Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 934–952

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:22:56

Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп

Ю. А. Фарков

Излагается метод построения ортогональных вейвлетов с компактными носителями на локально компактной абелевой группе G , являющейся слабым прямым произведением счетного множества циклических групп p -го порядка. Для любых целых $p, n \geq 2$ установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения соответствующих масштабирующих уравнений с p^n числовыми коэффициентами генерировали кратномасштабные анализы в $L^2(G)$. Отмечается, что коэффициенты этих масштабирующих уравнений вычисляются по заданным значениям p^n параметров с помощью дискретного преобразования Виленкина–Крестенсона. Кроме того, найдены условия, при которых финитное решение масштабирующего уравнения в $L^2(G)$ стабильно и имеет линейно независимую систему “целочисленных” сдвигов. Приведено несколько примеров, иллюстрирующих эти результаты.

Библиография: 16 названий.

1. Формулировки теорем. Основы вейвлет-анализа на локально компактных абелевых группах изложены в главе 5 монографии [1], а подробная библиография приведена в статье [2]. В работах [3]–[5] построены первые примеры ортогональных вейвлетов на канторовой диадической группе $\mathcal{C}$, выявлена их мультифрактальная структура и найдены условия, при которых эти вейвлеты порождают безусловные базисы в пространствах $L^q(\mathcal{C})$, $1 < q < \infty$. Эти исследования были продолжены в [6], где получены точные по порядку оценки модулей гладкости масштабирующих функций, построенных в [4], и найдены аналогичные масштабирующие функции на локально компактной абелевой группе G , являющейся слабым прямым произведением счетного множества циклических групп p -го порядка (в случае $p = 2$ группа G изоморфна канторовой группе $\mathcal{C}$). Напомним некоторые определения, использованные в [6], и сформулируем основные результаты настоящей работы.

Пусть G – локально компактная абелева группа, состоящая из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \Leftrightarrow z_j = x_j + y_j \pmod{p} \quad \text{для } j \in \mathbb{Z},$$

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

(см., например, [7; § 10.2], [8; § 1.5]). Положим $U = U_0$ и обозначим через $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$ (так что $x \ominus x = \theta$, где θ – нулевая последовательность).

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1 \leq q \leq \infty$, определяются по мере Хаара μ , заданной на борелевских множествах группы G и нормированной условием $\mu(U) = 1$ (см., например, [7]). Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная G , обозначается G^* и состоит из последовательностей вида

$$\omega = (\omega_j) = (\dots, 0, 0, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots),$$

где $\omega_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $\omega_j = 0$ для $j < k = k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара μ^* вводятся для G^* так же, как и для G . Каждый характер группы G может быть задан по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \omega_{1-j}\right), \quad x \in G,$$

для некоторого $\omega \in G^*$ (см. [7; § 25]).

Выделим в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \text{Aut } G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$. Легко видеть, что фактор-группа $H/A(H)$ содержит p элементов, а аннулятор $H^\perp$ подгруппы H состоит из последовательностей $(\omega_j) \in G^*$, у которых $\omega_j = 0$ для $j > 0$.

Кратномасштабным анализом (КМА) в $L^2(G)$ называется семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $\bigcup V_j = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
- (iii) $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(A \cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
- (iv) $f(\cdot) \in V_0 \Rightarrow f(\cdot \ominus h) \in V_0$ для $h \in H$;
- (v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_0 .

Функция φ из условия (v) называется *масштабирующей функцией* в $L^2(G)$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ положим

$$\varphi_{j,h}(x) = p^{j/2} \varphi(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Будем говорить, что функция φ *генерирует* КМА в $L^2(G)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ и, во-вторых, семейство подпространств

$$V_j = \text{clos}_{L^2(G)} \text{span}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

является КМА в $L^2(G)$. Если функция φ генерирует КМА в $L^2(G)$, то φ является масштабирующей функцией. В этом случае при каждом $j \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_j и по функции φ определяются *ортogonalные вейвлеты* $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ таким образом, что функции

$$\psi_{l,j,h}(x) = p^{j/2} \psi_l(A^j x \ominus h), \quad 1 \leq l \leq p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$ (см. [9; 10, § 10.3], а также приведенную ниже процедуру). При $p = 2$ получается один вейвлет ψ и система $\{2^{j/2} \psi(A^j \cdot \ominus h) \mid j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(G)$.

Отображение $\lambda: G \rightarrow [0, +\infty)$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \quad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{N}$ через $h_{[\alpha]}$ и $h_{[\alpha]}^-$ обозначим элементы из G такие, что

$$\lambda(h_{[\alpha]}) = \lambda(h_{[\alpha]}^-) = \alpha,$$

где все компоненты последовательности $h_{[\alpha]}$ (соответственно $h_{[\alpha]}^-$), начиная с некоторого номера, равны 0 (соответственно $p-1$). Положим также $h_{[\alpha]} = \theta$ для $\alpha = 0$ (так что $h_{[\alpha]} \in H$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$). Отображение $\lambda^*: G^* \rightarrow [0, +\infty)$, автоморфизм $B \in \text{Aut } G^*$, подгруппа U^* в G^* и элементы $\omega_{[\alpha]}$, $\omega_{[\alpha]}^-$ из $H^\perp$ определяются аналогично λ , A , U , $h_{[\alpha]}$ и $h_{[\alpha]}^-$ соответственно. Отметим, что $\chi(Ax, \omega) = \chi(x, B\omega)$ для $x \in G$, $\omega \in G^*$.

Обобщенные функции Уолша для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, \omega_{[\alpha]}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in G.$$

Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_U W_\alpha(x) \overline{W_\beta(x)} d\mu(x) = \delta_{\alpha, \beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ – символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы G^* определяется равенством

$$W_\alpha^*(\omega) = \chi(h_{[\alpha]}, \omega), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in G^*.$$

Система $\{W_\alpha^*\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Главная цель настоящей работы – установить необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующих уравнений вида

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) \quad (2)$$

генерируют КМА в $L^2(G)$. Для вейвлетов на вещественной прямой $\mathbb{R}$ соответствующие условия подробно изложены в книге Добеши (см. [10; § 6.3]). В случае $p = 2$ полученные результаты представляют собой групповые аналоги соответствующих результатов статьи [11], относящихся к вейвлет-анализу на положительной полу-прямой $\mathbb{R}_+$.

