Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 803–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:34:10

УДК 517.53

Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах

П. А. Бородин

При каждом $p > 1$ получена оценка снизу для расстояний до действительной оси от полюсов наипростейших дробей (т.е. логарифмических производных многочленов), ограниченных единицей в норме L_p на этой оси, улучшающая первую оценку такого рода, полученную Данченко в 1994 г. При $p = 2$ оценка оказывается точной. Аналогичные оценки получены для расстояний от полюсов наипростейших дробей до вершин углов и лучей.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. *Наипростейшей дробью* степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}$ – точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ – любой многочлен с нулями в этих точках.

В 1960-е г. Горин поставил следующую задачу. Пусть наипростейшая дробь $r_n(z)$ по модулю не превосходит 1 в каждой точке действительной оси $\mathbb{R}$. Как близко могут подходить к оси $\mathbb{R}$ полюсы a_k этой дроби? Другими словами, стремятся ли к нулю величины

$$d(n) = \inf \left\{ \min | \operatorname{Im} a_k | : \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}$$

и, если стремятся, то с какой скоростью?

В работе [1] Данченко полностью решил эту задачу. Он показал, что

$$d(n) \asymp \frac{\ln \ln n}{\ln n}, \quad n \rightarrow \infty$$

(знак $\asymp$ слабой эквивалентности означает, что отношение левой и правой частей ограничено сверху и снизу положительными постоянными). В [1] можно найти подробную библиографию и историю решения задачи Горина.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00962).

Кроме того, Данченко в [1] исследовал аналогичную задачу для наипростейших дробей, ограниченных единицей по норме $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Приведем точную формулировку полученного им результата.

Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $H_p(\mathbb{C}^+)$ – пространство Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, т.е. пространство голоморфных в $\mathbb{C}^+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{C}^+)} = \sup_{a>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+ia)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Каждая функция $f \in H_p(\mathbb{C}^+)$ имеет конечные угловые пределы $f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, образующие функцию $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$. Пространство $H_p(\mathbb{C}^+)$ содержит все наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости.

Положим

$$d(n, p) = \inf \left\{ \min_k \operatorname{Im} a_k : \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} + f(z) \right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 1, \operatorname{Im} a_k > 0, f \in H_p(\mathbb{C}^+) \right\}.$$

ТЕОРЕМА А (В.И. Данченко). Для любых $p \in (1, \infty)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$d(n, p) \geq \frac{2^q (\sin(\pi/p))^q}{B(q - 1/2, 1/2)} \geq \frac{1}{p} \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^q 2^{q-1},$$

где $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ – бета-функция Эйлера (первая оценка, более точная, содержится в доказательстве теоремы 2а работы [1], а вторая оценка, менее точная, указана в формулировке этой теоремы).

Примечательно, что правая часть здесь не зависит от n , так что полюсы наипростейших дробей $r_n(z)$ независимо от их количества не могут сколь угодно близко подходить к действительной оси, при условии $\|r_n\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 1$. Другими словами, слагаемые $1/(z - a_k)$ наипростейшей дроби в случае $1 < p < \infty$ (в отличие от случая $p = \infty$) не “интерferируют” и не могут в сумме дать маленькую L_p -норму на действительной оси, не удалившись от нее достаточно далеко.

Цель настоящей работы – уточнить оценку Данченко для величин $d(n, p)$ (теорема 1). Новая оценка лучше оценки Данченко при всех p (теорема 2) и является точной при $p = 2$ (следствие из теоремы 1). Кроме того, в работе получены (п. 4) оценки расстояний от полюсов наипростейших дробей $r_n(z)$ до вершин углов и лучей Λ при условии $\|r_n\|_{L_p(\Lambda)} \leq 1$, а также показана связь этих оценок с теорией приближений наипростейшими дробями (п. 3).

