Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Леандр, Анализ на пространстве петель и топология, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 236–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:06:25

УДК 517

АНАЛИЗ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПЕТЕЛЬ И ТОПОЛОГИЯ

Р. Леандр

Дан обзор результатов по анализу на пространствах петель и топологий. В частности, описаны соболевские когомологии пространства петель, стохастические когомологии Чена–Сурио, род Виттена.

Библиография: 73 названия.

1. Введение. После появления основополагающих работ Бисмута [1] и Джонса и Леандра [2] анализ на пространствах петель и путей стал объектом интенсивных исследований. Интерес к этой теме объясняется тем, что пространство петель играет важную роль в топологии и квантовой теории поля.

В топологии рассматривается естественное действие окружности на пространстве свободных петель многообразия M , состоящем из отображений $S^1 \rightarrow M$; окружность действует вращением петли. Множество неподвижных точек этого действия совпадает с самим многообразием. Топология многообразия, на котором действует окружность, связана с топологией множества неподвижных точек действия; это видно из локализационных формул Берлина–Верна, которые выражают некоторые интегралы по всему пространству через интегралы по множеству неподвижных точек [3] (см. также [4]). Эквивариантный индекс эллиптического оператора, инвариантного относительно действия окружности, также может быть выражен через интегралы по множеству неподвижных точек. (Доказательство этого факта можно найти в [5].) Локализационные формулы Берлина–Верна в бесконечной размерности позволяют доказать конечномерную теорему об индексе (см. [6]–[8]), а бесконечномерная формула Лефшеца приводит, как заметил Виттен [9], к понятию эллиптического рода [10], которое играет важную роль в теории кобордизмов [11].

В двумерной конформной теории поля пространство петель является пространством состояний. В конформной теории поля рассматривают случайные отображения римановой поверхности Σ в многообразие M [12]. Если Σ имеет край, то, сужая эти отображения на край поверхности Σ , мы получаем петли в многообразии M . Если Σ – поверхность без края (например, тор или эллиптическая поверхность), то статистическая сумма распределения конформной теории дает топологические инварианты, связанные с эллиптическими родами [9], [10].

Настоящая статья представляет собой обзор по анализу на пространстве петель и топологии; она продолжает обзор [13] более ранних результатов. Скалярный анализ на пространстве петель излагается в обзорах Аиды [14] и Драйвера [15] и в книгах Малиавена [16] и Струка [17]; заинтересованному читателю мы рекомендуем также обзор Альбеверии [18].

Настоящий обзор включает следующие пункты.

2. Соболевские когомологии пространства петель.
3. Стохастические когомологии Чена–Сурио.
4. Разложение де Рама–Ходжа–Кодаиры.
5. Фактор-пространства группы петель и род Виттена.
6. Двумерные аспекты.

2. Соболевские когомологии пространства петель. Соболевские когомологии пространства петель изучались в работах [19], [20]. Программа их исследования, предложенная в [19], [13], частично осуществлена в [21].

Пусть M – компактное риманово многообразие размерности d , Δ – оператор Лапласа–Бельтрами и $p_t(x, y)$ – ядро интегрального оператора полугруппы $\exp[-t\Delta]$ ($\exp[-t\Delta]f(x) = \int_M p_t(x, y)f(y) d\pi(y)$, где $d\pi$ – риманова мера на M). Рассмотрим закон распределения $dP_{1,x}$ броуновского моста, начинающегося в x и возвращающегося за единичное время обратно в x . Этот закон задается следующей формулой. Пусть F – некоторый функционал из $M \times \cdots \times M$ в M и $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq 1$; будем говорить, что $F(\gamma_{s_1}, \dots, \gamma_{s_n})$ – *цилиндрическая функция* петли или пути $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$. Мы имеем

$$\begin{aligned} E_{1,x}[F(\gamma_{s_1}, \dots, \gamma_{s_n})] \\ = C \iint p_{s_1}(x, x_1) p_{s_2-s_1}(x_1, x_2) \cdots p_{1-s_n}(x_n, x) F(x_1, \dots, x_n) d\pi(x_1) \cdots d\pi(x_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Удаляя $p_{1-s_n}(x_n, x)$ из (2.1), мы получаем закон dP_1^x броуновского движения. Эти меры определены на непрерывных петлях или путях γ . В дальнейшем пространство закрепленных непрерывных петель обозначается через $L_x(M)$, а пространство закрепленных непрерывных путей – через $P_x(M)$.

Пусть τ_t – параллельный перенос из γ_0 в γ_t вдоль броуновской траектории γ для связности Леви–Чивита. Мы будем использовать то же обозначение для случайного пути γ или для траектории с конечной энергией γ . Он является пределом параллельных переносов вдоль ломаных, аппроксимирующих γ , и этот предел существует почти наверное. Касательное векторное поле над петлей [1], [2] имеет вид $\tau_s H_s = X_s$, где $X_0 = X_1 = 0$ и H_s – путь конечной энергии в $T_x(M)$. Касательное пространство случайной петли наделяется римановой метрикой

$$\|X\|_\gamma^2 = \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} H_s \right\|^2 ds. \quad (2.2)$$

В случае пространства закрепленных путей мы не предполагаем, что $X_1 = 0$. Мы выбрали именно такое касательное пространство, потому что если H детерминировано, то для всех цилиндрических функционалов

$$E[\langle dF, X \rangle] = E[F \operatorname{div} X], \quad (2.3)$$

где $\langle dF, X \rangle$ – производная цилиндрического функционала вдоль векторного поля X [1], [15], [22] ($\langle dF(\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, \dots, \gamma_{s_n}), X \rangle = \sum \langle d_i F(\gamma_{s_1}, \dots, \gamma_{s_n}), X_{s_i} \rangle$). Эти формулы интегрирования по частям позволяют распространить понятие H -производной на функционалы, не являющиеся цилиндрическими. Связность на пространстве закрепленных петель

и на пространстве закреплённых путей определяется формулой

$$\nabla \cdot X_s = \tau_s D \cdot H_s, \quad (2.4)$$

где $D \cdot H_s$ – обычная H -производная на плоском пространстве случайной величины H_s . Это позволяет определить производные более высоких порядков, полагая

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^{r+1} F(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \langle d(d_{\nabla}^r(X_1, \dots, X_r)), X_{r+1} \rangle \\ &\quad - \sum d_{\nabla}^r F(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_{X_{r+1}} X_i, X_{i+1}, X_r); \end{aligned} \quad (2.5)$$

они задаются ядрами

$$d_{\nabla}^r F(X_1, \dots, X_r) = \iint k(s_1, \dots, s_r) \frac{d}{ds} H_{s_1}^1 \cdots \frac{d}{ds} H_{s_r}^r ds_1 \cdots ds_r. \quad (2.6)$$

Для пространства петель мы дополнительно предполагаем, что

$$\int k(s_1, \dots, s_r) ds_i = 0. \quad (2.7)$$

Подобным же образом, с помощью ядер, аналогичных (2.6) и (2.7), определяется r -форма σ . Мы не выписываем естественно возникающих условий кососимметричности для ядра формы.

Внешняя производная r -формы задается формулой

$$\begin{aligned} d\sigma(X_1, \dots, X_n) &= \sum (-1)^{i-1} \langle d(\sigma(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)), X_i \rangle \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Чтобы найти внешнюю производную, мы должны рассмотреть скобку Ли двух векторных полей, а для этого нужна ковариантная производная параллельного переноса. Она задается формулой (см. [1], [23]; предварительная форма приведена в [24])

$$\nabla_X \tau_t = \tau_t \int_0^t \tau_s^{-1} R(d\gamma_s, X_s) \tau_s. \quad (2.9)$$

Таким образом, скобка Ли двух векторных полей не является векторным полем [22]; понятие внешней производной приводит к введению неадаптивных интегралов Стратоновича [19], а это, в свою очередь, ведет к новому понятию соболевских пространств. А именно, пусть $\sigma(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_l)$ – ядра ковариантной производной $\nabla^l \sigma$ r -формы σ . Мы предполагаем, что

$$\begin{aligned} &\|\sigma(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_l) - \sigma(s'_1, \dots, s'_r; t'_1, \dots, t'_l)\|_{L^p} \\ &\leq C_{p,l}(\sigma) \left(\sum \sqrt{|s_i - s'_i|} + \sum \sqrt{|t_j - t'_j|} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

на всех связных компонентах дополнения к диагоналям в $[0, 1]^r \times [0, 1]^l$; кроме того, мы предполагаем, что L^p -нормы функций $\sigma(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_l)$ равномерно ограничены. Так определяется множество соболевских норм, называемых *соболевскими нормами Нуалюра–Парду*. Если все эти соболевские нормы конечны, то мы говорим, что r -форма является *гладкой в смысле Нуалюра–Парду* [19]–[21]; пространство форм, гладких в смысле Нуалюра–Парду, с топологией Фреше обозначается как $(N.P)_{\infty} - (\text{Path})$ или $(N.P)_{\infty} - (\text{Loop})$.