Обобщенный полином Уолша

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \quad (3)$$

называется *маской* уравнения (2). Множества

$$U_{n,s}^* = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*), \quad 0 \leq s \leq p^n - 1, \quad (4)$$

являются смежными классами группы U^* по подгруппе $B^{-n}(U^*)$. Каждая из функций $W_\alpha^*(\cdot)$ при $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$ постоянна на множествах (4). Коэффициенты масштабирующего уравнения (2) связаны со значениями b_s маски (3) на смежных классах $U_{n,s}^*$ прямым и обратным дискретными преобразованиями Виленкина–Крестенсона:

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]}), \quad 0 \leq \alpha \leq p^n - 1, \quad (5)$$

$$b_s = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(B^{-n}\omega_{[s]})}, \quad 0 \leq s \leq p^n - 1. \quad (6)$$

Для реализации этих преобразований имеются быстрые алгоритмы (см., например, [12; с. 463], [13]). Таким образом, выбор значений маски (3) на множествах (4) одновременно определяет коэффициенты уравнения (2), которому удовлетворяет соответствующая функция φ .

Как обычно, через $\widehat{\varphi}$ обозначается преобразование Фурье функции φ (см. п. 2).

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $\varphi \in L^2(G)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (2) и условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то*

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \text{supp } \varphi \subset U_{1-n}.$$

Это решение единственно, дается формулой

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega)$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{\varphi}(h^*) = 0$ при всех $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ (модифицированное условие Стрэнга–Фикса);
- 2) $\sum_{h \in H} \varphi(x \oplus h) = 1$ для п.в. $x \in G$ (свойство разбиения единицы).

Пусть $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_l (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\{\omega \in H^* \mid \chi(x, \omega) = 1 \text{ для } x \in A(H)\} = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\},$$

т.е. множество последовательностей $\{\delta_l\}$ является аннулятором подгруппы $A(H)$ в H . Если финитное L^2 -решение φ уравнения (2) удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$ и система $\{\varphi(\cdot \oplus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то

$$m(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*,$$

(см. [6; § 3]). Отсюда следует, что равенства

$$b_0 = 1, \quad |b_j|^2 + |b_{j+p^{n-1}}|^2 + \dots + |b_{j+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \leq j \leq p^{n-1} - 1, \quad (7)$$

необходимы (но недостаточны, см. пример 2 в п. 4) для того, чтобы система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ была ортонормирована в $L^2(G)$. При каких дополнительных условиях функция φ генерирует КМА в $L^2(G)$? Ответ на этот вопрос содержится в приведенной ниже теореме 2.

Пусть E – компактное множество в G^* . Множество E называется *конгруэнтным* U^* по модулю $H^\perp$, если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$.

Пусть m – маска масштабирующего уравнения (2). Будем говорить, что маска m удовлетворяет *модифицированному условию Козна*, если в группе G^* найдется компактное подмножество E такое, что

- 1) E конгруэнтно U^* по модулю $H^\perp$ и содержит некоторую окрестность нулевого элемента группы G^* ;
- 2) выполнено неравенство

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m(B^{-j}\omega)| > 0. \quad (8)$$

При условии $m(\theta) = 1$ в силу компактности множества E существует номер j_0 такой, что $m(B^{-j}\omega) = 1$ для всех $j > j_0$, $\omega \in E$. Поэтому (8) верно, если полином $m(\omega)$ не обращается в нуль на множествах $B^{-1}(E), \dots, B^{-j_0}(E)$. Отметим, что всегда можно выбрать $j_0 \leq p^n$, так как маска m полностью определяется своими значениями на множествах (4) и является $H^\perp$ -периодической функцией.

Пусть $M \subset U^*$ и

$$T_p M = \bigcup_{l=0}^{p-1} \{B^{-1}\omega_{[l]} + B^{-1}(\omega) \mid \omega \in M\}.$$

Множество M называется *блокированным* (для маски m), если оно представимо в виде объединения некоторых из множеств

$$U_{n-1,s}^* = B^{1-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{1-n}(U^*), \quad 0 \leq s \leq p^{n-1} - 1, \quad (9)$$

не содержит множества $U_{n-1,0}^*$ и обладает свойством $T_p M \subset M \cup \text{Null } m$, где $\text{Null } m$ – множество всех нулей маски m на подгруппе U^* . Очевидно, каждая маска может иметь только конечное число блокированных множеств.

Функцию $f \in L^2(G)$ будем называть *стабильной*, если существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1 \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \right\| \leq c_2 \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \right)^{1/2} \quad (10)$$

для каждой последовательности $\{a_\alpha\}$ из ℓ^2 . Иначе говоря, функция f стабильна в $L^2(G)$, если функции $f(\cdot \ominus h)$, $h \in H$, образуют систему Рисса в пространстве $L^2(G)$. Будем говорить, что функция $g: G^* \rightarrow \mathbb{C}$ имеет *периодический нуль* в точке $\omega \in G^*$, если $g(\omega \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ с компактным носителем следующие свойства (см. п. 2) эквивалентны:

- (а) функция f стабильна в $L^2(G)$;

- (b) система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно независима;
 (c) преобразование Фурье функции f не имеет периодических нулей.

Кроме того, установлено, что финитное L^2 -решение φ уравнения (2), удовлетворяющее условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, нестабильно тогда и только тогда, когда маска уравнения (2) имеет блокированное множество. Справедлива также следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть маска m финитного L^2 -решения φ уравнения (2) удовлетворяет условиям (7), и пусть $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

- (a) функция φ генерирует КМА в $L^2(G)$;
 (b) маска m удовлетворяет модифицированному условию Козна;
 (c) маска m не имеет блокированных множеств.

Теоремы 1 и 2 доказаны в п. 3 (при $p = 2$ их аналоги для пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ имеются в [11]). Из этих теорем получается (сравните с [9] и [14]) следующая процедура построения ортогональных вейвлетов в $L^2(G)$.

1. Выбрать числа b_s , $0 \leq s \leq p^n - 1$, для которых выполнены условия (7).
2. По формуле (5) вычислить коэффициенты a_α , $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$, и проверить, что маска

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}$$

не имеет блокированных множеств.

