Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Жеребьёва, Об одном классе множеств единственности для двойных тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 830–839

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:06:31

Об одном классе множеств единственности для двойных тригонометрических рядов

Т. А. Жеребьёва

В данной работе получен новый класс множеств единственности для двойного тригонометрического ряда в случае сходимости по прямоугольникам, а также доказан двумерный аналог теоремы И. И. Привалова.

Библиография: 7 названий.

Настоящая работа посвящена обобщению некоторых результатов о множествах единственности в теории многомерных тригонометрических рядов, полученных ранее в работах [1], [2]. Методом, разработанным Тетунашвили в [2] (см. также [3]), сведения прямоугольной сходимости к повторной, мы получим новый класс множеств единственности для двойного тригонометрического ряда, а также докажем двумерный аналог теоремы Привалова о тригонометрических рядах, сходящихся к суммируемой функции вне множества единственности.

Напомним основные результаты из теории кратных тригонометрических рядов для случая сходимости по прямоугольникам. В работах [2], [1] было показано, что пустое множество является множеством единственности для многомерных тригонометрических рядов, сходящихся по прямоугольникам. Класс непрерывных множеств единственности был построен в работе [2]. Описание этого класса мы приведем ниже только в двумерном случае и в удобной для нас форме. Рассмотрим две произвольные ортогональные системы функций $\{h_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{g_n(y)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определенных на отрезке $[0, 2\pi]$. Непустое подмножество E отрезка $[0, 2\pi]$ называется *множеством единственности* (*U-множеством*) для системы $\{h_m(x)\}_m$, если из сходимости ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h_m(x)$ к нулю вне множества E следует, что все его коэффициенты равны нулю. Двумерное множество единственности для системы функций $\{h_m(x)g_n(y)\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ определяется аналогично с тем лишь уточнением, что под сходимостью двойного ряда $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} h_m(x)g_n(y)$ понимается стремление его частичных сумм S_{mn} к пределу, когда $\min(m, n) \rightarrow \infty$; такая сходимость называется *прямоугольной*. Всюду в данной работе в качестве системы функций $\{h_m(x)\}_m$ будет выступать тригонометрическая система функций, а $\{g_n(y)\}_n$ – произвольная система ортогональных функций с непустым классом U -множеств. Сформулируем в двумерном случае результаты статьи [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00286) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2787.2008.1).

ТЕОРЕМА А. Пусть U – измеримое множество единственности для системы функций $\{g_n(y)\}_n$ и в каждой точке $y \notin U$ ряд

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{imx} g_n(y) \quad (1)$$

сходится по прямоугольникам к нулю при $x \notin U_y$, где $\{U_y\}_{y \notin U}$ – семейство измеримых множеств единственности для тригонометрической системы функций. Тогда все коэффициенты ряда нулевые.

ТЕОРЕМА В. Пусть заданы измеримое множество U единственности для системы функций $\{g_n(y)\}_n$ и конечная на $[0, 2\pi]^2$ функция $f(x, y)$. Кроме того, для каждого $y \notin U$ функция $f(x, y)$ является измеримой по Лебегу на $[0, 2\pi]$. Тогда если в каждой точке $y \notin U$ ряд (1) сходится по прямоугольникам к функции $f(x, y)$ при $x \notin U_y$, где $\{U_y\}_{y \notin U}$ – семейство измеримых множеств единственности для тригонометрической системы функций, то для каждого индекса m

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y) \quad \text{сходится к конечной функции } b_m(y) \text{ при } y \notin U,$$

и для каждого фиксированного $y \notin U$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(y) e^{imx} = f(x, y) \quad \text{при } x \notin U_y.$$

Пусть $\{g_n(y)\}_n$ – система ортогональных ограниченных функций, для которой выполнена теорема Валле-Пуссена, т.е. любой ряд по данной системе функций, сходящийся всюду к конечной, интегрируемой по Лебегу функции, является ее рядом Фурье. И пусть E – измеримое подмножество отрезка $[0, 2\pi]$ такое, что из сходимости произвольного тригонометрического ряда вне множества E к конечной на $[0, 2\pi]$, суммируемой функции $f(x)$ следует, что этот ряд является рядом Фурье для функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА С. Пусть система функций $\{g_n(y)\}_n$ и множество E удовлетворяют указанным условиям. Тогда если ряд (1) сходится по прямоугольникам вне множества $E \times [0, 2\pi]$ к конечной на $[0, 2\pi]^2$, суммируемой функции $f(x, y)$, то для каждой пары (m, n)

$$a_{mn} = \frac{1}{2\pi \|g_n\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} \bar{g}_n(y) dx dy.$$

В настоящей работе в двумерном случае будет показано, что условие измеримости соответствующих множеств единственности и функции в теоремах А и В может быть опущено (о существовании неизмеримых одномерных множеств единственности для тригонометрической системы функций см. [4]), а теорема С доказана в более общем виде.