ТЕОРЕМА 2.1 [19]. *Внешняя стохастическая дифференциальная производная d непрерывна на множестве гладких в смысле Нуалляра–Парду форм конечной степени.*

ТЕОРЕМА 2.2 [21]. *Отображение ограничения является сюръективным отображением пространства $(N.P)_\infty - (\text{Path})$ на $(N.P)_\infty - (\text{Loop})$.*

Согласно теореме 2.2 мы можем ограничить форму, почти наверное определенную на пространстве путей, и получить форму, почти наверное определенную на пространстве закрепленных петель. (В бесконечной размерности нет соболевских теорем вложения и форма, принадлежащая всем соболевским пространствам, определена лишь почти наверное.) Эта операция ограничения представляет собой предмет анализа “квази-наверное” [25], [16].

Сюръективность отображения ограничения связана с тем, что мы можем продолжать формы с пространства закрепленных петель на пространство свободных петель. Для этого используется поток Драйвера [15] и его инфинитезимальные свойства [21]. В случае однородного многообразия [20] теорема 2.2 доказывается с помощью формулы квазиинвариантности Альбеверио–Хёга–Крона [26] и того факта, что однородное многообразие имеет большую группу изометрий, а броуновский мост зависит только от метрики.

Алгебраическая модель пространства гладких петель известна давно [27] – это комплекс Хохшильда; изоморфизм между группами когомологий комплекса Хохшильда и пространства гладких петель задается с помощью кратных интегралов. Напомним в этой связи, что такое форма Чена. Для простоты мы будем рассматривать пространство закрепленных путей; аналогичные построения могут быть выполнены для пространства свободных путей, пространства свободных петель и пространства закрепленных петель. Пусть

$$\tilde{\omega}_n = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1} \quad (2.11)$$

– элемент пространства $\Omega_*(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$, где $\Omega_*(M)$ – пространство форм положительной степени на M и $\Omega(M)$ – пространство форм на M . Рассмотрим на $\Omega_*(M)$ гильбертово соболевское пространство порядка k с оператором $L = d^*d + dd^* + 2$; для формы ω мы имеем

$$\|\omega\|_{2,k}^2 = \int_M \langle L^k \omega, \omega \rangle$$

(здесь имеется в виду естественное внутреннее произведение форм на многообразии). *Полной степенью* элемента $\tilde{\omega}_n$ называется число

$$\sum_{i=1}^n (\deg(\omega_i) - 1) + \deg \omega_n.$$

Соответствующая соболевская норма на гильбертовом тензорном произведении обозначается через $\|\cdot\|_{2,k}$. Рассмотрим ряд $\sum \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}$ элементов полной степени l и введем для него семейство полунорм

$$\varphi_{k,z}(\tilde{\omega}) = \sum \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \|\tilde{\omega}_n\|_{2,k}. \quad (2.12)$$

Элементу комплекса Хохшильда соответствует форма Чена $\Sigma\tilde{\omega}_n$, определенная формулой

$$\Sigma\tilde{\omega}_n = \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < 1} \omega_1(d\gamma_{s_1}, \cdot) \wedge \dots \wedge \omega_n(d\gamma_{s_n}, \cdot) \wedge \omega_{n+1}. \quad (2.13)$$

Для гладкой формы определение $\Sigma\tilde{\omega}_n$ не представляет затруднений. Для непрерывных путей определение ядра стохастической формы Чена требует использования интегралов Стратоновича [2]. Например, если ω_1 и ω_2 – 2-формы, то для векторных полей X^1 и X^2 на броуновских путях мы получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_1 \otimes \omega_2)(X^1, X^2) = & \int_{0 < s_1 < s_2 < 1} \omega_1(d\gamma_{s_1}, \tau_{s_1} H_{s_1}^1) \omega_2(d\gamma_{s_2}, \tau_{s_2} H_{s_2}^2) \\ & + \text{кососимметричные члены}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

применяя к (2.14) теорему Фубини, мы получаем стохастическую форму Чена, заданную случайными ядрами. Для гладких петель выполняется соотношение $d(\Sigma\tilde{\omega}_n) = \Sigma(b\tilde{\omega}_n)$, где b – комплекс над алгебраической моделью, называемый *комплексом Хохшильда*. Для пространства Фреше, заданного семейством полунорм (2.12), комплекс Хохшильда непрерывен. Мы получаем группы когомологий алгебраической модели пространства петель, обозначаемые через $H.H_{\infty-}^l(\mathbb{C}, \Omega(M), \mathbb{C})$; поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ здесь возникает из-за того, что мы рассматриваем формы со значениями в $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2.3 [21]. *Для односвязного многообразия M группы когомологий алгебраической модели $H.H_{\infty-}^l(\mathbb{C}, \Omega(M), \mathbb{C})$ совпадают с группами когомологий в смысле Нуалляра–Парду пространства закрепленных петель.*

3. Стохастические когомологии Чена–Сурио. Замкнутая 2-форма со значениями в $\mathbb{Z}$ на односвязном многообразии определяет над этим многообразием расслоение на окружности (или комплексное линейное расслоение) со связностью кривизны $2i\pi\sigma$. Это расслоение на окружности строится следующим образом. Рассмотрим пары $(l(x), \alpha)$, состоящие из пути и точки окружности, где путь l соединяет фиксированную точку многообразия и точку x . Мы отождествляем пары $(l(x), \alpha)$ и $(l'(x'), \alpha')$, если $x = x'$ и

$$\alpha' = \alpha \exp \left[-2i\pi \int_{\Sigma} \sigma \right] \quad (3.1)$$

для какой-нибудь поверхности Σ , ограниченной петлей, состоящей из пути $l(x)$ и пути, обратного к $l'(x')$. Обобщение этой конструкции на броуновские мосты и стохастические формы связано с некоторыми трудностями: стохастическая форма определена лишь почти наверное, и для вычисления $\int_{\Sigma} \sigma$ нужны некоторые стохастические интегралы. Более того, мы должны выбрать путь, соединяющий постоянную петлю с γ , и это следует проделать для некоторых выделенных путей: в частности, закон распределения $l_t(\gamma)$ не является абсолютно непрерывным относительно закона распределения γ . Так что теория из п. 2 неэффективна в применении к этим задачам.

Нам нужна более общая, чем потоки Драйвера [15], теория кривых на стохастическом пространстве петель, а также теория форм на большом множестве полумартингалов. Мы воспользуемся теорией диффеологий Чена–Сурио [71], [28].

Напомним, что *диффеологией* пространства $\widetilde{M}$ (которое может быть очень сложным) называется набор отображений (U, φ) , называемых *пакетами*, определенных на открытых подмножествах произвольных линейных пространств и принимающих значения в пространстве $\widetilde{M}$, который удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $j: U_1 \rightarrow U_2$ – гладкое отображение открытых подмножеств линейных пространств и (U_2, φ) является пакетом, то $(U_1, \varphi \circ j)$ также является пакетом;
- 2) постоянное отображение является пакетом; если U_1 и U_2 – непересекающиеся открытые подмножества одного и того же линейного пространства и (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) – пакеты, то естественное отображение, определенное на объединении этих множеств, – также пакет.

Это приводит к следующему определению стохастической диффеологии.

Пусть (Ω, F_s, P) – фильтрованное вероятностное пространство, а M – компактное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^{d_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [29]. *Стохастический пакет* (stochastic plaque) из открытого подмножества U линейного пространства $\mathbb{R}^m$ в $L_x(M)$ – это тройка (U, Ω_i, φ_i) , определяемая

- а) счетным семейством отображений φ_i из U в множество полумартингалов на $\mathbb{R}^{d_1}$, гладко зависящих от $u \in U$ в некоторой подходящей топологии на множестве полумартингалов (в качестве такой топологии можно взять топологию Эмери [30], а также некоторые другие топологии);
- б) счетным разбиением Ω_i вероятностного пространства таким, что путь $\varphi_i(u)$ принадлежит пространству $L_x(M)$ для всех $u \in U$ почти наверное в Ω_i .

Мы отождествляем два стохастических пакета $(U, \Omega_i^1, \varphi_i^1)$ и $(U, \Omega_j^2, \varphi_j^2)$, если $\varphi_i^1 = \varphi_j^2$ почти наверное на всяком пересечении Ω_i^1 с Ω_j^2 .

Стохастический симплекс Δ является сужением на канонический симплекс $\Delta \subseteq \mathbb{R}^m$ стохастического пакета (U, Ω_i, φ_i) , где U – окрестность симплекса Δ . Можно определить случайную границу стохастического симплекса. Стохастические симплексы можно складывать и вычитать. Это позволяет определить случайную ориентированную границу ∂ суммы или разности случайных симплексов. Ясно, что $\partial^2 = 0$; пусть $H_{*,st}(L_x(M))$ – стохастическая сингулярная гомологическая группа границы ∂ .