3. Найти

$$m_l(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} a_\alpha^{(l)} \overline{W_\alpha^*(\omega)}, \quad 1 \leq l \leq p-1,$$

такие, что матрица $(m_l(\omega + B^{-1}\omega_{[k]}))_{l,k=0}^{p-1}$ унитарна.

4. Определить $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ по формуле

$$\psi_l(x) = p \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} a_\alpha^{(l)} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \leq l \leq p-1. \quad (11)$$

Например, при $p = 2$ в разложении (11) можно положить $a_\alpha^{(1)} = (-1)^\alpha a_{\alpha \oplus 1}$ или $a_\alpha^{(1)} = (-1)^\alpha a_{2^n-1-\alpha}$ для $0 \leq \alpha \leq 2^n - 1$ (и $a_\alpha^{(1)} = 0$ для остальных α). Некоторые методы реализации третьего шага указанной процедуры для $p > 2$ изложены в [15; § 2.6].

2. Предварительные сведения. Для любой функции $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ преобразование Фурье $\widehat{f}$, определенное по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x) \overline{\chi(x, \omega)} d\mu(x), \quad \omega \in G,$$

принадлежит пространству $L^2(G)$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}: L^1(G) \cap L^2(G) \rightarrow L^2(G), \quad \mathcal{F}f = \widehat{f},$$

стандартным образом продолжается на все пространство $L^2(G)$. Через $C_0(G^*)$ обозначается множество всех непрерывных комплекснозначных функций g на G^* таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $E \subset G^*$ (зависящий от g и ε), для которого $|g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in G^* \setminus E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [7]). *Справедливы следующие свойства:*

- (а) *если $f \in L^1(G)$, то $\widehat{f} \in C_0(G^*)$;*
- (б) *оператор Фурье $\mathcal{F}$ отображает пространство $L^2(G)$ на себя линейно, непрерывно и взаимно однозначно;*
- (с) *если $f, g \in L^2(G)$, то $(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})$ (равенство Парсеваля).*

Для каждого натурального n через $\mathcal{E}_n(G)$ обозначается пространство функций, заданных на G и постоянных на множествах

$$U_{n,\alpha} = A^{-n}(h_{[\alpha]}) \oplus A^{-n}(U), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Класс $\mathcal{E}_n(G^*)$ определяется аналогично. Маска масштабирующего уравнения (2) принадлежит классу $\mathcal{E}_n(G^*)$.

Характеристическая функция множества E , расположенного в G , обозначается $\mathbf{1}_E$. Любая функция $f \in \mathcal{E}_n(G)$ представима в виде ряда

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{n,\alpha} \mathbf{1}_{U_{n,\alpha}}, \quad (12)$$

где $f_{n,\alpha}$ – значения, принимаемые f на $U_{n,\alpha}$ (т.е. $f_{n,\alpha} = f(A^{-n}(h_{[\alpha]}))$). Отметим также, что аналогично соотношениям (1.5.18) в [8] доказываются равенства

$$\int_{U_{l,\alpha}} W_\beta(x) d\mu(x) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq p^{l+1} - 1, \quad p^l \leq \beta \leq p^{l+1} - 1, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \quad (13)$$

Аналог следующего предложения для p -ично целых функций на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ доказан в [8; § 6.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы следующие свойства:*

- (а) *если $f \in L^1(G) \cap \mathcal{E}_n(G)$, то $\text{supp } \widehat{f} \subset U_{-n}^*$;*
- (б) *если $f \in L^1(G)$ и $\text{supp } f \subset U_{-n}$, то $\widehat{f} \in \mathcal{E}_n(G^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^1(G) \cap \mathcal{E}_n(G)$. Тогда из (12) для любого $\omega \in G^*$ имеем

$$\widehat{f}(\omega) = \int_G f(t) \overline{\chi(t, \omega)} d\mu(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{n,\alpha} \int_{U_{n,\alpha}} \overline{\chi(t, \omega)} d\mu(t).$$

Полагая $t = A^{-n}(h_{[\alpha]}) \oplus x$ и замечая, что $A^{-n}(U) = U_n$, получим

$$\int_{U_{n,\alpha}} \chi(t, \omega) d\mu(t) = \chi(A^{-n}(h_{[\alpha]}), \omega) \int_{U_n} \chi(x, \omega) d\mu(x).$$

Для произвольного элемента $\omega = (\omega_j)$ из $G^* \setminus U_{-n}^*$ положим $s = \min\{j \mid \omega_j \neq 0\}$. Легко видеть, что $s \leq -n$. Пусть $l = -s$. Тогда для любого элемента $x = (x_j)$ из U_n имеем

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} (x_{n+1}\omega_{-n} + x_{n+2}\omega_{-n-1} + \cdots + x_{l+1}\omega_{-l})\right) = W_\beta(x),$$

где $\beta = \omega_{-n}p^n + \omega_{-n-1}p^{n-1} + \cdots + \omega_{-l}p^l$. Далее, разбивая U_n на множества $U_{l,\alpha}$ и пользуясь (13), получаем

$$\int_{U_n} \chi(x, \omega) d\mu(x) = \sum_{\alpha=0}^{p^{l-n}-1} \int_{U_{l,\alpha}} W_\beta(x) d\mu(x) = 0.$$

Таким образом, $\widehat{f}(\omega) = 0$ для всех $\omega \in G^* \setminus U_{-n}^*$ и утверждение (а) доказано.

Пусть теперь $f \in L^1(G)$ и $\text{supp } f \subset U_{-n}$. Тогда

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{U_{-n}} f(t) \overline{\chi(t, \omega)} d\mu(t) = \sum_{s=0}^{p^n-1} \int_{U_{0,s}} f(t) \overline{\chi(t, \omega)} d\mu(t).$$

Отсюда для

$$\omega = (\dots, 0, 0, \omega_{-l}, \omega_{-l+1}, \dots, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$$

после подстановки $t = h_{[s]} \oplus x$ получаем

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{s=0}^{p^n-1} c_{s,\beta} \overline{W_s^*(\omega)}, \quad (14)$$

где

$$c_{s,\beta} = \int_U f(h_{[s]} \oplus x) \overline{W_\beta(x)} d\mu(x), \quad \beta = \beta(\omega) = \omega_{-l}p^l + \omega_{-l+1}p^{l-1} + \dots + \omega_{-l}p + \omega_0.$$

Поскольку $W_s^*(\omega)$ и $\beta(\omega)$ постоянны на множествах

$$U_{n,s}^* = B^{-n}(\omega_{[s]}) \oplus B^{-n}(U^*), \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

из (14) следует, что $\widehat{f} \in \mathcal{E}_n(G^*)$. Предложение 2 доказано.