2. Оценка расстояний до прямой.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $p \in (1, \infty)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{2^{2q-2} \pi^{q-1}}{p^q} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \leq d(n, p) \leq \left(\frac{\pi q 2^{2-p}}{p B(p/2, p/2)} \right)^{q-1},$$

где $1/p + 1/q = 1$, $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ – бета-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО оценки снизу основывается на следующем простом факте, использовавшемся Косухиным (см. доказательство его теоремы 2 в работе [2]). Если

a и b – два комплексных числа с ненулевой мнимой частью и $\operatorname{Im} a > 0$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \begin{cases} \frac{2\pi i}{a-b}, & \operatorname{Im} b < 0 \\ 0, & \operatorname{Im} b > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, для любой функции $f \in H_p(\mathbb{C}^+)$ и любого числа $b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} b < 0$, справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-b} dx = 0 \quad (2)$$

(см. упражнение 2 к главе 2 в книге [3]).

Возьмем произвольную функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-a_k} + f(z),$$

где $a_k = x_k + i\alpha_k$, все $\alpha_k > 0$, $f \in H_p(\mathbb{C}^+)$, и пусть $\|F\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = \alpha i$, $\alpha > 0$, и что a_1 – самая близкая к оси $\mathbb{R}$ точка из всех a_k , т.е. что $\alpha \leq \alpha_k$, $k = 2, \dots, n$.

Используя формулы (1) и (2), при любом $t > 0$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)}{x+ti} dx = \left| \frac{2\pi i}{\alpha i + ti} + \sum_{k=2}^n \frac{2\pi i}{a_k + ti} \right| = \left| \frac{2\pi}{\alpha + t} + 2\pi \sum_{k=2}^n \frac{t + \alpha_k + ix_k}{(t + \alpha_k)^2 + x_k^2} \right| \geq \frac{2\pi}{\alpha + t}.$$

С другой стороны, по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)}{x+ti} dx \right| &\leq \|F\|_{L_p(\mathbb{R})} \cdot \left\| \frac{1}{x+ti} \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \left\| \frac{1}{x+ti} \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + t^2)^{q/2}} \right)^{1/q} = \frac{1}{t^{(q-1)/q}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(u^2 + 1)^{q/2}} \right)^{1/q} =: t^{-1/p} c_q. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $t > 0$ имеем

$$\frac{2\pi}{\alpha + t} \leq t^{-1/p} c_q \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq \frac{2\pi}{c_q} t^{1/p} - t =: g(t).$$

Функция $g(t)$ при $t > 0$ достигает своего максимума в точке $t_0 = (2\pi/(pc_q))^q$, откуда

$$\begin{aligned} \alpha \geq g(t_0) &= \frac{2\pi}{c_q} \left(\frac{2\pi}{pc_q} \right)^{q/p} - \left(\frac{2\pi}{pc_q} \right)^q = \left(\frac{2\pi}{pc_q} \right)^{q-1} \left(\frac{2\pi}{c_q} - \frac{2\pi}{pc_q} \right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{pc_q} \right)^{q-1} \cdot \frac{2\pi}{qc_q} = \frac{2^q \pi^q}{p^{q-1} q c_q^q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно задаче 31.06 из [4]

$$c_q^q = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(u^2 + 1)^{q/2}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((q-1)/2)}{\Gamma(q/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((q-1)/2)}{\Gamma(q/2)}, \quad (4)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ – гамма-функция Эйлера. По формуле удвоения Лежандра (см. [5; с. 867])

$$\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2-q}\Gamma(q-1),$$

поэтому

$$c_q^q = \frac{\pi 2^{2-q}\Gamma(q-1)}{\Gamma^2(q/2)} = \frac{\pi 2^{2-q}\Gamma(q)}{(q-1)\Gamma^2(q/2)} = \frac{p\pi 2^{2-q}}{qB(q/2, q/2)}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$\alpha \geq \frac{2^q \pi^q q B(q/2, q/2)}{p^{q-1} q p \pi 2^{2-q}} = \frac{2^{2q-2} \pi^{q-1}}{p^q} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right),$$

что и доказывает оценку снизу в утверждении теоремы 1.

Для доказательства оценки сверху найдем такое число $y_0 > 0$, что

$$1 = \left\| \frac{1}{x - iy_0} \right\|_{L_p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + y_0^2)^{p/2}} = y_0^{1-p} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(u^2 + 1)^{p/2}} = y_0^{1-p} c_p^p.$$

Имеем

$$y_0 = (c_p^p)^{1/(p-1)} = (c_p^p)^{q-1} = \left(\frac{q\pi 2^{2-p}}{pB(p/2, p/2)} \right)^{q-1}$$

(см. выше вычисление формулы (5)).