ТЕОРЕМА 3.2 [29]. *Группа $H_{*,st}(L_x(M))$ совпадает с пространством случайных величин на вероятностном пространстве Ω со значениями в дискретной группе $H_*(L_x(M))$.*

Чтобы доказать эту теорему, мы приближаем цикл на множестве полумартингалов в подходящей топологии случайным циклом на множестве петель конечной энергии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3 [29]. Стохастическая форма σ_{st} определяется следующим образом:

- а) всякому стохастическому пакету (U, Ω_i, φ_i) мы сопоставляем почти наверное на каждом Ω_i случайную гладкую форму $\sigma_U = \varphi^* \sigma_{st}$ на U ;
- б) если j – гладкое отображение из U^1 в U^2 , а $(U^2, \Omega_i, \varphi_i)$ – пакет, то мы можем рассмотреть композицию $(U^1, \Omega_i, \psi_i) = (U^1, \Omega_i, \varphi_i \circ j)$ такую, что почти наверное

$$\psi^* \sigma_{st} = j^* \varphi^* \sigma_{st}; \quad (3.2)$$

- с) если два пакета отличаются на случайное преобразование Ψ на некотором Ω_i , то конечномерные случайные формы отличаются на то же самое случайное преобразование Ψ .

Условие с) означает, что случайная форма σ_{st} не зависит от метода построения случайной петли; в некотором смысле, она зависит только от самой петли.

Путем взятия прообраза мы можем определить интеграл случайной стохастической формы σ_{st} по сумме или разности случайных симплексов Σ . Полученные таким образом интегралы совпадают с традиционными конечномерными случайными интегралами.

Мы получили случайную величину $\int_{\Sigma} \sigma_{st}$. Теперь внешний стохастический дифференциал определяется тривиальным образом: для стохастического пакета достаточно положить $\varphi^*(d\sigma_{st}) = d(\varphi^*\sigma_{st})$. Замкнутая $\mathbb{Z}$ -значная стохастическая форма – это замкнутая форма такая, что $\int_{\Sigma} \sigma_{st}$ принадлежит $\mathbb{Z}$ почти наверное, если случайная граница $\partial\Sigma$ пуста. Например, форма трансгрессии

$$\tau(\omega) = \int_0^1 \omega(d\gamma_s, \cdot, \cdot),$$

где ω – представитель элемента группы $H^3(M; \mathbb{Z})$, является $\mathbb{Z}$ -значной замкнутой формой [31].

Если Ω представляет собой $L_x(M)$ с мерой броуновского моста, то мы можем найти одномерный стохастический пакет (стохастическую кривую), соединяющий постоянную петлю x с γ . В результате мы приходим к следующему определению. Предположим, что $\Pi_1(M) = \Pi_2(M) = 0$, $H_{1,st}(L_x(M)) = 0$ и любая стохастическая петля в пространстве петель является границей случайной поверхности, т.е. суммой или разностью двумерных стохастических симплексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4 [29]. Измеримое сечение линейного расслоения, ассоциированного с замкнутой $\mathbb{Z}$ -значной стохастической 2-формой σ_{st} , определяется следующим образом:

- выберем случайную кривую, соединяющую x с γ . (обозначим ее через $l(\gamma)$);
- возьмем случайную величину $\alpha(\gamma)$ со значениями в $\mathbb{C}$.

Пара $(l(\gamma), \alpha(\gamma))$ называется *измеримым сечением*.

Мы отождествляем два сечения $(l^1(\gamma), \alpha^1(\gamma))$ и $(l^2(\gamma), \alpha^2(\gamma))$, если почти наверное

$$\alpha^2(\gamma) = \exp \left[-2i\pi \int_{\Sigma} \sigma_{st} \right] \alpha^1(\gamma), \quad (3.3)$$

где Σ – случайная поверхность, граница которой состоит из стохастической кривой $l^1(\gamma)$ и стохастической кривой, обратной к $l^2(\gamma)$. У этой стохастической кривой нет границы; по теореме 3.2 она сама является границей двумерной стохастической кривой, т.е. суммой или разностью двумерных стохастических симплексов. Поскольку экспонента в (3.3) по модулю равна 1, мы можем определять гильбертовы пространства сечений линейного расслоения, ассоциированного с σ_{st} . Эта процедура является глобальной и не использует переходных функций, в отличие от процедуры, предложенной в [32] в применении к форме трансгрессии.

Мы можем определить стохастическую диффеологию на расслоении реперов для пространства петель так же, как в п. 2. Это пространство петель в расслоении реперов $SO(M)$ над M ; они имеют вид $\tau_t e_t$, где e_t имеет конечную энергию и τ_t – стохастический параллельный перенос вдоль случайной петли в M . Можно показать, что форма Каре–Мюррея является стохастической $\mathbb{Z}$ -значной замкнутой 2-формой на $L_e(Q)$ относительно этой стохастической диффеологии, если первый класс Понтрягина расслоения Q нулевой [29]. Более подробное изложение теории струнных структур на пространстве петель содержится в [32]–[39].

Для определения стохастической диффеологии можно использовать не общие полумартингалы, а стохастические интегралы (см. [40], [41]). Положим

$$\varphi_i(u)_t = x + \int_0^t A_s(u) \delta B_s + \int_0^t C_s(u) ds, \quad (3.4)$$

где δB_s – интеграл Ито, B_t – броуновское движение на $\mathbb{R}^{d_1}$, а $A_s(u)$ и $B_s(u)$ – предсказуемые процессы, которые некоторым удобным для нас образом зависят от параметра u из открытого подмножества U в $\mathbb{R}^m$; напомним, что броуновское движение на M – это решение в смысле Стратоновича стохастического дифференциального уравнения

$$d\gamma_t = \Pi(\gamma_t) dB_t, \quad (3.5)$$

где $\Pi(x)$ – ортогональное проектирование из $\mathbb{R}^{d_1}$ на касательное пространство к M в точке x (предполагается, что M изометрично вложено в $\mathbb{R}^{d_1}$). Таким образом, броуновский мост на многообразии имеет вид (3.4). Мы не указываем в явном виде топологии на $\varphi_i(u)$; наше единственное требование состоит в том, чтобы путь $\varphi_i(u)$ имел реализацию, гладкую по u относительно сильной гёльдеровской топологии. Для $\eta < 1/2$ гёльдеровость означает, что

$$\sup_{s,t} \frac{d(\gamma_s, \gamma_t)}{d^1(s, t)^\eta} < \infty, \quad (3.6)$$

а сильная гёльдеровость –

$$\frac{d(\gamma_s, \gamma_t)}{d^1(s, t)^\eta} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

равномерно по $t \rightarrow s$; здесь d и d^1 – римановы метрики на многообразии и окружности соответственно. Рассмотрим пространство петель $L_{x,\eta,*}(M)$ с сильной гёльдеровской топологией. Оно является многообразием. Напомним (см. [43], [42]), что на $L_{x,\eta,*}(M)$ определены разбиения единицы. Это позволяет воспользоваться аппаратом пучков [44].

Напомним, что пучок задается семейством векторных пространств, заиндексированным при помощи открытого подмножества O топологического пространства. Эти векторные пространства называются *пространствами сечений* над O . Кроме того, для пучка определены отображения сужения, согласованные между собой при помощи некоторых простых соотношений. Более того, требуется, чтобы локальные сечения, удовлетворяющие определенным соотношениям согласованности, определяли глобальное сечение над O .

В данной ситуации мы определяем пучок, рассматривая стохастические формы относительно нашей диффеологии на окрестности O в $L_{x,\eta,*}(M)$, для чего, в свою очередь, мы изучаем формы $\varphi^* \sigma_{st}$ на прообразе $\varphi^{-1}O$, который представляет собой случайную

форму на случайном открытом подмножестве множества U для стохастического пакета (U, Ω_i, φ_i) . Мы можем определить ассоциированные стохастические группы когомологий $H_{st}^*(O)$.

Имеет место следующая лемма Пуанкаре.

ЛЕММА 3.5 [41]. *Существует база, состоящая из стягиваемых открытых подмножеств O пространства $L_{x,\eta,*}(M)$ таких, что $H_{st}^k(O) = 0$, если $k > 0$, и $H_{st}^0(O) = \mathbb{R}$.*

Чтобы показать, что это так, мы должны рассмотреть ретракцию открытого множества O , доказать, что она совместима с системой стохастических плашек и применить формулу Картана, выражающую производную Ли вдоль векторного поля формы через внешнюю производную этой формы и внутреннее произведение формы на векторное поле над конечномерными формами $\varphi^* \sigma_{st}$.

При наличии разбиения единицы и леммы Пуанкаре мы можем применить машинерию когомологий пучков [44] и доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.6 [41]. *Стохастические когомологии пространства $L_x(M)$ относительно рассматриваемой диффеологии совпадают с детерминированными когомологиями пространства петель $L_{x,\eta,*}(M)$ с сильно гёльдеровой топологией.*

На самом деле, для обоих пространств когомологии совпадают с группами когомологий постоянного пучка на $L_{x,\eta,*}(M)$.

В [40] предлагается другое доказательство аналогичного результата для гёльдерова пространства петель $L_{x,\eta}(M)$; на этом пространстве может быть построено подчиненное некоторому специальному покрытию разбиение единицы без использования общей теории. Мы применяем предложенное в [45] рассуждение, связанное со спектральными последовательностями, чтобы сравнить когомологии Чеха, ассоциированные с этим специальным покрытием, и стохастические когомологии де Рама пространства петель. Таким путем можно показать, что детерминированные когомологии де Рама пространства $L_{x,\eta}(M)$ совпадают со стохастическими когомологиями на пространстве закрепленных петель. В качестве открытых подмножеств мы выбираем шары $B(\gamma_i, \delta)$ радиуса δ , центрами которых являются гладкие петли γ_i , в равномерной топологии. Если γ принадлежит такому шару, то мы можем применить ретракцию этого шара на одноточечное множество $\{\gamma_i\}$:

$$F(t, \gamma)_s = \exp_{\gamma_{i,s}}[t(\gamma_s - \gamma_{i,s})], \quad (3.8)$$

где $\gamma_s - \gamma_{i,s}$ — вектор единственной геодезической, соединяющей $\gamma_{i,s}$ с γ_s , а $\exp$ — риманова экспонента с началом в $\gamma_{i,s}$. Эта ретракция является гладкой в гёльдеровой топологии (см. [40]).