Напомним, что функция $f \in L^2(G)$ называется *стабильной*, если система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является системой Рисса в пространстве $L^2(G)$. Имеет место следующий аналог теоремы 2 из [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ с компактным носителем следующие свойства эквивалентны:

- (a) функция f стабильна в $L^2(G)$;
- (b) система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно независима;
- (c) преобразование Фурье функции f не имеет периодических нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{supp } f \subset U_{1-n}$ для некоторого натурального n . По предположению 2 тогда $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$. Кроме того, если $\lambda(h) > p^{n-1}$, то

$$\mu\{\text{supp } f(\cdot \ominus h) \cap U_{1-n}\} = 0.$$

Отсюда видно, что система $\{f(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима ее конечная подсистема $\{f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \mid \alpha = 0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}$. Положим

$$S = \left\{ c = (c_0, c_1, \dots, c_{p^{n-1}-1}) \mid \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} |c_\alpha|^2 = 1 \right\}$$

и определим функцию F по формуле

$$F(c) = \left\| \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} c_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \right\|, \quad c \in S.$$

Если функция F обращается в нуль на S в некоторой точке $c = (c_0, c_1, \dots, c_{p^{n-1}-1})$, то для последовательности $(c_0, \dots, c_{p^{n-1}-1}, 0, 0, \dots)$ нарушается нижняя оценка в (10). С помощью неравенства Коши–Буняковского из условия $\text{supp } f \subset U_{1-n}$ для любой последовательности $\{a_\alpha\}$ из ℓ^2 имеем

$$\left\| \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) \right\| \leq c(n) \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \right)^{1/2},$$

где константа $c(n)$ не зависит от $\{a_\alpha\}$. Поэтому функция f не является стабильной тогда и только тогда, когда функция F принимает на S сколь угодно малые значения. Но тогда (в силу компактности S) существует точка $c \in S$, для которой $F(c) = 0$. Таким образом, (а) $\Leftrightarrow$ (b).

Далее, если для некоторого вектора $(a_0, \dots, a_{p^{n-1}-1})$ выполнены условия

$$\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha f(\cdot \ominus h_{[\alpha]}) = 0 \quad \text{и} \quad |a_0| + \dots + |a_{p^{n-1}-1}| > 0, \quad (15)$$

то, применив преобразование Уолша, получаем

$$\widehat{f}(\omega) \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha W_\alpha^*(\omega) = 0 \quad \text{для п.в. } \omega \in G^*.$$

Полином Уолша

$$W^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} a_\alpha W_\alpha^*(\omega)$$

не обращается в нуль тождественно, поэтому среди множеств $U_{n-1,s}^*$, $0 \leq s \leq p^{n-1}-1$, найдется такое (обозначим его X), для которого $W^*(X \oplus h^*) \neq 0$, $h^* \in H^\perp$. Поскольку $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$, отсюда получаем, что (15) выполнено тогда и только тогда, когда на U^* существует множество $X = U_{n-1,s}^*$ такое, что $\widehat{f}(X \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Следовательно, (b) $\Leftrightarrow$ (c). Предложение 3 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\varphi \in L^2(G)$. Система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2 = 1 \quad \text{для п.в. } \omega \in G^*.$$

Это утверждение может быть выведено из обобщенной формулы суммирования Пуассона (см., например, [1; с. 377]), а его элементарное доказательство дано в [6; § 3].

При доказательстве леммы 2.1 работы [6] установлено, что аналогично предложению 5.3.1 из [10] имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в V_0 , то $\cap V_j = \{0\}$.

Здесь семейство $\{V_j\}$ определено по произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ с помощью формулы (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть полином

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)}$$

удовлетворяет условиям

$$m(\theta) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in G^*,$$

а функция $\varphi \in L^2(G)$ определена с помощью формулы

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \quad \omega \in G^*.$$

Система $\{\varphi(\cdot \oplus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда полином m удовлетворяет модифицированному условию Коэна.

Этот аналог теоремы Коэна (см. [10; теорема 6.3.1]) доказан в [16].

3. Доказательства теорем. Пусть функция $\varphi \in L^2(G)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (2) и условию $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Применив преобразование Фурье, из (2) получим

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \quad (16)$$

где

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)} \quad (17)$$

– маска уравнения (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку $W_\alpha^*(\theta) = \widehat{\varphi}(\theta) = 1$, после подстановки в (16) и (17) значения $\omega = \theta$ получаем равенство

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1.$$

Пусть s – наибольшее целое число такое, что

$$\mu\{x \in U_{0,s-1} \mid \varphi(x) \neq 0\} > 0,$$

где $U_{0,s-1} = h_{[s-1]} \oplus U$. Предположим, что $s \geq p^{n-1} + 1$. Тогда произвольный элемент x из $U_{0,s-1}$ имеет вид

$$x = (\dots, 0, 0, x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad (18)$$

где

$$x_{-k}p^k + x_{-k+1}p^{k-1} + \dots + x_{-1}p + x_0 = s-1, \quad x_{-k} \neq 0, \quad k \geq n-1. \quad (19)$$

Выберем этот элемент так, чтобы число $\lambda(x)$ не было p -ично рациональным (тогда среди компонент x_j с положительными индексами имеется бесконечное число отличных от нуля). Для любого $\alpha \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ элемент $y^{(\alpha)} = Ax \ominus h_{[\alpha]}$ имеет вид

$$y^{(\alpha)} = (\dots, 0, y_{-k-1}^{(\alpha)}, y_{-k}^{(\alpha)}, \dots, y_{-1}^{(\alpha)}, y_0^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \dots), \quad k+1 \geq n,$$