Введем обозначение. Рассмотрим квадрат $D = [0, 2\pi]^2$. Выберем на оси Oy некоторое множество единственности $U \subset [0, 2\pi]$ для функций $\{g_n(y)\}_n$ и для каждого фиксированного y определим множества $P_y = \{(x, y) \in D : x \in [0, 2\pi]\}$ при $y \in U$ и

$R_y = \{(x, y) \in D : x \in U_y\}$ при $y \notin U$, где U_y – некоторое множество единственности для тригонометрической системы на $[0, 2\pi]$. Обозначим через $\mathcal{U}$ систему множеств вида $E = (\bigcup_{y \in U} P_y) \cup (\bigcup_{y \notin U} R_y)$. Каждое множество из $\mathcal{U}$ задается набором множеств $\{U, \{U_y\}_{y \notin U}\}$. Отметим, что данный класс множеств содержит неизмеримые множества. Примером такого множества является множество, построенное В. Серпинским, каждое его сечение прямыми, параллельными координатным осям, содержит не более одной точки.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Пусть двойной ряд

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{imx} \quad (2)$$

сходится по прямоугольникам к конечной функции $f(x)$ на непрерывном множестве E . Тогда существует номер M такой, что для каждого фиксированного индекса $|m| > M$ последовательность сумм $\sum_{n=-j}^j c_{mn}$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению прямоугольной сходимости для произвольной точки $x \in E$ найдется величина, ограничивающая частичные суммы ряда (2) по расширяющимся прямоугольникам, а именно, существуют величина $C(x) > 0$ и номер $N(x)$ такие, что как только $\min(m, j) > N(x)$, имеем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=-j}^j c_{mn} e^{imx} + \sum_{n=-j}^j c_{-mn} e^{-imx} \right| \\ &= \left| \sum_{k=-m}^m \sum_{n=-j}^j c_{kn} e^{ikx} - \sum_{k=-m+1}^{m-1} \sum_{n=-j}^j c_{kn} e^{ikx} \right| < C(x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$A_{mj} = \sum_{n=-j}^j c_{mn}, \quad B_{mj} = \sum_{n=-j}^j c_{-mn}$$

и преобразуем неравенство $|A_{mj} e^{imx} + B_{mj} e^{-imx}| < C(x)$ к виду

$$|(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx| < C(x).$$

Фиксируем точку $x_1 \in E$, тогда множество $A = (x_1 + \pi\mathbb{Q}) \cap [0, 2\pi]$, где $\mathbb{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел, является счетным подмножеством отрезка $[0, 2\pi]$, а множество E несчетно, значит, найдется $x_2 \in E \setminus A$. Для фиксированных $m, j > M = \max(N(x_1), N(x_2))$ по построению точек x_1, x_2 имеем $\sin m(x_2 - x_1) \neq 0$ (при выборе x_1, x_2 дополнительно потребуем, чтобы $\sin 2mx_1 \neq 0, \sin 2mx_2 \neq 0$) и

$$\begin{aligned} & |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_1 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1| < C(x_1), \\ & |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_2 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_2| < C(x_2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_1 \sin mx_2 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1 \sin mx_2| < C(x_1), \\ & |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_2 \sin mx_1 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1 \sin mx_2| < C(x_2), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & |(A_{mj} + B_{mj}) \sin m(x_2 - x_1)| \\ & \leq |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_1 \sin mx_2 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1 \sin mx_2| \\ & \quad + |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_2 \sin mx_1 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1 \sin mx_2| \\ & < C(x_1) + C(x_2). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & |(A_{mj} - B_{mj}) \sin m(x_2 - x_1)| \\ & \leq |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_1 \cos mx_2 + i(A_{mj} - B_{mj}) \sin mx_1 \cos mx_2| \\ & \quad + |(A_{mj} + B_{mj}) \cos mx_1 \cos mx_2 + i(A_{mj} - B_{mj}) \cos mx_1 \sin mx_2| \\ & < C(x_1) + C(x_2). \end{aligned}$$