Специальный вид ретракции (3.8) показывает, что если мы рассмотрим пространство свободных петель Ω с инвариантной относительно вращения вероятностной мерой $Cp_1(x, x) dx \otimes dP_{1,x}$ (в этом пространстве нет никакой разумной фильтрации), то в качестве пакета мы можем взять отображение $\varphi_i(u)_t = F_i(u, t, \gamma_t)$, где F_i — гладкое отображение из $U \times S^1 \times M$. Можно показать, что стохастические когомологии относительно этой очень бедной диффеологии совпадают с детерминированными группами когомологий пространства свободных петель в гёльдеровой топологии.

В качестве следствия мы получаем, что для этих двух последних диффеологий стохастическая $\mathbb{Z}$ -значная замкнутая 2-форма когомологична настоящей форме на гильдеровом пространстве (свободных) петель. Предположим, что $\Pi_1(M) = \Pi_2(M) = 0$. Мы видим, что линейное расслоение над пространством петель, ассоциированное с этой случайной формой и имеющее почти наверное определенный слой, изоморфно настоящему расслоению над гильдеровым пространством петель [40].

Сложнее вычислить стохастические группы когомологий на пространстве закрепленных петель при использовании богатой диффеологии всех непрерывных полумартингалов, поскольку на пространстве непрерывных петель нет разбиения единицы. Этой проблеме посвящена работа [72]. Идея состоит в сравнении стохастических когомологий с когомологиями Хохшильда, как это было сделано в п. 2; вместо ряда (2.12) следует рассмотреть конечную сумму элементов $\tilde{\omega}_n$.

4. Разложение де Рама–Ходжа–Кодаиры. Основная трудность при вычислении формы, сопряженной к внешнему дифференцированию на пространстве закрепленных путей (или на более сложном пространстве), состоит в том, что формула (2.8) содержит скобку Ли, тогда как касательное пространство к пространству петель незамкнуто относительно скобки Ли. В частности, на пространстве путей нет связности Леви–Чивиты. Эта трудность частично преодолена в [46] для пространства закрепленных путей.

В работе [46] рассматривается градиентное уравнение (3.5), которое задает броуновское движение на многообразии. С его помощью получается отображение из пространства путей, определенных на $\mathbb{R}^{d_1}$, в $P_x(M)$; обозначим его через I . Производная TI отображает пространство Камерона–Мартина плоского броуновского движения в геометрический касательный вектор пути γ , который является непрерывным сечением расслоения $\gamma^*T(M)$ над $[0, 1]$ — прообраза касательного расслоения $T(M)$ при отображении $\gamma: s \rightarrow \gamma_s$. Рассмотрим такое сечение v_t . Оно удовлетворяет уравнению

$$Dv_t = \nabla_{v_t} \Pi(\gamma_t) dB_t + \Pi(\gamma_t) \frac{d}{dt} h_t dt, \quad (4.1)$$

где h — детерминированный путь, принадлежащий пространству Камерона–Мартина главного плоского броуновского движения, и D — ковариантная производная вдоль пути для связности Леви–Чивиты.

Это избыточные шумы. Пусть F — σ -алгебра, порожденная решением γ уравнения (3.5). Положим $\bar{v}_t = \overline{TI(h)}_t = E[v_t | F]$. В работе [47] показано, что $\bar{v}_t$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{D}{dt} \bar{v}_t = -\frac{1}{2} \text{Ric}_{\bar{v}_t} + \Pi(\gamma_t) \frac{d}{dt} h. \quad (4.2)$$

Мы получаем то же касательное пространство, что и в п. 2 (см. [22]), но с другой гильбертовой структурой (описание этой гильбертовой структуры можно найти в [46]). С помощью TI мы строим отображение, определенное на $\Lambda^2(H)$; оно переводит внешнюю кососимметрическую тензорную вторую степень пространства Камерона–Мартина H в кососимметрическую тензорную степень геометрического касательного пространства пути γ с некоторой удобной топологией. В [46] это отображение обозначается через $\Lambda^2(TI)$. Если $\underline{h}$ принадлежит пространству $\Lambda^2(H)$, то [46]

$$\overline{\Lambda^2(TI)(\underline{h})} = E[\Lambda^2(TI)(\underline{h}) | F]. \quad (4.3)$$

В [46] даются геометрическая и внутренняя характеристики пространства, полученного с помощью такой процедуры; при этом важную роль играет поток Риччи и тензор кривизны. В [46] пространство, полученное для пути γ , обозначено через H_{γ}^2 . Это пространство не совпадает с кососимметрической тензорной степенью касательного гильбертова пространства, полученного при помощи (4.2). Пространство L^2 -2-форм – это пространство сечений H_{γ}^2 , лежащих в L^2 .

Внешнее дифференцирование переводит цилиндрическую 1-форму в 2-форму в этом смысле, т.е. в L^2 -2-форму.

ТЕОРЕМА 4.1 [46]. *Внешнее дифференцирование, действующее на 1-формы и определенное для цилиндрических форм, имеет замыкание.*

Эта теорема доказывается интегрированием по частям формул на плоском винеровском пространстве.

Обозначим замыкание d через $\bar{d}$. В [46] вычисляются сопряженная форма $\bar{d}^*$ и оператор

$$\Delta^1 = \bar{d}\bar{d}^* + \bar{d}^*\bar{d}, \quad (4.4)$$

действующий на L^2 -1-формах. Более того, в [46] сформулирована следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2 [46]. *Пространство L^2 -1-форм на пространстве закрепленных петель с мерой броуновского движения совпадает с прямой суммой ядра оператора Δ^1 , образа формы $\bar{d}$ и образа формы, сопряженной к $\bar{d}$.*

Теорема 4.2 дает разложение де Рама–Ходжа–Кодаиры для пространства L^2 -1-форм. Трудности, связанные с незамкнутостью касательного пространства относительно скобки Ли, преодолеваются ценой неестественности пространства 2-форм. Для плоского абстрактного винеровского пространства это разложение было найдено Шикегавой [73] (см. также [48]); в этом случае касательное гильбертово пространство не меняется и, следовательно, замкнуто относительно скобки Ли. Оно является пространством Кемпмана–Мартина.

При рассмотрении компактной группы Ли в [49] не возникает проблем с построением формы, сопряженной к внешнему дифференцированию, потому что касательное пространство, требуемое для получения формул интегрирования по частям, замкнуто относительно скобки Ли. Основные сведения, используемые в анализе на группе петель, содержатся в [50]. В [49] рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$dg_s = dB_s g_s, \quad (4.5)$$

где $g_0 = e$ и B_s – плоское броуновское движение в алгебре Ли группы G . В качестве векторных полей авторы [49] рассматривают векторы типа $g_s k_s = X_s$, где k_s – путь конечной энергии в алгебре Ли группы G такой, что $k_0 = 0$. Рассмотрим гильбертову структуру

$$\int \left\| \frac{d}{dt} k_t \right\|^2 dt = \|X(k)\|_g^2. \quad (4.6)$$

Эта система векторных полей замкнута относительно скобки Ли в том смысле, что если h и k детерминированы, то

$$[X(h), X(k)] = X([h, k]). \quad (4.7)$$

Это свойство является основным отличием между анализом на группе петель и анализом на общем пространстве путей компактного многообразия. Таким образом, на группе закрепленных путей $P_e(G)$ имеется связность Леви–Чивиты. Она задается формулой (см. [49])

$$\nabla_{X(k)}X(h) = X\left(\int_0^{\cdot}\left[k, \frac{d}{dt}h\right]dt\right). \quad (4.8)$$

Более того, в [49] рассматривается отображение Ито, которое преобразует путь B в путь g так, что выполняется условие (4.5): оно переводит векторное поле в векторное поле, а тривиальную связность на винеровском пространстве в связность (4.8). При этом отображении форма на плоском винеровском пространстве (т.е. элемент суперсимметрического пространства Фока) преобразуется в форму на группе путей. Мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3 [49]. *Если σ – форма на $P_e(G)$, то*

$$I^*(d\sigma) = d(I^*\sigma), \quad (4.9)$$

$$I^*(d^*\sigma) = d^*(I^*\sigma). \quad (4.10)$$

В частности, эта теорема дает формулы интегрирования по частям для $X(h)$ с детерминированным h , а именно:

$$E[\langle dF, X(h) \rangle] = E[F \operatorname{div} X(h)]. \quad (4.11)$$

Это позволяет вычислить оператор $dd^* + d^*d$ на группе закрепленных путей, который представляет собой перенос оператора Шикегавы [47] при помощи I . Напомним, что для плоского винеровского пространства

$$dd^* + d^*d = \Delta + N, \quad (4.12)$$

где Δ – плоский оператор Орнштейна–Уленбека (или оператор числа бозонов) и N – оператор числа фермионов. Поскольку для формы степени большей 1 оператор, определенный формулой (4.12), имеет нулевое ядро, мы получаем следующую теорему с помощью переноса на группе закрепленных путей.