По определению $d(n, p) \leq y_0$, откуда и следует оценка сверху в утверждении теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$d(n, 2) = \pi.$$

Отметим, что теорема А дает оценку $d(n, 2) \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. При каждом $p \in (1, \infty)$ оценка снизу в теореме 1 лучше, чем в теореме А.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что функция

$$h(p) = \left(\frac{2^{2q-2} \pi^{q-1}}{p^q} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \right) : \left(\frac{1}{p} \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^q 2^{q-1} \right) = \frac{2^{q-1} \pi^{q-1} B(q/2, q/2)}{p^{q-1} (\sin(\pi/p))^q}$$

больше 1 при каждом $p > 1$. Рассмотрим несколько случаев.

Из формул (4) и (5) в доказательстве теоремы 1 получаем

$$B\left(\frac{q-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{p\pi 2^{2-q}}{qB(q/2, q/2)},$$

откуда

$$h(p) = \frac{\pi^q}{p^{q-1} q (\sin(\pi/p))^q} \geq \frac{\pi^q}{p^{q-1} q} = \frac{\pi^q}{(1 + 1/(q-1))^{q-1} q} > \frac{\pi^q}{eq} \geq \frac{\pi^1}{e \cdot 1} > 1$$

(предпоследнее неравенство следует из того, что функция $f(q) = \pi^q/eq$ возрастает при $q \in [1, \infty)$).

Теорема 2 доказана.

3. Связь с теорией приближений. При доказательстве теоремы 1 получалось, что любая наипростейшая дробь $r_n(z)$ с полюсами вне действительной оси $\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{r_n(x)}{x+it} dx \geq 0$$

при любом $t > 0$. Это означает, что в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, наипростейшие дроби содержатся в полупространстве

$$\Pi(t) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}) : \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x+it} dx \geq 0 \right\},$$

а значит, не плотны в $L_p(\mathbb{R})$ (этот факт, впрочем, следует из теоремы А и уже отмечался в [2]). В случае $p = 2$ оценки сверху и снизу в теореме 1 смыкаются (см. следствие из теоремы 1), и из способа получения этих оценок дополнительно вытекает, что для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функция $-1/(x-a)$ не может быть приближена в $L_2(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями лучше, чем нулем.

В то же время из результатов работ [6], [7] следует, что для любой ограниченной незамкнутой гладкой кривой γ без самопересечений наипростейшие дроби плотны в пространстве $C(\gamma)$ непрерывных на γ функций, а значит, и в любом пространстве $L_p(\gamma)$ с $p \in [1, \infty)$.

Возникает задача о плотности наипростейших дробей в пространствах $L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$, для неограниченных кривых γ без самопересечений. Рассмотрим простейший класс таких кривых – углы

$$\Lambda(\alpha) = \{re^{i\varphi} : r \geq 0, \varphi = 0 \text{ или } \varphi = \alpha\}, \quad \text{где } \alpha \in [0, \pi].$$

В частности, в случае $\Lambda(\pi) = \mathbb{R}$, как уже отмечалось, наипростейшие дроби не плотны во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Это утверждение остается справедливым и при всех $\alpha \in (0, \pi)$. Как показал Косухин (теорема 2 работы [2]), в пространстве $L_p(\Lambda(\alpha))$ при $\alpha \in (0, \pi)$ наипростейшие дроби содержатся в полупространстве

$$\Pi(\alpha) = \left\{ f \in L_p(\Lambda(\alpha)) : \operatorname{Re} \int_{\Lambda(\alpha)} \frac{f(z)}{z^{\pi/\alpha} + i} dz \geq 0 \right\},$$

где $z^{\pi/\alpha}$ – такая аналитическая в области $\Omega(\alpha) = \{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in (0, \alpha)\}$ и непрерывная вплоть до $\Lambda(\alpha)$ ветвь многозначной функции $e^{(\pi/\alpha)\operatorname{Log} z}$, что $\operatorname{Im} z^{\pi/\alpha} > 0$ для любого $z \in \Omega(\alpha)$. Поскольку функция $1/(z^{\pi/\alpha} + i)$ принадлежит пространству $L_q(\Lambda(\alpha))$ при любом $q \geq 1$, $\Pi(\alpha)$ – собственное подпространство в $L_p(\Lambda(\alpha))$, а значит, наипростейшие дроби не плотны в $L_p(\Lambda(\alpha))$, $1 < p < \infty$, а также в пространстве функций f , непрерывных на $\Lambda(\alpha)$ и таких, что $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, с равномерной нормой.

