Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Рамазанов, Об оценке кривизны порядково-выпуклого множества на целочисленной решетке и некоторые смежные вопросы, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:27:47

Об оценке кривизны порядково-выпуклого множества на целочисленной решетке и некоторые смежные вопросы

А. Б. Рамазанов

1. Введение. Известно (см., например, [1]–[3], др. ссылки см., [4]), что гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма решения некоторых задач дискретной оптимизации (ДО) может быть выражена через такую характеристику допустимой области, как кривизна. Кроме того, в некоторых случаях кривизна допустимой области позволяет эффективно охарактеризовать строение допустимого множества, а также сформулировать условие совпадения глобального и локального (градиентного) экстремумов в соответствующей задаче ДО [1]–[3]. Поэтому знание кривизны допустимого множества в некоторых случаях служит основой для оценки точности градиентного алгоритма, а также проверки оптимальности найденного градиентного решения в соответствующей задаче ДО. Не для всех допустимых множеств в задачах ДО можно найти точное значение кривизны, т.е. возникает необходимость оценки кривизны [1].

В работе получена оценка кривизны множества $P_f^- = \{x : f(x) \leq 0, f(0) \leq 0, x \in P\}$, где $-f(x)$ – ρ -координатно-выпуклая функция, понятие которой введено в [5], P – порядково-выпуклое множество в целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^n = (\mathbb{Z}_+^n, \leq)$, $f(x)$ принимает целочисленные значения при любом $x \in P$. Эта оценка позволила определить близость глобального и градиентного решений в задачах ДО. Кроме того, предложено видоизмененное определение суперматроида и найдены условия совпадения глобального и градиентного экстремумов координатно-выпуклой функции в терминах кривизны указанного множества P_f^- . С помощью полученных результатов исследована устойчивость градиентного алгоритма относительно возмущения параметров допустимой области для одной задачи ДО.

2. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ – множество всех n -мерных неотрицательных целочисленных векторов. Если $0 = (0, \dots, 0) \in P \subseteq \mathbb{Z}_+^n$, P конечное и из условия $x \leq y$, $x, y \in P$, следует включение $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y, z \in \mathbb{Z}_+^n\} \subseteq P$, то множество P называется *конечным порядково-выпуклым с нулем* [1]. Далее будем считать, что $P \subseteq \mathbb{Z}_+^n$ конечное порядково-выпуклое множество с нулем. *Кривизной* множества P называется число $\theta(P) = \min\{l(P \cap [0, x])/h(P \cap [0, x]) : x \in \mathbb{Z}_+^n, x \neq 0\}$, где $l(Q) = \min\{h(x) : x \in Q^{\max}\}$, $Q^{\max}$ – множество всех максимальных элементов частично упорядоченного множества $(Q, \leq)$, $Q \subseteq P$, $h(Q) = \max\{h(x) : x \in Q\}$ – высота множества Q , $h(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, что $0 < \theta(P) \leq 1$. Если $\theta(P) = 1$, то множество P называется *суперматроидом* [1].

Функция $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ (где $\mathbb{R}$ множество действительных чисел) называется *координатно-вогнутой* (координатно-выпуклой) [1], [5], если

$$\Delta_{ij}f(x) = \Delta_j f(x + e^i) - \Delta_j f(x) \geq (\leq) 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}_+^n, \quad i, j \in I_n = \{1, 2, \dots, n\},$$

где

$$\Delta_j f(x) = f(x + e^j) - f(x), \quad e^j = (e_1^j, \dots, e_n^j), \quad e_j^j = 1, \quad e_k^j = 0, \quad j \neq k, \quad j, k \in I_n.$$

Как обычно, функцию $f : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *неубывающей* (не возрастающей), если $\Delta_i f(x) \geq 0$ ($\Delta_i f(x) \leq 0$) $\forall x \in \mathbb{Z}_+^n, i \in I_n$.

Рассмотрим задачу А дискретной оптимизации

$$\max\{F(x) : x \in P\},$$

где $F(x)$ – неубывающая координатно-выпуклая функция.

Пусть x^* – оптимальное решение задачи A , а x^g – градиентное решение задачи A , т.е. точка, полученная с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема (см., например, [1], [5]–[7]). Под *гарантированной оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи A* понимают такое число $\varepsilon \geq 0$, что

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leq \varepsilon.$$

Известно (см., теорему 11.3 [1]), что гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма решения задачи A равна $1/(\theta(P) + 1)$. Если в задаче A $F(x)$ – сепарабельная неубывающая функция, то верно неравенство (см., теорему 11.4 [1]) $F(x^g) \geq \theta(P)F(x^*) + (1 - \theta(P))F(0)$.

Аналогичные результаты для случая ρ -координатно-выпуклой целевой функции содержатся в [7]. Отметим, что первоначально результат подобного рода был получен в [2] для случая линейной целевой функции.