ТЕОРЕМА 4.4 [49]. *L^2 -форма σ степени большей 1 на группе закрепленных путей имеет единственное разложение $d\sigma_1 + d^*\sigma_2$.*

Эта теорема обобщает (с помощью изоморфизма I) разложение де Рама–Ходжа–Кодаиры, предложенное в [73] для форм на винеровском пространстве, на суперсимметрическое пространство Фока.

В применении к группе петель это означает, что для решения задачи (4.5) с условием $g_1 = e$ касательное векторное пространство остается замкнутым относительно скобки Ли. Но мы рассматриваем векторные поля $X(h)$ с $h_1 = h_2 = 0$ и с той же гильбертовой структурой. Это позволило авторам [51] вычислить d, d^* и лапласиан $dd^* + d^*d$ на группе закрепленных петель. Они рассмотрели уравнение

$$dg_s = g_s dB_s \quad (4.13)$$

с условием возврата в исходную точку с тем же касательным пространством. Затем они рассмотрели связность Леви–Чивиты ∇ на группе закрепленных петель, вычислили $dd^* + d^*d$ и показали, что на группе петель верна формула Вайценбёка.

ЗАМЕЧАНИЕ. В бесконечномерном анализе существуют три важных оператора: лапласиан Гросса, оператор Орнштейна–Уленбека и лапласиан Леви для броуновского движения на римановом многообразии. Авторы [52] показали, что связность удовлетворяет уравнению Янга–Миллса и что только параллельный перенос является нулем для стохастического лапласиана Леви в неплоском случае. В статье [52] обобщены результаты [53], справедливые для детерминированного плоского случая.

5. Факторпространства группы петель и род Виттена. Теоремы об индексе на пространствах петель – очень популярная тема в теоретической физике (см. [9], [54]–[57]). В работах [58] и [5] содержатся первые математические формулировки некоторых утверждений такого сорта. В этих двух работах на плоском пространстве петель рассматривается используемая физиками мера, которая задается на случайном распределении.

Существуют трудности с определением распределения со значениями в многообразии. Плоская мера броуновского моста может быть изогнута с помощью методов стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений. Этот подход используется в [59], [60] и [19]. В частности, в работе [59] сделаны первые шаги к построению оператора Дирака–Рамона–Таубеса над пространством свободных петель. В статье [59] рассматривается обобщение разложения Фурье на пространство свободных петель. Эта задача не так проста, поскольку на петле имеется голономия, отличная от Id . В [59] выполняется соответствующее построение для “малых” петель, для которых голономия близка к тождественной. При рассмотрении касательного пространства группы петель (см. п. 4) мы не сталкиваемся с этой проблемой: $g_1 = g_0$, но род Виттена (эквивариантный индекс оператора Дирака–Рамона над пространством свободных петель) тривиален, поскольку комплексифицированное касательное расслоение группы Ли тривиально. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть факторпространство группы петель LG по конечномерной подгруппе H группы G ; оно, очевидно, наследует действие окружности из LG . Это позволяет сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА (Бисмут). *На $(LG)/H$ существует эквивариантный оператор Дирака, и его “ренормализованный” эквивариантный индекс совпадает с родом Виттена $W_i(G/H)$ группы G/H .*

Что такое род Виттена спинорного многообразия, мы объясним ниже, а сейчас мы поясним термин “ренормализованный индекс”, использованный в сформулированной выше гипотезе. Если H является тором, то верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1 [61]. *Множеством неподвижных точек естественного действия окружности на $(LG)/H$ является $G/H \times L$, где L – каноническая решетка элементов в алгебре Ли группы H , для которых $\exp[e] = 1$.*

Предположение о том, что H является тором, используется только в одном месте доказательства. Следующие рассуждения справедливы для любой замкнутой подгруппы Ли H компактной группы Ли G ; например, они верны для случая, когда G/H является четномерной сферой.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение в группе Ли G :

$$dg_s = g_s dB_s, \quad (5.1)$$

где $g_0 = g$ и B_s – броуновское движение в G . Пусть $d\pi(g)$ – мера Лебега на G и $dP_1(g)$ – закон распределения решения (5.1) с условием возвращения в g . Рассмотрим меру

$$d\mu_G = d\pi(g) \otimes dP_1(g); \quad (5.2)$$

она инвариантна относительно вращения в силу симметрий плотности $p_t(g, g')$ закона распределения решения уравнения (5.1). В частности, $p_1(g, g) = p_1(e, e)$. В качестве касательного пространства петли рассмотрим векторы вида $X_s = K_s g_s$, где K_s имеют конечные энергии в $\text{Lie}(G)$, с гильбертовой структурой

$$\|X\|_g^2 = \int_0^1 \|K_s\|^2 ds + \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} K_s \right\|^2 ds, \quad (5.3)$$

инвариантной относительно естественного действия окружности на группе свободных петель. Если K_s детерминированы, то эти векторные поля инвариантны относительно действия группы H вида $g \rightarrow g \cdot h$; гильбертова структура также является инвариантной относительно этого H -действия.

Комплексифицированное касательное расслоение группы петель $T_g \otimes \mathbb{C}$ наделяется поляризацией

$$X_n(e_i)_s = \frac{\exp[2i\pi n s] e_i}{\sqrt{Cn^2 + 1}} g_s, \quad (5.4)$$

где e_i – вещественный ортонормированный базис $\text{Lie } G$. Таким образом, $T_g \otimes \mathbb{C}$ распадается в прямую сумму $H_- + E + H_+$. Рассмотрим элемент окружности $q = \exp[2i\pi t]$. Действие q на группе петель имеет вид $g \rightarrow g \cdot_t$. В дальнейшем мы предполагаем, что e_i детерминированы. Действие окружности поднимается на касательное расслоение группы петель, и относительно этого действия окружности $X_n(e_i)$, рассматриваемые как векторные поля, ведут себя как q^{-n} ; будучи же рассмотрены как формы (см. ниже), они ведут себя как q^n .

Проблема состоит в том, что E распадается не на два слагаемых. Мы могли бы, следуя [5] или [59], использовать спинорное расслоение V над G/H , учитывая спин и игнорируя вклад E ; однако продолжение расслоения p^*V (p обозначает каноническую проекцию из G на G/H) на пространство свободных петель требует сложных рассуждений. Проще продолжить 2-форму с G на пространство свободных петель. Это можно сделать с использованием рассуждений из [62]. Для кэлеровых многообразий конечномерный оператор Дирака совпадает с оператором $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$, связанным с подходящим комплексным линейным расслоением. Комплексное линейное расслоение можно сравнительно просто определить с помощью рассуждений из п. 2. Для этого нам нужны дополнительные предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. Пространство G/H является кэлеровым и спинорным. Кэлерова структура инвариантна относительно естественного действия G на G/H . Кроме того, группа G односвязна.

В этих предположениях мы можем разложить E в сумму $E_- + E_0 + E_+$; E_0 соответствует векторным полям вида $X_0(e_i)$, где e_i принадлежат алгебре Ли группы H , а E_- соответствует некоторым векторным полям вида $X_0(\partial/\partial \bar{z})$, где $(\partial/\partial \bar{z})$ соответствует $T^{0,1}$ -векторам на G/H (мы присоединили ортогональное дополнение алгебры Ли группы H в алгебре Ли группы G к касательному расслоению пространства G/H). Нас интересует оператор на LG/H . В LG справедливы формулы интегрирования по частям (см.

п. 4) для рассматриваемых векторных полей и H действует на LG изометриями. Оператор на LG/H можно рассматривать как H -инвариантный оператор на LG , который действует на H -инвариантных сечениях расслоения, на которое поднимается действие группы H на пространстве LG .

С помощью таких рассуждений мы должны получить оператор $\bar{\partial}$ на LG/H . Нам нужно построить вспомогательное линейное расслоение над LG . Рассмотрим каноническое расслоение $\Lambda^{n,0}$ над G/H ; его кривизна $2R$ принимает значения в $4i\pi\mathbb{Z}$, поскольку пространство G/H спинорно. Так как форма кривизны принимает значения в $4i\pi\mathbb{Z}$, из $\Lambda^{n,0}$ можно извлечь квадратный корень, т.е. существует ξ такое, что

$$\xi \otimes \xi = \Lambda^{n,0}. \quad (5.5)$$

Двойственное расслоение ξ' имеет кривизну $-R$. Рассмотрим на LG форму

$$\sigma = - \int_0^1 p^*(R)(g_s)(\cdot, \cdot) ds. \quad (5.6)$$

Эта форма принимает значения в $2i\pi\mathbb{Z}$ и определена на группе свободных петель. Так как группа G предполагается односвязной и, следовательно, группа петель LG тоже является односвязной, эта форма определяет комплексное линейное расслоение ξ_∞ над LG , продолжающее расслоение $p^*\xi'$ над G . Естественные действия окружности и группы H продолжаются на это расслоение ξ_∞ , так как форма σ инвариантна относительно действий окружности и группы H . Чтобы определить гладкое сечение расслоения ξ_∞ , мы должны предположить существование гладких функций с носителем в шаре конечного радиуса. Это возможно только в случае гёльдеровых пространств петель $L_\eta(G)$ (см. п. 2) с $\eta < 1/2$.