где $y_{-k-1}^{(\alpha)} = x_{-k} \neq 0$ и среди цифр $y_j^{(\alpha)}$, $j \geq 0$, имеются отличные от нуля. Следовательно,

$$\lambda(Ax \ominus h_{[\alpha]}) > p^n \quad \text{для п.в. } x \in U_{0,s-1}. \quad (20)$$

Если $s \leq p^n$, то из (20) получаем, что $\varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,s-1}$. Но тогда в силу (2) $\varphi(x) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,s-1}$, что противоречит выбору s . Поэтому $s \geq p^n + 1$. Пользуясь этим неравенством, для любого $\alpha \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ из (18) и (19) получаем

$$\lambda(Ax \ominus h_{[\alpha]}) > p(s-1) - (p^n - 1) \geq 2(s-1) - (s-2) = s.$$

Отсюда, как и выше, следует, что $\varphi(x) = 0$ для п.в. $x \in U_{0,s-1}$. Поэтому $s \leq p^{n-1}$ и $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$.

Докажем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega). \quad (21)$$

Так как φ финитна и принадлежит $L^2(G)$, то она принадлежит и $L^1(G)$. Поскольку $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$, то $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$ (предложение 2). В силу условия $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$ получаем, что $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ для $\omega \in U_{n-1}^*$. С другой стороны, $m(\omega) = 1$ при $\omega \in U_{n-1}^*$. Значит, для любого натурального l

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(B^{-l-n}\omega) \prod_{j=1}^{l+n} m(B^{-j}\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \quad \omega \in U_{-l}^*.$$

Поэтому верно равенство (21) и решение φ единственно.

Пользуясь предложением 1, для любого $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ имеем

$$\widehat{\varphi}(h^*) = \widehat{\varphi}(h^*) \prod_{s=0}^{j-1} m(B^s h^*) = \widehat{\varphi}(B^j h^*) \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$ (так как $\varphi \in L^1(G)$ и $m(B^s h^*) = 1$ в силу равенства $m(\theta) = 1$ и периодичности m). Отсюда следует, что

$$\widehat{\varphi}(h^*) = 0, \quad h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}. \quad (22)$$

Применяя теперь формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{h \in H} \varphi(x \oplus h) = \sum_{h^* \in H^\perp} \widehat{\varphi}(h^*) \chi(x, h^*),$$

пользуясь (22) и условием $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, получаем

$$\sum_{h \in H} \varphi(x \oplus h) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in G.$$

Теорема 1 доказана.

ЛЕММА 1. Пусть φ – финитное L^2 -решение уравнения (2) такое, что $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Функция φ нестабильна тогда и только тогда, когда маска t уравнения (2) имеет блокированное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1 и предложение 2, имеем $\text{supp } \varphi \subset U_{1-n}$ и $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}(G^*)$. Предположим, что функция φ нестабильна. При доказательстве предложения 3 было установлено, что если нестабильная функция $f \in L^2(G)$ имеет носитель в U_{1-n} , то существует множество $X = U_{n-1,s}^*$ такое, что все точки множества X являются периодическими нулями преобразования Фурье $\widehat{f}$ (и любой периодический нуль $\omega \in U^*$ для $\widehat{f}$ расположен в таком множестве X). Поэтому множество

$$M_0 = \{\omega \in U^* \mid \widehat{\varphi}(\omega + h^*) = 0 \text{ для всех } h^* \in H^\perp\}$$

представимо в виде объединения некоторых из множеств $U_{n-1,s}^*$, $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$. Поскольку $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то M_0 не содержит $U_{n-1,0}^*$. Кроме того, если $\omega \in M_0$, то по формуле (16)

$$m(B^{-1}\omega + B^{-1}h^*)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega + B^{-1}h^*) = 0 \quad \text{для всех } h^* \in H^\perp$$

и, следовательно, элементы $B^{-1}\omega + B^{-1}\omega_{[l]}$, $l = 0, 1, \dots, p-1$, принадлежат либо M_0 , либо $\text{Null } m$. Таким образом, если φ нестабильна, то множество M_0 является блокированным множеством для m .

Обратно, пусть маска t имеет блокированное множество M . Покажем, что тогда каждый элемент из M является периодическим нулем для $\widehat{\varphi}$ (и, следовательно, по предложению 3 функция φ нестабильна). Предположим, что существуют $\omega \in M$ и $h^* \in H^\perp$ такие, что $\widehat{\varphi}(\omega \oplus h^*) \neq 0$. Выберем натуральное число j , для которого $B^{-j}(\omega \oplus h^*) \in U_{n-1}^*$, а затем для каждого $r \in \{0, 1, \dots, j\}$ найдем $u_r^* \in U^*$, $h_r^* \in H^\perp$ такие, что

$$B^{-r}(\omega \oplus h^*) = u_r^* \oplus h_r^*.$$

Далее, для каждого $r \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ возьмем $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ такое, что

$$B^{-1}h_r^* = B^{-1}\omega_{[l]} \oplus \omega_r^*,$$

где $\omega_r^* \in H^\perp$. Тогда

$$u_{r+1}^* \oplus h_{r+1}^* = B^{-r-1}(\omega \oplus h^*) = B^{-1}(u_r^* \oplus h_r^*) = (B^{-1}u_r^* \oplus B^{-1}\omega_{[l]}) \oplus \omega_r^*$$

и, следовательно,

$$u_{r+1}^* = \omega B^{-1}u_r^* \oplus B^{-1}\omega_{[l]}, \quad l = l(r) \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Отсюда видно, что если $u_r^* \in M$, то $u_{r+1}^* \in T_p M$. Кроме того, из равенств

$$\widehat{\varphi}(\omega \oplus h^*) = \widehat{\varphi}(B^{-j}(\omega \oplus h^*)) \prod_{r=1}^j m(B^{-r}(\omega \oplus h^*)) = \widehat{\varphi}(u_j^*) \prod_{r=1}^j m(u_r^*)$$