3. Оценка кривизны. Пусть $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n$, где $\mathbb{R}_+^n$ – множество n -мерных неотрицательных действительных векторов. Координатно-вогнутую (координатно-выпуклую) функцию $f(x)$ будем называть ρ -координатно-вогнутой (ρ -координатно-выпуклой) [5], [7], если

$$\Delta_{ii}f(x) - \rho_i \geq 0 \quad (\Delta_{ii}f(x) + \rho_i \leq 0) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_+^n, \quad i \in I_n.$$

Множество всех ρ -координатно-вогнутых (ρ -координатно-выпуклых) функций будем обозначать через $\text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n) = \text{Re}_\rho^0(\text{Re}_\rho = \text{Re}_\rho(\mathbb{Z}_+^n))$.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f(x)$ принадлежит классу $\text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$f(x) = g(x) + \varphi(x), \quad (1)$$

где $g(x) \in \text{Re}_0^0(\mathbb{Z}_+^n)$, $\varphi(x) = (\rho_1 x_1^2 + \dots + \rho_n x_n^2)/2$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 [5].

ТЕОРЕМА 2. *Если неубывающая функция $f(x) \in \text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n)$, то множество P_f^- является порядково-выпуклым.*

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 6 [5] с учетом $-f(x) \in \text{Re}_\rho(\mathbb{Z}_+^n)$ и $\Delta_i f(z) \geq 0 \quad \forall i \in I_n \quad \forall z \in P$ (так как функция $f(x)$ неубывающая).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f_k(x) \in \text{Re}_{\rho^k}^0(\mathbb{Z}_+^n)$ – неубывающие функции для $\forall k \in I_m$, $\rho^k = (\rho_1^k, \rho_2^k, \dots, \rho_n^k) \in \mathbb{R}_+^n$, $k \in I_m$. Если $f(x) = \max_k \{f_k(x) : k \in I_m\}$, то $\theta(\bigcap_{k=1}^m P_{f_k}^-) = \theta(P_f^-)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in P_{f_1}^- \cap \dots \cap P_{f_m}^-$. Тогда $x \in P_{f_k}^- \quad \forall k \in I_m$, т.е. $x \in P_f^-$. Аналогично, пусть $x \in P_f^-$. Тогда $0 \geq f(x) \geq f_k(x) \quad \forall k \in I_m$. Поэтому $x \in \bigcap_{k=1}^m P_{f_k}^-$, т.е. справедливо утверждение теоремы 3.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $\Omega^*(\rho, h) = \Omega^0(\rho, h)$, если $\Omega^0(\rho, h) > 1$, и $\Omega^*(\rho, h) = 1/\Omega^0(\rho, h)$, если $0 < \Omega^0(\rho, h) \leq 1$, где $\Omega^0 = \Omega^0(\rho, h) = (h + 1/2)\Omega(\rho)$, $h = h(P)$, $\Omega(\rho) = \rho_1 + \dots + \rho_n$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f(x) \in \text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n)$ – неубывающая функция, $\Omega(\rho) > 0$, и пусть $g(x) \in \text{Re}_0^0(\mathbb{Z}_+^n)$ – невозрастающая функция. Тогда $\theta(P_f^-) \geq 1/\Omega^*(\rho, h)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f(x) \in \text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n)$, то на основании теоремы 1 функция $f(x)$ представима в виде (1) и в силу теоремы 2 множество P_f^- является порядково-выпуклым. Легко видеть, что $\Delta_i f(x) \leq \Omega^0(\rho, h) \quad \forall x \in P \quad \forall i \in I_n$.

Поэтому функция $\eta(x) = \Omega^*(\rho, h)h(x) - f(x)$ – неубывающая на множестве P . Далее доказательство теоремы 4 повторяет схему доказательства теоремы 5.2 [1].

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 4, если $\Omega^0(\rho, h) = 1$, то множество P_f^- является суперматроидом.

Принимая во внимание следствие 1, можно переформулировать теорему 6.3 [1], которая является, по существу, одним из определений суперматроида, следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Порядково-выпуклое множество $S \subseteq \mathbb{Z}_+^n$ является суперматроидом тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n$, что S совпадает с множеством P_f^- некоторой функции $f(x) \in \text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n)$.

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $a_{ij} = a_{ji} \ \forall (i, j) \in I_n \times I_n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $b \in \mathbb{R}_+^1$, $b > 0$, (Ax, x) – скалярное произведение векторов Ax и x . В пространстве $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ зададим чебышевскую норму [8; гл. 6, с. 175], т.е. под нормой матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ будем понимать число $\|A\| = \max\{a_{ij} : (i, j) \in I_n \times I_n\}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\psi(x) = (Ax, x)/2 - b$ – неубывающая функция на множестве $P \subseteq \mathbb{Z}_+^n$, $\|A\| > 0$. Тогда имеем $\theta(P_\psi^-) \geq M(\|A\|, h)$, где $M(\|A\|, h) = (h + 1/2)\|A\|$, если $(h + 1/2)\|A\| < 1$, и $M(\|A\|, h) = 2/(2h + 1)\|A\|$, если $(h + 1/2)\|A\| \geq 1$, $h = h(P)$.

Доказательство теоремы повторяет схему доказательства теорем 5.2 [1] и 4.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 5, если $M(\|A\|, h) = 1$, то множество P_ψ^- является суперматроидом.