Рассмотрим над $L_\eta(G)$ расслоение

$$\Xi = \Lambda(H_-) \otimes \Lambda(E_-) \otimes \xi_\infty. \quad (5.7)$$

Пусть $\Lambda_H(\Xi)$ – плотное линейное подпространство H -инвариантных L^2 -сечений Ξ . На $\Lambda_H(\Xi)$ рассмотрим оператор

$$\bar{\partial}_\infty = \sum_{n>0,i} X_n(e_i) \wedge \nabla_{X_n(e_i)} + \sum_{\partial/\partial\bar{z}} X_0 \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \right) \wedge \nabla_{X_0(\partial/\partial\bar{z})}, \quad (5.8)$$

где ∇ является связностью, определяемой равенством $\nabla X_n(e_i) = 0$ и естественной H -инвариантной связностью в ξ_∞ ; во внешних произведениях мы отождествили векторные поля с формами. Можно вычислить сопряженный к $\bar{\partial}_\infty$ оператор; обозначим его через $\bar{\partial}_\infty^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2 [61]. Оператор $D_\infty = \bar{\partial}_\infty + \bar{\partial}_\infty^*$ называется *регуляризованным оператором Дирака–Рамона–Таубеса* над $L_\eta(G)/H$. Он действует на $\Lambda_H(\Xi)$ и является симметричным и инвариантным относительно действий окружности и H . Следовательно, этот оператор допускает замыкание.

Хотелось бы получить предельную модель в стиле Таубеса. Это возможно, и построить такую модель можно путем рассмотрения семейства плоских броуновских мостов в V_g – векторном расслоении, состоящем из векторов вида ge , где e принадлежит ортогональному дополнению алгебры Ли группы H в алгебре Ли группы G .

ТЕОРЕМА 5.3 [61]. *Существует плотное множество H -инвариантных сечений τ_{Ξ} расслоения Ξ и оператор B_{ε} , называемый дилатацией Бисмута, такие, что*

- а) $B_{\varepsilon}\tau_{\Xi} \rightarrow \tau_{\Xi_l}$ по распределению для данного сечения τ_{Ξ_l} предельной модели;
- б) $D_{\varepsilon, \infty}B_{\varepsilon}\tau_{\Xi} \rightarrow D_l\tau_{\Xi_l}$ по распределению.

Эта теорема оправдывает использование названия “предельный оператор” для оператора D_l .

На предельной модели определены действия группы H и окружности. Мы можем рассматривать эквивариантный индекс для H -инвариантных сечений на предельной модели. Обозначая действие элемента окружности q на предельной модели тем же символом q , мы имеем

$$\text{Ind}_q D_l = \text{Tr}_q \text{Ker } D_l^+ - \text{Tr}_q \text{Ker } D_l^-; \quad (5.9)$$

здесь рассматриваются H -инвариантные элементы ядер. Это означает, что векторные пространства в ядре, где q действует умножением на q^n , конечномерны. Через D_l^+ обозначен оператор, переводящий нечетные формы на предельном вероятностном пространстве в четные, а через D_l^- – его сопряженный.

Напомним, что такое род Виттена пространства G/H . Рассмотрим $\hat{A}$ -род $\hat{A}(G/H)$ пространства G/H (см. [62]). Пусть $S(T(G/H) \otimes \mathbb{C})$ – симметрическая тензорная алгебра пространства $T(G/H) \otimes \mathbb{C}$. Мы приписываем ей вес q^n , т.е. умножаем характер Чженя тензорного произведения длины m в симметрической тензорной алгебре на q^{nm} . Имеет место формула (см. [11])

$$\text{Wit}(G/H) = \int_{G/H} \hat{A}(G/H) \wedge \text{ch} \left(\bigotimes_{n>0} S_{q^n}(T(G/H) \otimes \mathbb{C}) \right). \quad (5.10)$$

ТЕОРЕМА 5.4 [61]. *Для H -инвариантных сечений предельной модели справедливо равенство*

$$\text{Ind}_q D_l = \text{Wit}(G/H). \quad (5.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С помощью этой стохастической процедуры мы можем получить стохастический способ доказательства теоремы Виттена о жесткости [63], [5].

6. Двумерные аспекты. В некоторых пространствах петель имеется теория диффузии [64], [65], [60], основанная на формах Дирихле и порожденная самосопряженным оператором на пространстве петель. Существование такой теории сильно зависит от существования меры на пространстве петель. В случае плоских пространств ее построение связано с оператором Орнштейна–Уленбека на винеровском пространстве. На винеровском пространстве имеется и другой процесс, называемый броуновским листом и порождаемый лапласианом Гросса.

Начнем с группы петель. В работе [66] вводится компактная связная группа Ли и ее алгебра Ли; используя одну идею Эро и Маллиавена [50], авторы [66] строят броуновское движение на группе непрерывных закрепленных петель $L_e(G)$ группы G с равномерной топологией. А именно, они рассматривают пространство непрерывных петель на алгебре Ли группы G , начинающихся и кончающихся в нуле ($t \rightarrow h_t$; $h_0 = h_1 = 0$) и

вводят подпространство Камерона–Мартина H_0 , состоящее из петель h конечной энергии, т.е. таких, что

$$\int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} h_t \right\|^2 dt < \infty. \quad (6.1)$$

Затем они рассматривают броуновское движение $s \rightarrow B_{s,\cdot}$ в пространстве непрерывных закрепленных петель в алгебре Ли группы G . Это броуновское движение представляет собой гауссов процесс, параметризованный с помощью цилиндра $[0, 1] \times S^1$, который характеризуется равенством

$$E[\langle a, B_{s_1, t_1} \rangle \langle b, B_{s_2, t_2} \rangle] = \langle a, b \rangle s_1 \wedge s_2 (t_1 \wedge t_2 - t_1 t_2). \quad (6.2)$$

Далее в [66] рассматривается дифференциальное уравнение

$$d_s g_{s,t} = g_{s,t} d_s B_{s,t}, \quad (6.3)$$

где $g_{0,t} = e$. Как процесс из $[0, 1] \times S^1$, оно имеет почти наверное непрерывную относительно (s, t) реализацию. Таким образом строятся случайные цилиндры особого вида на группе G . После этого в [66] вводится малый параметр ε и рассматривается закон распределения для $g_{s,\cdot}^\varepsilon = g_{\varepsilon s,\cdot}$.

Далее рассматривается пространство Y непрерывных путей в $L_e(G)$ с равномерной топологией. Для всякого такого пути $x_{\cdot,\cdot}$ с началом в e мы пишем

$$\|x_{\cdot,\cdot}\|^2 = \int_0^1 \|h_{s,\cdot}\|^2 ds = I(x_{\cdot,\cdot}), \quad (6.4)$$

если

$$d_s x_{s,t} = x_{s,t} h_{s,t} ds, \quad (6.5)$$

где

$$\|h_{s,\cdot}\|^2 = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} h_{s,t} \right\|^2 dt;$$

в противном случае мы полагаем $I(x_{\cdot,\cdot}) = \infty$. Пространство Y наделяется равномерной топологией. Закон распределения для $g_{\cdot,\cdot}^\varepsilon$ обозначается как dP_ε .

ТЕОРЕМА 6.1 [66]. Вероятности P_ε удовлетворяют принципу больших уклонений с коэффициентом I :

i) для любого открытого подмножества O пространства Y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(O) \geq - \inf_{x_{\cdot,\cdot} \in O} I(x_{\cdot,\cdot}); \quad (6.6)$$

ii) для любого замкнутого подмножества F пространства Y

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(F) \leq - \inf_{x_{\cdot,\cdot} \in F} I(x_{\cdot,\cdot}). \quad (6.7)$$

Этот результат можно сравнить с формальной вероятностной мерой на отображениях ψ из римановой поверхности Σ в риманово многообразие M , определенной формулой

$$Z^{-1} \exp[-I(\psi)] d^n D^n(\psi), \quad (6.8)$$

где $d^n D^n(\psi)$ – формальная мера Лебега на множестве гладких отображений ψ , а $I(\psi)$ – энергия такого отображения. Напомним, что эта формальная мера играет важную роль в конформной теории поля [12].