следует, что все $u_r^* \notin \text{Null } m$. Таким образом, если $u_r^* \in M$, то $u_{r+1}^* \in M$. Поскольку $u_0^* = \omega \in M$, отсюда следует, что все $u_r^* \in M$. Это противоречит тому, что $u_j^* = B^{-j}(\omega \oplus h^*) \in U_{n-1}^*$ и множество M не содержит $U_{n-1}^* = U_{n-1,0}^*$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть маска m масштабирующего уравнения (2) удовлетворяет условиям

$$m(\theta) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in G^*. \quad (23)$$

Тогда функция φ , заданная равенством

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \quad (24)$$

является L^2 -решением уравнения (2), причем $\|\varphi\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поточечная сходимость произведения в (24) следует из того, что маска m равна 1 на множестве $U_{n,0}^*$ (так что для любого $\omega \in G^*$ только конечное число множителей в (24) может быть отлично от 1). Обозначим через $g(\omega)$ правую часть равенства (24). Из (23) следует, что $|m(\omega)| \leq 1$ для всех $\omega \in G^*$. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$|g(\omega)|^2 \leq \prod_{j=1}^s |m(B^{-j}\omega)|^2$$

и, следовательно,

$$\int_{U_{-l}^*} |g(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) \leq \int_{U_{-l}^*} \prod_{j=1}^s |m(B^{-j}\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = 2^s \int_{U^*} \prod_{j=0}^{s-1} |m(B^j\omega)|^2 d\mu^*(\omega). \quad (25)$$

Из равенств

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_{\alpha} \overline{W_{\alpha}^*(\omega)}, \quad W_{\alpha}^*(\omega) \overline{W_{\beta}^*(\omega)} = W_{\alpha \ominus \beta}^*(\omega),$$

видно, что

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} c_{\alpha} W_{\alpha}^*(\omega), \quad (26)$$

где коэффициенты c_{α} вычисляются по a_{α} . Подставим (26) во второе из равенств (23) и воспользуемся тем, что если α кратно p , то

$$\sum_{l=0}^{p-1} W_{\alpha}^*(\delta_l) = p,$$

а для остальных α эта сумма равна 0. В результате получим $c_0 = 1/p$ и $c_{\alpha} = 0$ для ненулевых α , кратных p . Значит, верно равенство

$$|m(\omega)|^2 = \frac{1}{p} + \sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1} \sum_{l=1}^{p-1} c_{p\alpha+l} W_{p\alpha+l}^*(\omega).$$

Отсюда получаем, что

$$\prod_{j=0}^{s-1} |m(B^j\omega)|^2 = p^{-s} + \sum_{\gamma=1}^{\sigma(s)} b_{\gamma} W_{\gamma}^*(\omega), \quad \sigma(s) \leq sp^{n-1}(p-1),$$

где каждый из коэффициентов b_γ равен произведению некоторых коэффициентов $c_{p\alpha+l}$, $l = 1, \dots, p-1$. Учитывая, что

$$\int_{U^*} W_\gamma^*(\omega) d\mu^*(\omega) = 0, \quad \gamma \in \mathbb{N},$$

имеем

$$\int_{U^*} \prod_{j=0}^{s-1} |m(B^j \omega)|^2 d\mu^*(\omega) = p^{-s}.$$

Подставляя в (25), для произвольного $l \in \mathbb{N}$ выводим неравенство

$$\int_{U_{-l}^*} |g(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) \leq 1$$

и, следовательно,

$$\int_{G^*} |g(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) \leq 1. \quad (27)$$

Пусть теперь $\varphi \in L^2(G)$ и $\widehat{\varphi} = g$. Тогда из (24) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega)$$

и, значит, φ удовлетворяет уравнению (2). Кроме того, по предложению 1 из (27) получаем, что $\|\varphi\| \leq 1$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть φ – финитное L^2 -решение уравнения (2) такое, что $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$. Система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда маска t уравнения (2) не имеет блокированных множеств и удовлетворяет условию

$$\sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in G^*. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то условие (28) выполнено (см. [6; § 3]), а отсутствие блокированных множеств следует из леммы 1 и предложения 3.

Обратно, пусть маска t не имеет блокированных множеств и условие (28) выполнено. Положим

$$\Phi(\omega) := \sum_{h^* \in H^\perp} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus h^*)|^2. \quad (29)$$

Очевидно, функция Φ неотрицательна и обладает свойством $H^\perp$ -периодичности. В силу предложения 4 достаточно проверить, что $\Phi(\omega) \equiv 1$. Пусть

$$a = \inf\{\Phi(\omega) \mid \omega \in U^*\}.$$

Из теоремы 1 и предложения 2 следует, что функция Φ (как и $\widehat{\varphi}$) постоянна на множествах $U_{n-1,s}^*$, $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$. Если Φ обращается в нуль на одном из множеств $U_{n-1,s}^*$, то функция $\widehat{\varphi}$ имеет периодический нуль и, значит, φ нестабильна. Согласно предложению 3 и лемме 1 это противоречит отсутствию блокированных множеств у маски t . Значит, число a положительно. Кроме того, учитывая модифицированное условие Стрэнга–Фикса (см. теорему 1), имеем $\Phi(\theta) = 1$. Таким образом, $0 < a \leq 1$.

Заметим, что из (16) и (29) следует равенство

$$\Phi(\omega) = \sum_{l=0}^{p-1} |m(B^{-1}\omega \ominus \delta_l)|^2 \Phi(B^{-1}\omega \ominus \delta_l). \quad (30)$$

Пусть теперь $M_a = \{\Phi(\omega) = a \mid \omega \in U^*\}$. Если $0 < a < 1$, то из (28) и (30) следует, что для любого $\omega \in M_a$ элементы $B^{-1}\omega \ominus \delta_l$, $l = 0, 1, \dots, p-1$, принадлежат либо M_a , либо $\text{Null } m$. Следовательно, M_a – блокированное множество, что противоречит условию. Таким образом, $\Phi(\omega) \geq 1$ для всех $\omega \in U^*$. Отсюда и из равенств

$$\int_{U^*} \Phi(\omega) d\mu^*(\omega) = \sum_{h^* \in H^\perp} \int_{U^* \oplus h^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = \int_{G^*} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) = \|\varphi\|^2$$

по лемме 2 получаем, что

$$\int_{U^*} \Phi(\omega) d\mu^*(\omega) = 1.$$

Повторно применяя неравенство $\Phi(\omega) \geq 1$ и пользуясь тем, что функция Φ постоянна на множествах $U_{n-1,s}^*$, $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$, заключаем, что $\Phi(\omega) \equiv 1$. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть для маски m выполнено любое из условий (b) или (c). Тогда из предложения 6 и леммы 3 следует, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$. Подпространства V_j , $j \in \mathbb{Z}_+$, определим по формуле (1). По предложению 5 имеем $\cap V_j = \{0\}$. Вложения $V_j \subset V_{j+1}$ следуют из того, что φ удовлетворяет уравнению (2), а равенство

$$\overline{\cup V_j} = L^2(G)$$

доказывается точно так же, как в [6; с.206]. Таким образом, верны импликации (b) $\Rightarrow$ (a) и (c) $\Rightarrow$ (a). Обратные импликации следуют из предложения 6 и леммы 3. Теорема 2 доказана.