4. Гарантированные оценки. Применим полученные результаты для нахождения гарантированной оценки погрешности градиентного алгоритма в задачах максимизации координатно-выпуклой функции на множестве P_f^- .

Рассмотрим следующие задачи.

ЗАДАЧА В. $\max\{F(x) : x \in P_f^-, \text{ где } F(x) \in \text{Re}_0(\mathbb{Z}_+^n), f(x) \in \text{Re}_\rho^0(\mathbb{Z}_+^n), \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n\}$.

ЗАДАЧА С. $\max\{F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i) : x \in P_f^-, \text{ где } F_i(x_i) \in \text{Re}_0(\mathbb{Z}_+^1), i \in I_n - \text{неубывающая функция}\}$.

Из теорем 4, 5 и из упомянутой в п. 2 теорем 11.3 [1], 11.4 [1] следуют.

ТЕОРЕМА 6. Пусть в задаче В $F(x)$ – неубывающая функция на множестве $P \subseteq \mathbb{Z}_+^n$. Тогда гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма решения задачи В выражается формулой $\varepsilon = \Omega^0(\rho, h)/(1 + \Omega^0(\rho, h))$, если $\Omega^0(\rho, h) > 1$, и $\varepsilon = 1/(1 + \Omega^0(\rho, h))$, если $0 < \Omega^0(\rho, h) \leq 1$.

ТЕОРЕМА 7. В условиях теоремы 5 гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма решения задачи максимизации неубывающей функции $F(x) \in \text{Re}_0(\mathbb{Z}_+^n)$ на множестве P_ψ^- выражается формулой $\varepsilon = 1/(1 + M(\|A\|, h))$.

ТЕОРЕМА 8. Градиентное решение x^g задачи С удовлетворяет неравенствам

$$F(x^g) \geq \begin{cases} \frac{1}{\Omega^0(\rho, h)} F(x^*) + \left(1 - \frac{1}{\Omega^0(\rho, h)}\right) F(0), & \text{если } \Omega^0(\rho, h) > 1, \\ \Omega^0(\rho, h) F(x^*) + (1 - \Omega^0(\rho, h)) F(0), & \text{если } \Omega^0(\rho, h) \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда в случае, когда $\Omega^0(\rho, h) = 1$, получаем хорошо известный (см., например, [1], [6]) результат о совпадении глобального и градиентного экстремумов задачи максимизации сепарабельной координатно-выпуклой функции на суперматроиде.

Определим множество возмущающих B^δ матриц порядка $n \times n$ следующим образом [9]: $B^\delta = \{B \in \mathbb{R}_+^{n \times n} : 0 < \|B\| < \delta, \delta \in \mathbb{R}_+^1\}$.

Рассмотрим следующую задачу D ДО: $\max\{F(x) : x \in P_\psi^-\}$.

Под возмущением задачи D по матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}_+^{n \times n}$ будем понимать задачи D^δ : $\max\{F(x) : x \in P_\psi^\delta\}$, где $P_\psi^\delta = \{x : ((A+B)x, x)/2 - b \leq 0, B \in B^\delta, x \in P\}$.

Пусть ε (ε^δ) – гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма некоторой исходной (возмущенной) задачи ДО. Как обычно, градиентный алгоритм будем называть *устойчивым*, если $\varepsilon^\delta < \varepsilon K(\delta)$, где $K(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть ε и ε^δ – соответственно гарантированные оценки погрешности градиентного алгоритма для задачи D и D^δ . Тогда $\varepsilon^\delta < \varepsilon(1 + \delta/\|A\|)$.

Доказательство теоремы вытекает из теорем 5, 7 с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon^\delta &= \frac{(2h+1)\|A+B\|}{2+(2h+1)\|A+B\|} < \frac{(2h+1)\|A\| + (2h+1)\|B\|}{2+(2h+1)\|A\|} \\ &< \varepsilon + \frac{(2h+1)\delta}{2+(2h+1)\|A\|} = \varepsilon \left(1 + \frac{\delta}{\|A\|} \right). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Ковалев, *Матроиды в дискретной оптимизации*, Изд-во Университетское, Минск, 1987. [2] В. Korte, D. Hausmann, *Ann. Discrete Math.*, **2** (1978), 65–74. [3] М. М. Ковалев, П. Б. Миланов, *ЖВМ и МФ*, **24**:5 (1984), 786–790. [4] М. М. Ковалев, *Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Матем. Информ.*, **1**:3 (2001), 44–51. [5] В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, А. Б. Рамазанов, *Дискрет. матем.*, **2**:2 (1990), 127–137. [6] Н. И. Глебов, *Управляемые системы*, вып. 17, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 52–59. [7] А. Б. Рамазанов, *Дискретн. анализ и исслед. опер., серия 1*, **12**:4 (2005), 60–80. [8] П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1982. [9] В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, *Дискрет. матем.*, **16**, 2004.

А. Б. Рамазанов

Бакинский государственный университет

E-mail: rab-unibak@rambler.ru

Поступило

18.12.2007