Если обозначить

$$K(x_1, x_2, m) = \frac{C(x_1) + C(x_2)}{|\sin m(x_2 - x_1)|},$$

то

$$\begin{aligned} & |A_{mj} + B_{mj}| \leq K(x_1, x_2, m), \quad |A_{mj} - B_{mj}| \leq K(x_1, x_2, m), \\ & \left| \sum_{n=-j}^j c_{mn} \right| = |A_{mj}| \leq K(x_1, x_2, m), \quad \left| \sum_{n=-j}^j c_{-mn} \right| = |B_{mj}| \leq K(x_1, x_2, m) \end{aligned}$$

для каждого фиксированного $m > M$ и для всех $j > M$.

Таким образом, для каждого фиксированного $|m| > M$

$$\left| \sum_{n=-j}^j c_{mn} \right| < \max \left(K(x_1, x_2, m), \left| \sum_{n=-p}^p c_{mn} \right|, p = 0, \dots, M \right)$$

для всех j , и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дополнение до произвольного множества единственности для тригонометрической системы является континуальным множеством и может выступать в качестве множества E в лемме 1.

ЛЕММА 2. Пусть M – фиксированное натуральное число, E – некоторое подмножество отрезка $[0, 2\pi]$, содержащее $2M + 1$ различных точек, и последовательность

$$\sum_{n=-j}^j \sum_{m=-M}^M a_{mn} e^{imx} \quad (3)$$

ограничена в точках E . Тогда для любого $m = -M, \dots, M$ последовательность сумм $\sum_{n=-j}^j a_{mn}$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A_{mj} = \sum_{n=-j}^j a_{mn}$. Пусть $E = \{x_l\}_{l=-M}^M$. Положим

$$A_j = \begin{pmatrix} A_{-Mj} \\ \vdots \\ A_{Mj} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} e^{-iMx_{-M}} & e^{-i(M-1)x_{-M}} & \dots & e^{iMx_{-M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-iMx_M} & e^{-i(M-1)x_M} & \dots & e^{iMx_M} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие матричную $\|B\| = \max_i \sum_j |b_{ij}|$ и векторную $\|X\| = \max_i |x_i|$ нормы. По условию последовательность (3) ограничена в точках $\{x_l\}_{l=-M}^M$. Следовательно, существует величина L такая, что сразу для всех j выполнено неравенство

$$\|WA_j\| < L.$$

Матрица W имеет определитель, отличный от нуля (сводится к определителю Вандермонда), так как $e^{ix_{-M}}, \dots, e^{ix_M}$ различны. Отсюда следует обратимость матрицы W .

Если обозначить $C = WA_j$, то $A_j = W^{-1}C$ и $\|C\| < L$. Отсюда

$$\|A_j\| = \|W^{-1}C\| \leq \|W^{-1}\| \|C\| \leq L \|W^{-1}\|,$$

т.е.

$$\max_{m=-M, \dots, M} |A_{mj}| \leq L \|W^{-1}\| \quad \text{при всех } j,$$

и требуемая ограниченность доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть U – множество единственности для системы функций $\{g_n(y)\}_n$ и в каждой точке $y \notin U$ ряд (1) сходится по прямоугольникам к нулю при $x \notin U_y$, где $\{U_y\}_{y \notin U}$ – семейство множеств единственности для тригонометрической системы функций. Тогда все коэффициенты ряда равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится по аналогии с доказательством соответствующей теоремы для системы Уолша (см. [5]).

Фиксируем произвольную точку $y_0 \notin U$, и для каждого индекса m рассмотрим суммы $\sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0)$. По условию ряд (1) сходится по прямоугольникам вне множества $\{(x, y_0) : x \in U_{y_0}\}$, поэтому согласно лемме 1, примененной для $c_{mn} = a_{mn} g_n(y_0)$, можно указать число $M = M(x_1, x_2, y_0)$ (построение точек x_1, x_2 см. в доказательстве леммы 1) такое, что при $|m| > M$ суммы $\sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0)$ ограничены, т.е. существует положительная величина $C(m) = C(m, x_1, x_2, y_0)$, для которой

$$\left| \sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0) \right| < C(m) \quad \text{при всех } j, \quad \text{как только } |m| > M. \quad (4)$$