В случае группы G имеется другая модель, называемая *моделью Весса–Думино–Новикова–Виттена*, в которой используется формальная мера

$$Z^{-1} \exp \left[-I(\psi) + ik \int_V \omega \right] d^n D^n(\psi), \quad (6.9)$$

где V – объем с границей ψ в G и ω – каноническая 3-форма на G (в алгебре Ли группы G она равна $C\langle X, [Y, Z] \rangle$, и если группа G проста, она может быть нормализована таким образом, что она будет принимать значения в $2i\pi\mathbb{Z}$ и мера (6.9) не будет зависеть от выбора объема для целых k). В работе [67] вводится линейное расслоение над пространством свободных петель с целью понять топологическое действие интеграла $\int_V \omega$. В статье [68] предлагается стохастический подход к поднятию диффузных процессов на пространстве свободных петель этого линейного расслоения для случайных цилиндров; в формуле (6.9) при этом изменяется только энергетическое слагаемое $I(\psi)$. Для того чтобы описать броуновское движение на пространстве петель многообразия, авторы этой статьи рассматривают семейство стохастических дифференциальных уравнений

$$d_s \gamma_{s,t} = \Pi(\gamma_{s,t}) d_s B_{s,t} \quad (6.10)$$

(обозначения здесь такие же, как в (3.5)). Таким образом, получается семейство броуновских движений на M . В [68] предполагается, что $s \rightarrow B_{s,\cdot}$ является броуновским движением на пространстве $W^{\theta,p}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$, состоящем из функций h таких, что

$$\|h\|_{\theta,p}^p = \int_{S^1} |h_y|^p dt + \int_{S^1} \left| \frac{d}{dt} h_t \right|^p dt + \iint \frac{|(d/dt)h_{t_1} - (d/dt)h_{t_2}|^p}{d(t_1, t_2)^{1+(\theta-1)p}} dt_1 dt_2 < \infty, \quad (6.11)$$

где $1 + 1/p < \theta < 1 + 1/2$. Броуновское движение $B_{\cdot,\cdot}$ имеет в качестве ядра гильбертово пространство $H^{2,2}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$. Это соболевская структура, аналогичная (6.1), но здесь мы имеем дело с пространством свободных, а не закрепленных петель и с двумя, а не с одной производными. Можно определить ковариацию этого плоского бесконечномерного броуновского движения по аналогии с (6.2), но на этот раз броуновское движение происходит на множестве непрерывно дифференцируемых петель, чьи первые производные имеют некоторую степень непрерывности. Решение уравнения (6.10) можно рассматривать как уравнение диффузии на бесконечномерном многообразии $W^{\theta,p}(S^1; M)$ дифференцируемых петель с некоторым условием на непрерывность производных. В работе [68] с помощью теории диффузии Бржежняка–Элворси на бесконечномерных многообразиях [69] показано, что (6.10) может быть записано в виде уравнения

$$d\gamma_{s,\cdot} = \Pi(\gamma_{s,\cdot}) dB_{s,\cdot}, \quad (6.12)$$

где $\gamma_{0,.} = \gamma$ в $W^{\theta,p}(S^1; M)$.

Линейное расслоение Фельдера–Гаведжкого–Купийайнена [67] задается системой функций перехода в системе карт, сильно отличающейся от той системы карт, которая использовалась ранее для определения линейного расслоения на пространстве петель. Эти функции перехода определяются элементом второй степени группы когомологий Делиня многообразия M . Поднятие диффузии из [68] на линейное расслоение Фельдера–Гаведжкого–Купийайнена приводит к двум параметрическим интегралам; при этом время распространения по петле является случайным.

В работе [70], также как и в [69], вместо C^1 -петель рассматриваются непрерывные петли. В [70] рассматриваются соболевские пространства $W^{\theta,p}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$, где $1/p < \theta < 1/2$. Главное броуновское движение принимает значения в $W^{\theta,p}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$ и имеет в качестве воспроизводящего ядра гильбертово пространство $H^{1,2}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$. Уравнение (6.12) все еще имеет смысл в $W^{\theta,p}(S^1; M)$, но на петле в данном случае накладываются более слабые условия регулярности (они предполагаются непрерывными в гёльдеровской топологии и не предполагаются дифференцируемыми). Нормы (6.13) или (6.11) удобнее, чем гёльдерова норма (которая, по-видимому, более естественна), поскольку они записываются в виде интегралов, а не супремума, который является очень сложным понятием с точки зрения дифференцируемости.

ТЕОРЕМА 6.2 [70]. Пусть $t_1 < t_2$. Наложим на $\gamma_{s,.}$ условие $\gamma_{1,t_1} = \gamma_{1,t_2}$. Получившийся случайный процесс, параметризованный с помощью пространства $[0, 1] \times S^1$, является гёльдеровым по двум параметрам. Более того,

$$E[\|\gamma_{s,.}\|_{\theta,p}^p \mid \gamma_{1,t_1} = \gamma_{1,t_2}] < \infty. \quad (6.13)$$

Доказательство этой теоремы опирается на анализ “квази-наверное” [25], поскольку производится разделение по конечномерному условию $\gamma_{1,t_1} = \gamma_{1,t_2}$. При этом ограничении петля $t \rightarrow \gamma_{1,t}$ распадается на две петли, также лежащие в $W^{\theta,p}(S^1; M)$ (относительно параметризации с измененным масштабом). Мы вводим два независимых броуновских движения на $W^{\theta,p}(S^1; \mathbb{R}^{d_1})$, не зависящих от первоначального броуновского движения. Исходная петля γ в $W^{\theta,p}(S^1; M)$ дает две случайные петли. Для этих двух случайных петель мы повторяем предыдущую процедуру; масштаб времени изменяется. Через единицу времени мы получаем два дифференциальных уравнения (6.12) и процесс $(\gamma_{1+s,.}^1(\gamma), \gamma_{1+s,.}^2(\gamma))$ со значениями в $W^{\theta,p}(S^1; M) \times W^{\theta,p}(S^1; M)$. Это аналог марковского процесса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3 [70]. Пара множеств $s \rightarrow \gamma_{s,.}(\gamma)$, где $\gamma_{1,t_1}(\gamma) = \gamma_{1,t_2}(\gamma)$, и $s \rightarrow (\gamma_{1+s,.}^1(\gamma), \gamma_{1+s,.}^2(\gamma))$ называется *случайной парой* над M .

Входной границей этой пары является петля γ , а выходной – пара петель $t \rightarrow (\gamma_{2,t}^1(\gamma), \gamma_{2,t}^2(\gamma))$.

Пусть E_c – множество ограниченных непрерывных отображений из $W^{\theta,p}(S^1; M)$ в $\mathbb{R}$. По определению $E_c \otimes E_c$ состоит из множества непрерывных отображений из произведения $W^{\theta,p}(S^1; M)$ на себя в $\mathbb{R}$.

Следующая теорема представляет собой аналог одной из аксиом Сегала конформной теории поля; гильбертово пространство этой теории заменяется на банахово пространство E_c [12].

ТЕОРЕМА 6.4 [70]. *Отображение T , действующее на элементы F пространства $E_c \otimes E_c$ по формуле*

$$TF: \gamma \rightarrow E[F(\gamma_{2,\cdot}^1(\gamma), \gamma_{2,\cdot}^2(\gamma))], \quad (6.14)$$

является непрерывным отображением из $E_c \otimes E_c$ в E_c при отсутствии особых точек ("cut-locus").

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bismut J. M. Large Deviations and the Malliavin Calculus. Progress in Math. V. 45: Birkhäuser, 1984.
- [2] Jones J. D. S., Léandre R. L^p Chen forms on loop spaces // Stochastic Analysis / ed. M. Barlow, N. Bingham: Cambridge Univ. Press, 1991. P. 104–162.
- [3] Berline N., Vergne M. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes // Duke Math. J. 1983. V. 50. P. 539–548.
- [4] Duistermaat J. J., Heckman G. J. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space // Invent. Math. 1982. V. 69. №2. P. 259–268.
- [5] Taubes C. S^1 actions and elliptic genera // Comm. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 455–526.
- [6] Atiyah M. Circular symmetry and stationary phase approximation. Conference in honour of L. Schwartz // Astérisque. 1985. V. 131. P. 43–59.
- [7] Bismut J. M. Index theorem and equivariant cohomology of the loop space // Comm. Math. Phys. 1985. V. 98. P. 213–237.
- [8] Szabo R. Equivariant Cohomology and Localization of Path Integrals in Physics. Lect. Notes in Physics. V. 63, 2000.
- [9] Witten E. The index of the Dirac operator in loop space // Elliptic curves and modular forms in algebraic topology / ed. P. S. Landweber. Lecture Notes in Math. V. 1326: Springer, 1988. P. 161–181.
- [10] Segal G. Elliptic cohomology. Séminaire Bourbaki 695 // Astérisque. 1988. V. 161–162. P. 187–201.
- [11] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms. Asp. of Math. V. 20: Vieweg, 1993.
- [12] Gawedzki K. Conformal field theory. Séminaire Bourbaki 704 // Astérisque. 1989. V. 177–178. P. 95–126.
- [13] Léandre R. Cover of the Brownian bridge and stochastic symplectic action // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. №1. P. 91–137.
- [14] Aida S. Stochastic analysis on loop space // Sugaku. 1998. V. 50. P. 265–281.
- [15] Driver B. Towards calculus and geometry on path spaces // Stochastic Analysis / ed. M. Cranston, R. Durrett, M. Pinsky. Proc. Sympos. Pure Math. V. 57, 1995. P. 405–422.
- [16] Malliavin P. Stochastic Analysis: Springer, 1997.
- [17] Stroock D. W. Introduction to Analysis on the Path Space on Riemannian Manifolds. Math. Surveys Monographs. V. 74: Amer. Math. Soc., 2000.
- [18] Albéverio S. A survey of some developments in loop space: associated stochastic processes, statistical mechanics, infinite-dimensional Lie groups, topological quantum fields // Тр. МИАН. 1997. Т. 217. С. 209–234.
- [19] Léandre R. Cohomologie de Bismut–Nualart–Pardoux et cohomologie de Hochschild entière // Séminaire de Proba XXX. In honour of P. A. Meyer and J. Neveu / ed. J. Azéma, M. Emery, M. Yor. Lecture Notes in Math. V. 1626: Springer, 1996. P. 68–100.
- [20] Léandre R. Brownian cohomology of an homogeneous manifold // New Trends in Stochastic Analysis / ed. K. D. Elworthy, S. Kusuoka, I. Shigekawa: World Sci., 1997. P. 305–347.
- [21] Léandre R. Stochastic Adams theorem for a general compact manifold // Rev. Math. Phys. 2001. V. 13. P. 1095–1133.
- [22] Léandre R. Integration by parts and rotationally invariant Sobolev calculus on free loop spaces // J. Geometry Phys. / ed. A. Borowiec, R. Gielerak. V. 11, 1993. P. 517–528.

