действительно, так как функция $f(\lambda) = e_{b_0}(z^k, \lambda)$ – целая, то она отлична от 0 при всех λ из достаточно малой проколотой окрестности λ_0 . Выбирая такое λ в (27), мы получим аналитическое продолжение функции q в точке z^k . Лемма доказана.

9. Доказательство представления (4). Снова, как в п. 3, точку z_k будем считать нулем. Тогда согласно предыдущему пункту и (14) функция q в некотором кольце $K_R = \{0 < |z| < R\}$ представляется в виде (5), где $\operatorname{Re} \nu \geq 1/2$. Из условия однозначности решения (6) и неравенства для ν следует, что $\nu \in \mathbb{N}$.

³Область Ω_{ζ_0} представляет собой кольцевую область, которая получается из K гомотетией с центром в точке b_0 и коэффициентом ζ_0 и “вырезает” из Ω некоторую полосу.

Докажем, что

$$q_1 = q_3 = \dots = q_{2\nu-3} = 0. \quad (28)$$

Поскольку решение (6) является однозначным уже при таких условиях, необходимость соотношений (28) обусловлена однозначностью другого решения $\theta(z, \lambda)$, для которого справедливо аналогичное (6) разложение

$$\theta(z, \lambda) = z^{-\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k z^k, \quad 0 < |z| < R, \quad (29)$$

причем $\theta_0 \neq 0$.

Введем следующие обозначения:

$$A_1(\mu) = (q_1), \quad A_2(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & \mu \\ \mu & q_2 \end{pmatrix}, \quad A_3(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & q_1 \\ 0 & \gamma_2 & \mu \\ \mu & q_1 & q_3 \end{pmatrix},$$

$$A_m(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 & \mu & q_1 & \dots & q_{m-4} & q_{m-2} \\ 0 & \gamma_{m-1} & 0 & \mu & \dots & q_{m-5} & q_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_4 & 0 & \mu & q_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma_3 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \gamma_2 & \mu \\ \mu & q_1 & q_2 & \dots & \dots & q_{m-2} & q_m \end{pmatrix}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

где $\gamma_k = k(2\nu - k - 1)$ и

$$\Delta_m(\mu) = \det A_m(\mu).$$

ЛЕММА 8. Для однозначности решения $\theta(z, \lambda)$ при всех λ необходимо, чтобы

$$\Delta_{2\nu-1}(-\lambda^2) \equiv 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (29) в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \\ \gamma_2 \theta_2 - \lambda^2 \theta_0 &= 0, \\ \gamma_{k+2} \theta_{k+2} - \lambda^2 \theta_k + q_1 \theta_{k-1} + \dots + q_k \theta_0 &= 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Положим

$$\Theta = \Theta(\mu) = (\theta_{2\nu-1}(\mu), \theta_{2\nu-2}(\mu), \dots, \theta_2(\mu), \theta_0(\mu))^T,$$

где $\mu = -\lambda^2$.

Тогда вектор-функция $\Theta(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$A_{2\nu-1}(\mu) \Theta(\mu) = 0.$$

Так как $\Theta(\mu) \neq 0$, то $\det A_{2\nu-1}(\mu) = 0$.

ЛЕММА 9. Справедлива формула

$$\Delta_{2k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} d_{ki} q_{2i-1} \mu^{k-i} + \sum_{i=3}^k B_{ki} \mu^{k-i}, \quad k = 3, \dots, n, \quad (30)$$

где d_{ki} – положительные числа, не зависящие от q ,

$$B_{ki} = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{kij} q_{2j-1}, \quad \beta_{kij} \text{ не зависят от } \mu.$$

Доказательство. Разлагая определитель Δ_m по последней строке, получаем

$$\Delta_m = -\mu \gamma_{m-1} \Delta_{m-2} - \sum_{i=1}^{m-2} a_{mi} q_i \Delta_{m-i-2} + q_m \prod_{j=2}^m \gamma_j, \quad (31)$$