Для полученного M найдем $x_l \notin U_{y_0}, l = -M, \dots, M$. Сумма ряда (1) в точке (x_l, y_0) равна нулю. Тогда по определению прямоугольной сходимости для достаточно большого $N > M$ (точек x_l конечное число) при $j > N$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{n=-j}^j \sum_{m=-N}^N a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0) \right| < 1.$$

Таким образом, с учетом (4)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=-j}^j \sum_{m=-M}^M a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0) \right| \\ &= \left| \sum_{n=-j}^j \sum_{m=-N}^N a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0) - \sum_{m=-N}^{-M-1} e^{imx_l} \sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0) - \sum_{m=M+1}^N e^{imx_l} \sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0) \right| \end{aligned}$$

$$\leq 1 + \sum_{m=-N}^{-M-1} C(m) + \sum_{m=M+1}^N C(m), \quad \text{как только } j > N.$$

Обозначив

$$K = 1 + \sum_{m=-N}^{-M-1} C(m) + \sum_{m=M+1}^N C(m),$$

для всех $j \geq 0$ имеем

$$\left| \sum_{n=-j}^j \sum_{m=-M}^M a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0) \right| \leq \max \left(K, \left| \sum_{n=-p}^p \sum_{m=-M}^M a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0) \right|, p = 0, \dots, N \right).$$

Следовательно, при каждом фиксированном x_l последовательность сумм

$$\sum_{n=-j}^j \sum_{m=-M}^M a_{mn} e^{imx_l} g_n(y_0)$$

ограничена, т.е. выполнено условие леммы 2. Согласно этой лемме для всех $m = -M, \dots, M$ последовательность сумм $\sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0)$ ограничена. Но по определению M все соответствующие суммы для индексов $|m| > M$ тоже ограничены. Итак, для каждого $y_0 \notin U$ и произвольного m последовательность сумм $\sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0)$ ограничена.

Рассмотрим последовательность сумм $\sum_{n=-j}^j a_{0n} g_n(y_0)$ при $y_0 \notin U$. Она является ограниченной, значит, к ней применима теорема Больцано–Вейерштрасса. Найдем подпоследовательность $\{j_i^0\}$, по которой существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^0}^{j_i^0} a_{0n} g_n(y_0) \right) = b_0.$$

Пусть числа b_p , b_{-p} и последовательности $\{j_i^p\} = \{j_i^{-p}\}$ для $p = 0, \dots, m-1$ уже построены, рассмотрим последовательность $\{j_i^m\} = \{j_i^{-m}\}$, являющуюся подпоследовательностью последовательности $\{j_i^{m-1}\}$, для которой существуют пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^m}^{j_i^m} a_{mn} g_n(y_0) \right) = b_m, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^{-m}}^{j_i^{-m}} a_{-mn} g_n(y_0) \right) = b_{-m}.$$

Для полученной последовательности частичных пределов $\{b_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ покажем, что ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imx}$ сходится к нулю для всех $x \notin U_{y_0}$.

Фиксируем произвольную точку $x \notin U_{y_0}$ и положительное число ε . Так как ряд (1) сходится в точке (x, y_0) , то по определению прямоугольной сходимости можно указать такое число $K > 0$, что, как только $\min(k, j) > K$, так

$$|S_{kj}(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $k > K$. По построению последовательность $\{j_i^k\} = \{j_i^{-k}\}$ является подпоследовательностью всех последовательностей $\{j_i^p\} = \{j_i^{-p}\}$ при $p = 0, \dots, k-1$.

Значит, для достаточно большого числа j из последовательности $\{j_i^k\}$ и $j > K$ имеет место оценка

$$\left| b_m - \sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+4}}, \quad -k \leq m \leq k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=-k}^k b_m e^{imx} \right| &\leq \left| \sum_{m=-k}^k \left(b_m - \sum_{n=-j}^j a_{mn} g_n(y_0) \right) e^{imx} \right| + \left| S_{kj}(x, y_0) \right| \\ &< \sum_{m=-k}^k \frac{\varepsilon}{2^{|m|+4}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает сходимость ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imx}$ к нулю при всех x вне U_{y_0} . Но множество U_{y_0} является множеством единственности для тригонометрической системы функций, значит, все коэффициенты b_m рассматриваемого ряда равны нулю. В частности,

$$b_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^0}^{j_i^0} a_{0n} g_n(y_0) \right) = 0.$$