Однако этот результат удается лишь частично распространить на случай $\Lambda(0) = [0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 3. *Наипростейшие дроби не плотны в пространстве $L_p[0, \infty)$ при любом $p \in (1, 2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого числа $a \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{1}{x-a} dx = \frac{\pi i}{\sqrt{a}+i}$$

(см. задачу 28.20 из [4]), где непрерывная ветвь $\sqrt{z}$ в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ выбирается так, что $\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Поскольку $\operatorname{Re} \pi i / (\sqrt{a} + i) > 0$ для любого $a \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, а функция $\sqrt{x}/(x+1)$ принадлежит пространству $L_q[0, \infty)$ при любом $q > 2$, получаем, что наипростейшие дроби содержатся в собственном полупространстве во всех пространствах $L_p[0, \infty)$, $1 < p < 2$, а значит, не плотны в каждом из этих пространств.

Теорема 3 доказана.

По-видимому, не существует такой функции $g \in L_2[0, \infty)$, для которой неравенство $\operatorname{Re} \int_0^\infty g(x)/(x-a) \geq 0$ справедливо при любом $a \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Возможно, верно и более сильное утверждение: наипростейшие дроби плотны в пространстве $L_2[0, \infty)$.

4. Оценки расстояний до углов и луча. Отмеченные в предыдущем пункте неравенства можно использовать для оценки расстояний от полюсов наипростейших дробей $r(z)$ до углов $\Lambda(\alpha)$ или луча $[0, \infty)$ при условии ограниченности $\|r\|$ в соответствующем пространстве L_p . Приведем несколько таких оценок в специальных случаях – когда рассматриваемый полюс берется на биссектрисе (внутренней или внешней) угла $\Lambda(\alpha)$ или, соответственно, на луче $(-\infty, 0)$, и при этом оценивается расстояние от этого полюса до нуля, т.е. до вершины угла $\Lambda(\alpha)$ или луча $[0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \in (0, \pi]$, $p \in (1, \infty]$, $a > 0$ и

$$r(z) = \frac{1}{z - ae^{i\alpha/2}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$$

– наипростейшая дробь с полюсами вне угла $\Lambda(\alpha)$, у которой $\|r\|_{L_p(\Lambda(\alpha))} \leq 1$. Тогда

$$a \geq \frac{2^q \pi (\pi q - \alpha)^{q-\alpha/\pi}}{q^q \alpha^{1-\alpha/\pi} B(\alpha/(2\pi), (q\pi - \alpha)/(2\pi))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству оценки снизу в теореме 1. Из неравенств

$$\left| \int_{\Lambda(\alpha)} \frac{r(z)}{z^{\pi/\alpha} + it} dz \right| \geq \left| \int_{\Lambda(\alpha)} \frac{dz}{(z - ae^{i\alpha/2})(z^{\pi/\alpha} + it)} \right| = \frac{2\pi}{a^{\pi/\alpha} + t}$$

(здесь используется отмеченное в п. 3 утверждение Косухина) и

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Lambda(\alpha)} \frac{r(z)}{z^{\pi/\alpha} + it} dz \right| &\leq \left\| \frac{1}{z^{\pi/\alpha} + it} \right\|_{L_q(\Lambda(\alpha))} \\ &= t^{\alpha/(\pi q) - 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(|u|^{2\pi/\alpha} + 1)^{q/2}} \right)^{1/q} =: t^{\alpha/(\pi q) - 1} d_q \end{aligned}$$

следует, что

$$a^{\pi/\alpha} \geq \frac{2\pi t^{1-\alpha/(\pi q)}}{d_q} - t.$$

Находя максимум правой части последнего неравенства при $t \geq 0$ и вычисляя

$$d_q^q = \frac{\alpha}{\pi} B\left(\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{q}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

(см. задачу 31.06 в [4]), получаем утверждение теоремы.