4. Примеры. Приведем примеры функций φ , удовлетворяющих уравнению (2) и генерирующих КМА в $L^2(G)$. Напомним, что через $\mathbf{1}_E$ обозначается характеристическая функция множества $E \subset G$.

ПРИМЕР 1. Если $a_0 = \dots = a_{p-1} = 1/p$ и все $a_\alpha = 0$ для $\alpha \geq p$, то решением уравнения (2) является функция $\varphi = \mathbf{1}_{U_{n-1}}$; в частности, при $n = 1$ уравнению (2) удовлетворяет функция Хаара: $\varphi = \mathbf{1}_U$ (сравните с [2; § 5.1], [6; замечание 1.3]).

ПРИМЕР 2. Пусть $p = n = 2$ и

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = b,$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Положим

$$a_0 = \frac{1+a+b}{4}, \quad a_1 = \frac{1+a-b}{4}, \quad a_2 = \frac{1-a-b}{4}, \quad a_3 = \frac{1-a+b}{4}.$$

При $a \neq 0$ модифицированное условие Коэна выполнено на множестве $E = U^*$ и соответствующее решение φ генерирует КМА в $L^2(G)$. В частности, при $a = 1$ и

$a = -1$ получаются соответственно функция Хаара: $\varphi(x) = \mathbf{1}_U(x)$ и смещенная функция Хаара: $\varphi(x) = \mathbf{1}_U(x \ominus h_{[1]})$. Если $0 < |a| < 1$, то решение φ определяется (см. [3]) разложением

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_U(A^{-1}x) \left(1 + a \sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x) \right), \quad x \in G.$$

В случае $a = 0$ множество $U_{1,1}^*$ является блокированным для маски уравнения (2), функция φ определяется по формуле $\varphi(x) = (1/2)\mathbf{1}_U(A^{-1}x)$ и система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно зависима (так как $\varphi(x) = \varphi(x \ominus h_{[1]})$).

В следующем примере указана масштабирующая функция в $L^2(G)$, представляемая в виде линейной комбинации конечного числа обобщенных функций Уолша. При этом соответствующая маска удовлетворяет неравенству (8) при некотором E , отличном от U^* .

ПРИМЕР 3. Пусть $p = 2$, $n = 3$ и

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = b, \quad b_3 = c, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \alpha, \quad b_6 = \beta, \quad b_7 = \gamma,$$

где

$$|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

Значениями $b_0, b_1, \dots, b_7$ коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_7$ уравнения (2) определяются однозначно, а выражения этих коэффициентов через параметры $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ получаются по формуле (5):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{8} (1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma), & a_1 &= \frac{1}{8} (1 + a + b + c - \alpha - \beta - \gamma), \\ a_2 &= \frac{1}{8} (1 + a - b - c + \alpha - \beta - \gamma), & a_3 &= \frac{1}{8} (1 + a - b - c - \alpha + \beta + \gamma), \\ a_4 &= \frac{1}{8} (1 - a + b - c - \alpha + \beta - \gamma), & a_5 &= \frac{1}{8} (1 - a + b - c + \alpha - \beta + \gamma), \\ a_6 &= \frac{1}{8} (1 - a - b + c - \alpha - \beta + \gamma), & a_7 &= \frac{1}{8} (1 - a - b + c + \alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

В примере 1.5 из [6] найдено разложение соответствующего решения φ в ряд Уолша:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_U(y) (1 + aW_1(y) + abW_2(y) + acW_3(y) + abaW_5(y) \\ &\quad + ac\beta W_6(y) + ac\gamma W_7(y) + ab^2\alpha W_{10}(y) + abc\alpha W_{11}(y) + ac\alpha\beta W_{13}(y) \\ &\quad + ac\beta\gamma W_{14}(y) + ac\gamma^2 W_{15}(y) + ab^2\alpha^2 W_{21}(y) + abc\alpha\beta W_{22}(y) + aba\beta\gamma W_{23}(y) \\ &\quad + abc\alpha\beta W_{26}(y) + ac^2\alpha\beta W_{27}(y) + ac\alpha\beta\gamma W_{29}(y) + ac\beta\gamma^2 W_{30}(y) + \dots), \quad (31) \end{aligned}$$

где $y = A^{-2}x$. Блокированными множествами для маски

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^7 a_{\alpha} W_{\alpha}^*(\omega)$$

являются:

$$1) \ U_{1,1}^* \cup U_{2,1}^* \text{ при } a = 0,$$

- 2) $U_{2,1}^* \cup U_{2,2}^*$ при $a = \beta = 0$,
- 3) $U_{2,3}^*$ при $c = 0$,
- 4) $U_{1,1}^*$ при $b = c = 0$.

Если $a = 0$ или $c = 0$, то система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ линейно зависима. Если же a и c ненулевые, то функция φ генерирует КМА в $L^2(G)$. Неравенство (8) в случае $abc \neq 0$ выполнено для $E = U^*$, а в случае $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ оно имеет место для

$$E = B(U_{3,0}^* \cup U_{3,1}^* \cup U_{3,3}^* \cup U_{3,6}^*).$$

В частности, при $a = c = 1, 0 \leq |b| < 1$, из (31) получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} \mathbf{1}_U(y)(1 + W_1(y) + bW_2(y) + W_3(y) + \beta W_6(y)), \quad y = A^{-2}x$$

(сравните с примером 3 в [11] и примерами 2 и 4 в [14]).