где

$$a_{mi} = \frac{1}{\gamma_{m-i}} \prod_{j=m-i-1}^m \gamma_j, \quad \Delta_0 = \frac{\mu}{\gamma_1}.$$

Отсюда индукцией по m убеждаемся, что степень многочлена $\Delta_m(\mu)$ не выше l_m , где

$$l_m = \begin{cases} \frac{m}{2} + 1, & m \text{ четно,} \\ \frac{m-1}{2}, & m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теперь, учитывая эту оценку и снова применяя индукцию к соотношению (31), при четных m находим

$$\Delta_{2k} = (-1)^k \prod_{j=2}^k \gamma_j \mu^{k+1} + P_{k-1}(\mu), \quad (32)$$

где $P_{k-1}(\mu)$ есть многочлен степени $k-1$.

Докажем теперь формулу (30) по индукции. Непосредственные вычисления дают

$$\Delta_5 = \mu^2 q_1 (\gamma_3 \gamma_5 + \gamma_3 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_4) - \mu q_3 (\gamma_2 + \gamma_5) \gamma_3 \gamma_4 + q_5 \prod_{j=2}^5 \gamma_j - q_1 q_2 (\gamma_4 + \gamma_3) \gamma_2 \gamma_5.$$

Пусть формула (30) верна при всех $j \leq k$. Докажем (30) при $k+1$. Согласно (31) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{2k+1} &= -\mu \gamma_{2k} \Delta_{2k-1} - \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} q_{2j-1} \Delta_{2(k-j)} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj} q_{2j} \Delta_{2(k-j)-1} + q_{2k+1} c_k \\ &= I_1(\mu) + I_2(\mu) + I_3(\mu) + I_4(\mu), \end{aligned} \quad (33)$$

где α_{kj} , β_{kj} , c_k – положительные постоянные.

Так как $\gamma_{2k} > 0$, то из (30) следует, что $I_1(\mu)$ имеет вид (33). Далее, для I_2 согласно (32) будем иметь

$$I_2(\mu) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+1-j} c_{kj} q_{2j-1} \mu^{k+1-j} + \Phi(\mu),$$

где $c_{kj} > 0$, $\Phi(\mu)$ есть сумма членов вида

$$q_{2j-1} \mu^{k+1-s}, \quad 1 \leq j \leq s-1 \leq k.$$

Аналогично проверяется, что $I_3(\mu)$ имеет вид $\Phi(\mu)$. Лемма доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Так как старший коэффициент $\Delta_{2\nu-1}(\mu)$ в силу (30) при $k = \nu$ равен $(-1)^{\nu-1}d_{\nu 1}q_1$, то согласно лемме 8 для однозначности решения $\theta(z, l)$ необходимо, чтобы $q_1 = 0$. Но тогда старший коэффициент $\Delta_{2\nu-1}(\mu)$ есть $(-1)^{\nu-2}d_{\nu 2}q_3$. Следовательно, $q_3 = 0$. Продолжая этот процесс, получим (28). Теорема доказана.

10. Пример. В этом пункте на одном простом примере изучим связь между однозначностью решений уравнения (1) и асимптотикой спектра задачи (1), (2). Итак, пусть

$$q(z) = \frac{\nu(\nu-1)}{(z-a)^2},$$

где $a \in \Omega$. Обозначим через λ_k , $\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$, собственные числа задачи (1), (2), пронумерованные в порядке возрастания модулей и с учетом их алгебраических кратностей. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. 1) Если ν не целое, то спектр задачи (1), (2) состоит из двух серий $\lambda_k^{(1,2)}$, которые имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \frac{\pi k}{a} + \frac{i \ln(2i \sin \pi \nu)}{2a} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (34)$$

$$\lambda_k^{(2)} \sim \frac{\pi k}{1-a} - \frac{i \ln(-2i \sin \pi \nu)}{2(1-a)} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (35)$$

2) Если ν целое, то спектр задачи (1), (2) локализуется около луча $\arg \lambda = 0$ и имеет следующую асимптотику:

$$\lambda_k \sim \pi k + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $\nu \in \mathbb{N}$ согласно теореме 1 решения уравнения (1) однозначны, кривую γ мы можем, не меняя спектр, заменить на отрезок $[0; 1]$. Отсюда сразу следует утверждение 2).