- [23] Léandre R. Invariant Sobolev calculus on free loop space // *Acta Appl. Math.* 1997. V. 46. P. 267–350.
- [24] Арефьева И. Я. Неабелева формула Стокса // *ТМФ.* 1980. Т. 43. С. 111–116.
- [25] Airault H., Malliavin P. *Quasi-sure Analysis.* Publication Paris VI, 1991.
- [26] Albéverio S., Hoegh-Krohn R. The energy representation of Sobolev Lie groups // *Compositio Math.* 1978. V. 36. P. 37–52.
- [27] Adams J. F. On the cobar construction // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1956. V. 42. P. 346–373.
- [28] Souriau J. M. Un algorithme générateur de structures quantiques. Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui // *Astérisque.* 1985. P. 341–399.
- [29] Léandre R. Singular integral cohomology of the stochastic loop space // *Infinite-Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* 1998. V. 1. № 1. P. 17–31.
- [30] Dellacherie C., Meyer P. A. *Probabilités et potentiel.* V. II: Hermann, 1980.
- [31] Brylinski J. L. *Loop Spaces, Characteristic Classes, and Geometric Quantization.* Progress in Math. V. 107: Birkhäuser, 1992.
- [32] Léandre R. String structure over the Brownian bridge // *J. Math. Phys.* 1999. V. 40. № 1. P. 454–479.
- [33] Carey A. L., Murray M. K. String structure and the path fibration of a group // *Comm. Math. Phys.* 1991. V. 141. P. 441–452.
- [34] Coquereaux R., Pilch K. String structure on loop bundles // *Comm. Math. Phys.* 1989. V. 120. P. 353–378.
- [35] Mac Laughlin D. Orientation and string structures on loop spaces // *Pacific J. Math.* 1992. V. 155. P. 143–156.
- [36] Léandre R. Hilbert space of spinor fields over the free loop space // *Rev. Math. Phys.* 1997. V. 9. № 2. P. 243–277.
- [37] Léandre R. Stochastic cohomology of the frame bundle of the loop space // *J. Nonlinear Math. Phys.* 1998. V. 5. № 1. P. 23–41.
- [38] Léandre R. Stochastic gauge transform of the string bundle // *J. Geometry Phys.* 1998. V. 26. P. 1–25.
- [39] Léandre R. A unitary representation of the basic central extension of a loop group // *Nagoya Math. J.* 2000. V. 159. P. 113–124.
- [40] Léandre R. Stochastic cohomology of Chen–Souriau and line bundle over the Brownian bridge // *Probability Theory Related Fields.* 2001. V. 120. P. 168–182.
- [41] Léandre R. A sheaf theoretical approach to stochastic cohomology. XXXI Symposium of Mathematical Physics (Torun, R. Mrugała ed.) // *Rep. Math. Phys.* 2000. V. 46. № 1/2. P. 157–164.
- [42] Bonic R., Frampton J., Tromba A. Λ -Manifolds // *J. Funct. Anal.* 1969. V. 3. P. 310–320.
- [43] Bonic R., Frampton J. Smooth functions on Banach manifolds // *J. Math. Mech.* 1966. V. 15. № 5. P. 877–898.
- [44] Warner F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups:* Springer, 1983.
- [45] Bott R., Tu L. W. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, 1986.
- [46] Elworthy K. D., Li X. M. Special Itô maps and an L^2 Hodge theory for one forms on path spaces // *Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplay* / ed. I. M. Roekner. C.M.S. Conference Proceedings. V. 28, 2001. P. 145–162.
- [47] Elworthy K. D., Yor M. Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows // *Séminaire de Proba XXVII* / ed. J. Azéma, P. A. Meyer, M. Yor. *Lecture Notes in Math.* V. 1557: Springer, 1993. P. 159–172.
- [48] Arai A., Mitoma I. De Rham–Hodge–Kodaira decomposition in infinite dimensions // *Math. Ann.* 1991. V. 291. P. 51–73.
- [49] Fang S., Franchi J. A differentiable isomorphism between Wiener space and path groups // *Séminaire de Proba XXXI* / ed. J. Azéma, M. Emery, M. Yor. *Lecture Notes in Math.* V. 1655, 1997. P. 54–61.
- [50] Airault H., Malliavin P. *Integration on Loop Groups.* Publication Paris VI, 1991.
- [51] Fang S., Franchi J. De Rham–Hodge–Kodaira–Kodaira operator on loop groups // *J. Funct. Anal.* 1997. V. 148. P. 391–407.

- [52] Léandre R., Volovich I. The stochastic Lévy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds // *Infinite-Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*. 2001. V. 4. № 2. P. 161–172.
- [53] Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy Laplacian // *Russian J. Math. Phys.* 1994. V. 2. P. 235–250.
- [54] Alvarez O., Killingback T. P., Mangano M., Windey P. String theory and loop space index theorem // *Comm. Math. Phys.* 1997. V. 111. P. 1–10.
- [55] Jaffe A., Lesniewski A., Weitsman J. Index of a family of Dirac operators on loop space // *Comm. Math. Phys.* 1987. V. 112. P. 75–88.
- [56] Dixon L., Harvey J., Vafa C., Witten E. Strings on orbifold // *Nucl. Phys. B*. 1985. V. 261. P. 678–686.
- [57] Dijkgraaf R., Moore G., Verlinde E., Verlinde H. Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings // *Comm. Math. Phys.* 1997. V. 185. P. 197–209.
- [58] Arai A. A general class of infinite-dimensional operators and path representation of their index // *J. Funct. Anal.* 1992. V. 105. P. 304–408.
- [59] Jones J. D. S., Léandre R. A stochastic approach to the Dirac operator over free loop space // *Тр. МИАН*. 1997. Т. 217. С. 258–287.
- [60] Léandre R., Roan S. S. A stochastic approach to the Euler–Poincaré number of the loop space of an orbifold // *J. Geometry Phys.* 1995. V. 16. P. 71–98.
- [61] Léandre R. Quotient of a loop group and Witten genus // *J. Math. Phys.* 2001. V. 42. № 3. P. 1364–1383.
- [62] Gilkey P. *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah–Singer Index Theorem*. Publish or Perish. V. 11, 1984.
- [63] Léandre R. A stochastic approach of Witten's explanation of rigidity relation. Preprint: Univ. de Nancy, 2000.
- [64] Driver B., Roeckner M. Construction of diffusion on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*. 1992. V. 315. P. 603–608.
- [65] Albéverio S., Léandre R., Roeckner M. Construction of a rotational invariant diffusion on the free loop space // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*. 1993. V. 316. P. 287–292.
- [66] Fang S., Zhang T. Large deviations for the Brownian motion on loop groups // *J. Theoretical Probability*. 2001. V. 14. P. 463–483.
- [67] Felder G., Gawedzki K., Kupiainen A. Spectra of Wess–Zumino–Witten models with arbitrary simple groups // *Comm. Math. Phys.* 1988. V. 117. № 1. P. 127–159.
- [68] Brzezniak Z., Léandre R. Horizontal lift of an infinite-dimensional diffusion // *Potential Analysis*. 2000. V. 12. P. 249–280.
- [69] Brzezniak Z., Elworthy D. Stochastic differential equations on Banach manifolds // *Methods Functional Analysis Topology*. 2000. V. 6. № 1. P. 43–84.
- [70] Brzezniak Z., Léandre R. Stochastic Pants over a Riemannian Manifold. Preprint: Université de Nancy I, 2001.
- [71] Chen K. T. Iterated paths integrals of differential forms and loop space homology // *Ann. Math.* 1973. V. 97. P. 213–237.
- [72] Léandre R. Anticipative Chen–Souriau cohomology and Hochschild cohomology // *Conference in Memory of M. Flato II* / ed. G. Dito, D. Sternheimer. *Math. Phys. Studies*. V. 22, 2000. P. 185–199.
- [73] Shigekawa I. De Rham–Hodge–Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space // *J. Math. Kyoto Univ.* 1986. V. 26. P. 191–202.

Département de Mathématiques, Université de Nancy I (France)

Поступило
09.02.2000