Полученный результат не зависит от выбора подпоследовательности $\{j_i^0\}$, т.е. все частичные пределы последовательности $\sum_{n=-j}^j a_{0n} g_n(y_0)$ равны нулю. Это означает, что существует предел

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{0n} g_n(y_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j}^j a_{0n} g_n(y_0) \right) = 0.$$

Установив, что b_0 равно нулю, построение последовательности можно начать с индекса $m = 1$. Тогда последовательность $\{j_i^1\}$ будет выбираться произвольно независимо от $\{j_i^0\}$, мы можем повторить рассуждения и показать, что существует предел $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{1n} g_n(y_0) = 0$. И так далее. В итоге для каждого $m \geq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y_0) = 0.$$

Но точка y_0 выбиралась вне U произвольно. Значит, для всех m ряды $b_m(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y)$ сходятся к нулю вне U . По условию теоремы множество U является множеством единственности для системы функций $\{g_n(y)\}_n$, что по определению приводит к равенству нулю всех коэффициентов ряда (1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Класс множеств $\mathcal{U}$, определенный выше, представляет собой класс множеств единственности относительно прямоугольной сходимости для системы функций $\{e^{imx} g_n(y)\}_{m,n}$.

Аналогичные рассуждения мы используем и при доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряд

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{imx} \quad (5)$$

сходится по прямоугольникам к конечной функции $f(x)$ при $x \notin U$, где U – множество единственности для тригонометрической системы, тогда

- 1) ряды $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}$ сходятся при всех m ;
- 2) выполнено

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \right) e^{imx} = f(x) \quad \text{при } x \notin U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из предыдущего доказательства, построим систему вложенных подпоследовательностей

$$\{j_i^0\} \supset \{j_i^1\} \supset \dots \supset \{j_i^m\} \supset \dots, \\ \{j_i^{-m}\} = \{j_i^m\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

и числа

$$b_m = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^m}^{j_i^m} a_{mn} \right), \quad b_{-m} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j_i^{-m}}^{j_i^{-m}} a_{-mn} \right).$$

Нетрудно проверить, что условие теоремы обеспечивает сходимость $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imx}$ к функции $f(x)$ всюду вне множества U . Но множество U является множеством единственности для тригонометрической системы, значит, по теореме единственности коэффициенты этого ряда определены однозначно, т.е. число b_0 определено однозначно. Полученный результат имеет место для всех частичных пределов b_0 , соответствующих выбору последовательности $\{j_i^0\}$.

Отсюда следует, что все частичные пределы совпадают и существует предел $b_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-j}^j a_{0n} \right)$. Установив, что b_0 не зависит от выбора последовательности $\{j_i^0\}$, построение системы последовательностей можно начинать с номера $m = 1$. Тогда уже последовательность $\{j_i^1\} = \{j_i^{-1}\}$ будет выбираться произвольно, независимо от последовательности $\{j_i^0\}$, и мы можем повторить все рассуждения.

В итоге для каждого m получим сходимость рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} = b_m.$$

Причем ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imx}$ будет сходиться к функции $f(x)$ всюду вне множества U . Подставляя выражения, задающие числа b_m , получим повторную сходимость ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \right) e^{imx}$ к функции $f(x)$ всюду вне множества U . Теорема доказана.

Пусть для системы функций $\{g_n(y)\}$ каждое измеримое U -множество имеет меру нуль.

ЛЕММА 3. Если E является двумерным измеримым множеством единственности из теоремы 1, то $\mu E = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество E измеримо. Согласно теореме Фубини $\mu E_y \in L[0, 2\pi]$ и $\mu E = \int_0^{2\pi} \mu E_y dy$.

Множество E задается набором $\{U, \{U_y\}_{y \notin U}\}$ одномерных множеств единственности, поэтому сечение E_y множества E при $y \notin U$ совпадает с множеством U_y и $\mu E_y = 0$, а при $y \in U$ — с отрезком $[0, 2\pi]$ и $\mu E_y = 2\pi$. Следовательно,

$$\chi_U(y) = \frac{1}{2\pi} \mu E_y \in L[0, 1],$$

что доказывает измеримость множества U . Множество U , являясь измеримым множеством единственности для системы $\{g_n(y)\}$, имеет меру нуль, поэтому

$$\mu E = \int_0^{2\pi} \mu E_y dy = 2\pi \int_U dy = 0.$$

Лемма доказана.