Отметим, что при $\alpha = \pi$ оценка в теореме 4 совпадает с оценкой снизу в теореме 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha \in (0, \pi)$, $a > 0$, $\delta = \pi/(2\pi - \alpha)$, $1 < p < (2\pi - \alpha)/(\pi - \alpha)$,

$$r(z) = \frac{1}{z + ae^{i\alpha/2}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$$

– наипростейшая дробь с полюсами вне угла $\Lambda(\alpha)$, у которой $\|r\|_{L_p(\Lambda(\alpha))} \leq 1$. Тогда

$$a \geq \left(\frac{2\pi}{\delta q}\right)^q \frac{\delta(\delta q - 1)^{q-1/\delta}}{B(1/(2\delta), (q\delta - 1)/(2\delta))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы и использует неравенство.

$$\operatorname{Re} \int_{\Lambda(\alpha)} \frac{1}{z^\delta - it} \frac{1}{z - b} dz > 0,$$

где $t > 0$, $b \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(\alpha)$, а z^δ – аналитическая в области $\Omega'(\alpha) = \{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in (\alpha, 2\pi)\}$ и непрерывная вплоть до $\Lambda(\alpha)$ ветвь многозначной функции $e^{\delta \operatorname{Log} z}$, переводящая $\Omega'(\alpha)$ в нижнюю полуплоскость.

В случае $p \geq (2\pi - \alpha)/(\pi - \alpha)$ полюсы наипростейших дробей $r(z)$, ограниченных единицей по норме $L_p(\Lambda(\alpha))$, по-видимому, могут сколь угодно близко подходить к вершине угла $\Lambda(\alpha)$ с внешней стороны.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $a > 0$, $1 < p < 2$,

$$r(z) = \frac{1}{z + a} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$$

– наипростейшая дробь с полюсами вне луча $[0, \infty)$, у которой $\|r\|_{L_p[0, \infty)} \leq 1$. Тогда

$$a \geq \frac{4\pi^q(q-2)^{q-1}}{q^{q+1}B(q/2, q/2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4 и использует неравенство

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+t} \frac{1}{x-b} dx = \operatorname{Re} \frac{\pi i}{\sqrt{b} + \sqrt{t}i} > 0,$$

где $t > 0$, $b \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ (см. задачу 28.20 из [4], значение $\sqrt{b}$ выбирается в верхней полуплоскости).

В случае $p \geq 2$ полюсы наипростейших дробей $r(z)$, ограниченных единицей по норме $L_p[0, \infty)$, по-видимому, могут сколь угодно близко подходить к нулю.

Отметим еще раз, что вытекающая из теорем 4–6 невозможность приближения полюсов наипростейших дробей $r(z)$ к рассматриваемым множествам γ (углам и лучам) при условии $\|r\|_{L_p(\gamma)} \leq 1$ вызвана неограниченностью этих множеств на комплексной плоскости. В случае ограниченной гладкой незамкнутой кривой γ без самопересечений наипростейшие дроби плотны в любом пространстве $L_p(\gamma)$ с $p \in$

$[1, \infty)$ (см. [6], [7]), поэтому для любой точки $a \notin \gamma$ существует такая наипростейшая дробь $r_a(z)$, что

$$\left\| -\frac{1}{z-a} - r_a(z) \right\|_{L_p(\gamma)} \leq 1,$$

т.е. наипростейшая дробь $1/(z-a) + r_a(z)$ ограничена единицей по норме $L_p(\gamma)$, а один из ее полюсов – точка a – может подходить к кривой γ сколь угодно близко. В § 7 работы [8] построены даже наипростейшие дроби $r_n(z)$, у каждой из которых все полюсы расположены в ε_n -окрестности отрезка $[-1, 1]$ ($n = 1, 2, \dots$), и при этом $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\|r_n\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $1 \leq p < 2$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, “Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных до прямых и окружностей”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80.
- [2] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех.*, 2005, № 1, 3–8.
- [3] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [4] М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов, *Сборник задач по теории аналитических функций*, ред. М. А. Евграфов, Наука, М., 1969.
- [5] *Математическая энциклопедия*, т. 1, М., 1977.
- [6] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Тезисы докл. школы-конференции, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 1999, 74–79.
- [7] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559.
- [8] В. И. Данченко, “Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 33–52.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: jborodina@inbox.ru

Поступило

26.12.2006