Пусть теперь число ν не целое. Обозначим $\arg \lambda = \beta$, $\arg a = \alpha_1$, $\arg(1-a) = \alpha_2$ так, что $-\pi/2 < \alpha_1 < 0$, $0 < \alpha_2 < \pi/2$, $|\beta| \leq \pi/2$. Из леммы 2 работы [1] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ в углах $-\alpha_1 \leq \beta \leq \pi/2$ и $-\pi/2 \leq \beta \leq -\alpha_2$ спектр задачи (1), (2) конечен.

Собственные числа задачи (1), (2) совпадают с нулями функции

$$\Phi(\lambda) = H_{\nu-1/2}^{(1)}(-\lambda a) H_{\nu-1/2}^{(2)}(\lambda(1-a)) - H_{\nu-1/2}^{(1)}(\lambda(1-a)) H_{\nu-1/2}^{(2)}(-\lambda a), \quad (37)$$

где $H_\mu^{(1)}$ и $H_\mu^{(2)}$ – функции Ханкеля, $\arg(-a) = -\pi - \alpha_1$, $\arg(1-a) = \alpha_2$. Чтобы получить асимптотику собственных чисел задачи (1), (2) нам нужно изучить поведение функции $\Phi(\nu, \lambda)$ при больших значениях λ в угле

$$-\alpha_2 \leq \beta \leq -\alpha_1.$$

При таких α имеем

$$-\pi - \alpha_1 - \alpha_2 \leq \arg(-\lambda a) \leq -\pi, \quad 0 \leq \arg(\lambda(1-a)) \leq \alpha_1 + \alpha_2. \quad (38)$$

Известны [2; с. 98] следующие асимптотические разложения функций Ханкеля:

$$H_\mu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(4z - 2\mu\pi - \pi)/4} \left[1 - \frac{\mu^2 - 1/4}{2i} z^{-1} + O(z^{-2}) \right], \quad -\pi < \arg z < \pi, \quad (39)$$

$$H_{\mu}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(4z-2\mu\pi-\pi)/4} \left[1 + \frac{\mu^2 - 1/4}{2i} z^{-1} + O(z^{-2}) \right], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \quad (40)$$

Угол (40) содержит оба угла (38), в то время как в угле (39) содержится только второй из углов (38). Так что для наших целей необходимо формулу (39) распространить на угол

$$-\pi - \alpha_1 - \alpha_2 < \arg z \leq -\pi.$$

Воспользовавшись известными [2] соотношениями между функциями Ханкеля и функциями Бесселя первого рода $J_{\pm\mu}$, а также формулами монодромии $J_{\pm\mu}(e^{i\alpha}z) = e^{\pm i\mu\alpha} J_{\pm\mu}(z)$ для последних, будем иметь

$$H_{\mu}^{(1)}(e^{-i\pi}z) = 2 \cos \pi\mu H_{\mu}^{(1)}(z) + e^{-i\pi\mu} H_{\mu}^{(2)}(z).$$

Отсюда и из соотношений (39) и (40) при $-\pi \leq \arg z \leq \varepsilon$ следует

ЛЕММА 10. При $z \rightarrow \infty$ в угле $-2\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq -\pi + \varepsilon$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$H_{\mu}^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{(4z-2\mu\pi-\pi)i/4} \times \left\{ 1 - 2i \cos \mu\pi e^{-2iz} - \frac{\mu^2 - 1/4}{2iz} (1 + 2i \cos \mu\pi e^{-2iz}) + O(z^{-2} e^{-2iz}) \right\}. \quad (41)$$

Оценка остаточного члена равномерна по $\arg z$ из указанного сектора и μ из любого компакта.