ПРИМЕР 4. Пусть $p = 3, n = 2$ и

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = \alpha, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = b, \quad b_5 = \beta, \quad b_6 = 0, \quad b_7 = c, \quad b_8 = \gamma,$$

где

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1.$$

Согласно (5) коэффициенты уравнения (2) в рассматриваемом случае вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{9} (1 + a + b + c + \alpha + \beta + \gamma),$$

$$a_1 = \frac{1}{9} (1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \gamma)\varepsilon_3), \quad a_2 = \frac{1}{9} (1 + a + \alpha + (b + \beta)\varepsilon_3 + (c + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$a_3 = \frac{1}{9} (1 + (a + b + c)\varepsilon_3^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3), \quad a_4 = \frac{1}{9} (1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3^2 + (b + \alpha)\varepsilon_3),$$

$$a_5 = \frac{1}{9} (1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3^2 + (c + \alpha)\varepsilon_3), \quad a_6 = \frac{1}{9} (1 + (a + b + c)\varepsilon_3 + (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_3^2),$$

$$a_7 = \frac{1}{9} (1 + b + \gamma + (a + \beta)\varepsilon_3 + (c + \alpha)\varepsilon_3^2), \quad a_8 = \frac{1}{9} (1 + c + \beta + (a + \gamma)\varepsilon_3 + (b + \alpha)\varepsilon_3^2),$$

где $\varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$. Блокированными множествами для соответствующей маски t являются:

- 1) $U_{1,1}^*$ при $a = c = 0$,
- 2) $U_{1,2}^*$ при $\alpha = \beta = 0$,
- 3) $U_{1,1}^* \cup U_{1,2}^*$ при $a = \alpha = 0$.

Пусть

$$\Lambda = \{1, 2\} \cup \left\{ \sum_{j=0}^k l_j 3^j \mid l_j \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, \dots\}.$$

Для $s \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ положим $\gamma(i_1, i_2) = b_s$, если $s = i_1 + 3i_2, i_1, i_2 \in \{0, 1, 2\}$, т.е.

$$\gamma(1, 0) = a, \quad \gamma(2, 0) = \alpha, \quad \gamma(1, 1) = b, \quad \gamma(2, 1) = \beta, \quad \gamma(1, 2) = c, \quad \gamma(2, 2) = \gamma.$$

Далее, произвольное $l \in \Lambda$ запишем в виде

$$l = \sum_{j=0}^k l_j 3^j, \quad l_j \in \{0, 1, 2\}, \quad k = k(l) \in \mathbb{Z}_+,$$

и положим

$$\begin{aligned} c_l[m] &= \gamma(l_0, 0), & \text{если } k = k(l) = 0; \\ c_l[m] &= \gamma(l_1, 0)\gamma(l_0, l_1), & \text{если } k = k(l) = 1; \\ & \dots\dots\dots \\ c_l[m] &= \gamma(l_k, 0)\gamma(l_{k-1}, l_k) \cdots \gamma(l_0, l_1), & \text{если } k = k(l) \geq 1. \end{aligned}$$

Решение уравнения (2) представимо (см. [6]) в виде ряда

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \mathbf{1}_U(A^{-1}x) \left(1 + \sum_{l \in \Lambda} c_l[m] W_l(A^{-1}x) \right), \quad x \in G. \quad (32)$$

Учитывая приведенные выше выражения для блокированных множеств, по теореме 2 получаем, что функция (32) генерирует КМА в $L^2(G)$ в следующих трех случаях:

- 1) $a \neq 0, \alpha \neq 0,$
- 2) $a = 0, \alpha \neq 0, c \neq 0,$
- 3) $\alpha = 0, a \neq 0, \beta \neq 0.$

ПРИМЕР 5. Предположим, что для некоторых чисел $b_s, 0 \leq s \leq p^n - 1$, равенства (7) выполнены. Применив формулы (5), найдем коэффициенты маски

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha^*(\omega)},$$

принимающей на смежных классах $U_{n,s}^*, 0 \leq s \leq p^n - 1$, значения b_s . Если дополнительно известно, что $b_j \neq 0$ для $j \in \{1, 2, \dots, p^{n-1} - 1\}$, то уравнение (2) с найденными коэффициентами a_α имеет решение, генерирующее КМА в $L^2(G)$ (модифицированное условие Коэна выполнено для $E = U^*$). Разложение этого решения в лакунарный ряд по обобщенным функциям Уолша находится методом, указанным в [6].

При $p = 2$ из примера 5 получаются масштабирующие функции в $L^2(G)$, аналогичные масштабирующим функциям Добеши (см. [10; § 6.4]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Holshneider, *Wavelets: an Analysis Tool*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [2] J. J. Benedetto, R. L. Benedetto, "A wavelet theory for local fields and related groups", *J. Geom. Anal.*, **14**:3 (2004), 423–456.
- [3] W. C. Lang, "Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group", *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:1 (1996), 305–312.
- [4] W. C. Lang, "Wavelet analysis on the Cantor dyadic group", *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.

- [5] W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.
- [6] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.
- [7] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 1: Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп, Наука, М., 1975; т. 2: Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах, Мир, М., 1975.
- [8] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [9] Ю. А. Фарков, “Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах”, *Функц. анализ и его прил.*, **31**:4 (1997), 86–88.
- [10] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001.
- [11] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.
- [12] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.
- [13] В. Н. Малоземов, С. М. Машарский, “Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 111–157.
- [14] Yu. A. Farkov, “Orthogonal p -wavelets on $\mathbb{R}_+$ ”, *Wavelets and Splines*, International conference on wavelets and splines (St. Petersburg, Russia, July 3–8, 2003), St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005, 4–26.
- [15] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2006.
- [16] С. А. Бычков, Ю. А. Фарков, “О теореме Коэна для вейвлет-разложений на группах”, *VI Международная конференция “Новые идеи в науках о Земле”* (Москва, апрель 2003 г.), Избранные доклады, МГГРУ, Москва, 2003, 226–238.

Ю. А. Фарков

Российский государственный геологоразведочный университет

E-mail: farkov@msgpa.ru

Поступило

18.10.2006