Привалов показал, что каждый тригонометрический ряд всюду, кроме, быть может, некоторого замкнутого U -множества, сходящийся к конечной, интегрируемой по Лебегу функции, является рядом Фурье этой функции. Пусть $\{g_n(y)\}_n$ — система ортогональных ограниченных функций, для которых каждое измеримое множество единственности имеет меру нуль и для которых выполнен аналог теоремы Привалова. В частности, такой системой являются, как уже было отмечено, система тригонометрических функций и система функций Уолша (см. [6], [7]).

ТЕОРЕМА 3 (двумерный аналог теоремы Привалова). Пусть E — двумерное множество единственности из теоремы 1 для системы функций $\{e^{imx} g_n(y)\}_{m,n}$ и все задающие его множества единственности $\{U_y\}_{y \notin U}$ замкнуты в $[0, 2\pi]$, U — измеримое множество единственности, для которого выполнен аналог теоремы Привалова. Если ряд (1) сходится всюду вне множества E к конечной суммируемой на $[0, 2\pi]^2$ функции $f(x, y)$, то (1) является рядом Фурье функции $f(x, y)$, т.е.

$$a_{mn} = \frac{1}{2\pi \|g_n\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} \bar{g}_n(y) dx dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию множества $\{U, \{U_y\}_{y \notin U}\}$ измеримы, следовательно, они имеют меру нуль. Для точек $y \notin U$ по теореме 2 имеем

- 1) ряды $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y)$ сходятся к конечной функции $b_m(y)$;
- 2) выполнено

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(y) e^{imx} = f(x, y) \quad \text{при } x \notin U_y.$$

Доопределим $b_m(y)$ нулем на U .

Функция $f(x, y)$ суммируема на $[0, 2\pi]^2$, значит, по теореме Фубини для почти всех $y \in [0, 2\pi]$ функция $f(x, y)$ как функция переменной x суммируема на интервале $[0, 2\pi]$. Обозначим

$$G = \{y \in [0, 2\pi] : f(x, y) \text{ суммируема на отрезке } [0, 2\pi]\},$$

тогда $\mu G = 2\pi$.

Фиксируем произвольную точку $y \notin U$ и $y \in G$. Множество U_y является замкнутым U -множеством для тригонометрической системы, значит, для него выполнена одномерная теорема Привалова, согласно которой

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y) = b_m(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} dx. \quad (6)$$

Равенство (6) выполнено для почти всех $y \in [0, 2\pi]$, а по теореме Фубини функция

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} dx$$

интегрируема по Лебегу на $[0, 2\pi]$. Таким образом, ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_n(y)$ сходится всюду вне U к конечной измеримой функции $b_m(y)$, которая совпадает почти всюду с интегрируемой по Лебегу функцией $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} dx$. Значит, сама функция $b_m(y)$ конечна и суммируема на $[0, 2\pi]$. Применим теорему Привалова к системе функций $\{g_n(y)\}_n$ и множеству U , а потом теорему Фубини к функции $f(x, y) e^{-imx} \bar{g}_n(y)$, с учетом того, что $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx dy < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{2\pi \|g_n\|^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} dx \right) \bar{g}_n(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi \|g_n\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-imx} \bar{g}_n(y) dx dy, \end{aligned}$$

т.е. ряд является рядом Фурье функции $f(x, y)$.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. А. Скворцову за поставленную задачу и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. M. Ash, C. Freiling, D. Rinne, "Uniqueness of rectangularly convergent trigonometric series", *Ann. of Math.* (2), **137**:1 (1993), 145–166.
- [2] Ш. Т. Тетунашвили, "О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму", *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176.
- [3] D. Rinne, "Rectangular and iterated convergence of multiple trigonometric series", *Real Anal. Exchange*, **19**:2 (1993/94), 644–650.
- [4] N. Bary, "Sur l'unicité du développement trigonométrique", *Fundam. Math.*, **9** (1927), 62–115.
- [5] Т. А. Жеребьёва, "Об одном классе множеств единственности для двойных рядов Уолша", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2007, № 5, 13–18.
- [6] И. И. Привалов, "Обобщение теоремы Paul-du-Boys-Reymond'a", *Матем. сб.*, **31**:2 (1923), 229–231.
- [7] В. А. Скворцов, "Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша", *Матем. заметки*, **13**:3 (1973), 367–372.

Т. А. Жеребьёва

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tazherebyova@yandex.ru

Поступило

23.10.2007

Исправленный вариант

13.10.2008