ЛЕММА 11. Если ν не целое, то при любом положительном $\varepsilon > 0$ спектр задачи (1), (2) в угле $-\alpha_2 + \varepsilon \leq \beta \leq \alpha_1 - \varepsilon$ конечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $-\alpha_2 + \varepsilon \leq \beta \leq \alpha_1 - \varepsilon$. Тогда

$$-\pi - \alpha_1 - \alpha_2 + \varepsilon \leq \arg(-\lambda a) \leq -\pi - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \arg(\lambda(1-a)) \leq \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon.$$

Тогда, подставляя в (37) асимптотические формулы (39), (40) и (41), будем иметь

$$\Phi(\lambda) = -\frac{2i}{\pi\lambda\sqrt{a(1-a)}} e^{(2a-1)\lambda i} \times [2i \sin \pi\nu(1 + O(\lambda^{-1})) - e^{-2i\lambda a}(1 + O(\lambda^{-1})) + e^{2(1-a)\lambda i}(1 + O(\lambda^{-1}))]. \quad (42)$$

При указанных β в (42) экспоненциальный член в скобках допускает оценку $O(e^{-|\lambda|^\delta})$, где $\delta = \min\{\sin \varepsilon, \sin(\alpha_0 + \alpha_1 - \varepsilon)\}$. Следовательно,

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{4 \sin \pi\nu}{\pi\lambda\sqrt{a(1-a)}} e^{(2a-1)\lambda i} (1 + O(\lambda^{-2})),$$

где оценка остаточного члена равномерна по β из рассматриваемого угла и по ν из любого компакта, не содержащего целочисленные точки. Отсюда следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из утверждения леммы 10 следует, что асимптотическая формула (42) справедлива при всех значениях β из промежутка $(-\pi + \alpha_1, \pi - \alpha_2)$.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Докажем, что около луча $\arg \lambda = \alpha_1$ имеется бесконечное число собственных значений задачи (1), (2). В силу замечания 2 формула (42) справедлива около луча $\arg \lambda = \alpha_1$. Тогда

$$\Phi(\lambda) \sim -\frac{2i}{\pi\lambda\sqrt{a(1-a)}}e^{(2a-1)\lambda i}f(\lambda),$$

где

$$f(\lambda) = 2i \sin \pi\nu \left(1 + \frac{\nu(\nu-1)(2a-1)}{2i\lambda a} + O(\lambda^{-2}) \right) - e^{-2i\lambda a} \left(1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2i\lambda a} + O(\lambda^{-2}) \right) + O(e^{-|\lambda|\delta}), \quad \text{где } \delta > 0.$$

Следовательно, нули функции $\Phi(\lambda)$ совпадают с нулями функции $f(\lambda)$. Отсюда, применяя теорему Руше к функции

$$f_0(\lambda) = -e^{-2i\lambda a} + 2i \sin \pi\nu$$

в окрестности $\{|\lambda - \lambda_k^0| = r/k\}$, где r – некоторая положительная постоянная, после несложных вычислений получим (34). Соотношение (35) доказывается аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. К. Ишкин, “О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 72–84.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, Наука, М., 1974.
- [3] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [4] Б. Риман, *Сочинения*, ГИТТЛ, М., 1948.
- [5] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр., **1**, ВИНТИ, М., 1985.
- [6] *Проблемы Гильберта*, ред. П. С. Александров, Наука, М., 1969.
- [7] Н. von Koch, “Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires”, *Acta Math.*, **16**:1 (1892), 217–295.
- [8] А. И. Маркушевич, *Краткий курс теории аналитических функций*, Наука, М., 1978.
- [9] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [10] В. Э. Лянце, “Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора”, *Матем. сб.*, **72**:4 (1967), 537–557.
- [11] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [12] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: Функциональный анализ, Мир, М., 1977.

Х. К. Ишкин

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Поступило
14.03.2007