Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Тензорные произведения алгебр и их применения к построению диффеоморфизмов Аносова, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 811–821

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:47:47

Тензорные произведения алгебр и их применения к построению диффеоморфизмов Аносова

В. В. Горбацевич

Статья посвящена развитию алгебраических подходов к построению диффеоморфизмов Аносова на компактных многообразиях. Приводятся две двойственные между собой конструкции, дающие очень много новых примеров диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях. Эти конструкции основаны на операции тензорного произведения алгебр Ли на подходящие конечномерные ассоциативно-коммутативные алгебры. Общие методы построения диффеоморфизмов Аносова в статье иллюстрированы на нескольких примерах.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть M – некоторое компактное нильмногообразие, т.е. компактное многообразие вида N/Γ , где N – односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ – решетка в N (т.е. дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством). В статье указаны методы построения диффеоморфизмов Аносова на некоторых классах таких многообразий M . Ее можно рассматривать как своего рода позитивное дополнение к работе [1], в которой рассматривались некоторые “негативные” результаты – необходимые условия существования диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях и, как их следствия, случаи отсутствия диффеоморфизмов Аносова на некоторых классах нильмногообразий. Основные определения, связанные с диффеоморфизмами Аносова и используемые в данной статье, можно найти в [1].

Напомним, что построение практически всех до сих пор известных диффеоморфизмов Аносова на компактных многообразиях тесно связано с алгебраическими конструкциями, базирующимися на некоторых специальных автоморфизмах (называемых *гиперболическими*) нильпотентных групп Ли. Такого рода диффеоморфизмы Аносова называются *алгебраическими*. Ими исчерпываются все диффеоморфизмы Аносова на нильмногообразиях.

В последние годы заметно возросло число работ, посвященных явным построениям диффеоморфизмов Аносова на компактных нильмногообразиях. В частности, было доказано существование диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях свободных нильпотентных групп Ли с ≥ 3 образующими. Это было сделано впервые в работе [2], более конструктивно этот вопрос был рассмотрен в [3], где на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00647).

таких нильногообразиях (хотя только для некоторых частных случаев) явно построены диффеоморфизмы Аносова. В ноябре 2004 г. было анонсировано существование простого доказательства существования таких диффеоморфизмов [4], детали к моменту написания данной статьи (осень 2006 г.) еще не были опубликованы. В [5] было доказано существование диффеоморфизмов Аносова на нильногообразиях, связанных с нильпотентными алгебрами Ли вида $L \oplus L$ – прямыми суммами двух экземпляров градуированных рациональных (т.е. имеющих $\mathbb{Q}$ -структуру) алгебр Ли L . Такими L являются, например, стандартные нильпотентные подалгебры в полупростых алгебрах Ли и многие другие (в частности, алгебры Гейзенберга и их обобщения). Кроме того, имеется классификация всех диффеоморфизмов Аносова на нильногообразиях размерности ≤ 6 [6] и даже ≤ 8 [7].

Напомним, что автоморфизм группы Ли называется *гиперболическим*, если характеристические корни его дифференциала (который является автоморфизмом соответствующей алгебры Ли) по модулю отличны от единицы. Именно гиперболические автоморфизмы нильпотентных групп Ли (или, что эквивалентно, алгебр Ли) порождают алгебраические диффеоморфизмы Аносова на нильногообразиях N/G . Но при этом еще необходимо (и достаточно), чтобы группа Ли N (или, что эквивалентно, ее алгебра Ли) имела $\mathbb{Q}$ -структуру и указанный автоморфизм сохранял бы эту структуру. Наличие же рациональной структуры для нильпотентной группы Ли эквивалентно существованию в ней решетки (подробнее см. [1]). Все это указывает на большое значение рациональных структур на нильпотентных группах Ли и алгебрах Ли для построения диффеоморфизмов Аносова. Отметим, что первый пример диффеоморфизма Аносова на нетривиальном нильногообразии (отличном от тора) был построен Смейлом [8].

Цели данной статьи – развитие алгебраических подходов к построению диффеоморфизмов Аносова. Будет приведена конструкция, которая дает очень много различных примеров нильпотентных алгебр Ли и диффеоморфизмов Аносова на соответствующих нильногообразиях. Идея конструкции – тензорное произведение алгебр Ли на подходящие ассоциативно-коммутативные (так мы будем сокращенно называть алгебры, одновременно ассоциативные и коммутативные) конечномерные алгебры. Такое тензорное произведение в различных частных случаях уже использовалось в других областях математики (см., например, [9], [10]), однако в полной общности в алгебре подобный подход, видимо, до сих пор не употреблялся. Идея тензорного умножения на конечномерные ассоциативно-коммутативные алгебры имела заметное развитие в геометрии (см., например, [11] и другие работы тех же авторов) и при изучении интегрируемости дифференциальных уравнений (см. [12]).

Основным результатом являются две теоремы (теоремы 1 и 2), точнее, два общих метода построения конкретных примеров диффеоморфизмов Аносова на компактных нильногообразиях. Первая из этих теорем имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – нильпотентная алгебра Ли, определенная над $\mathbb{Q}$ и имеющая гиперболический автоморфизм, определенный над $\mathbb{Q}$. Далее, пусть A – некоторая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра, тоже определенная над $\mathbb{Q}$. Тогда в односвязной группе Ли N_A , соответствующей нильпотентной алгебре Ли $L \otimes A$, существует такая решетка Π , что на компактном нильногообразии N_A/Π существует диффеоморфизм Аносова.

В частности, если на некотором компактном нильногообразии N/Γ существует диффеоморфизм Аносова, то и на нильногообразии N_A/Π , ему соответствующем, тоже существует диффеоморфизм Аносова (при подходящей решетке Π).

Вторая теорема в каком-то смысле двойственна к первой и будет сформулирована ниже.

Начнем систематическое изложение с необходимых для дальнейшего общих рассуждений. Пусть A – некоторая ассоциативная и коммутативная конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$. Структура таких алгебр хорошо известна (как частный случай теоремы Веддерберна–Мальцева): конечномерная вещественная коммутативно-ассоциативная алгебра разлагается в сумму полупростой подалгебры и нильпотентного идеала (состоящего из всех элементов алгебры, некоторая степень которых равна нулю).

Любая полупростая коммутативно-ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{R}$ изоморфна прямой сумме нескольких экземпляров полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (см., например, [12]–[14]). Что касается описания нильпотентных коммутативно-ассоциативных алгебр, то ситуация здесь примерно такая же, как в случае нильпотентных алгебр Ли. Другими словами, явного описания или классификации здесь нет и не предвидится. Имеется только один общий результат – представление любой конечномерной коммутативно-ассоциативной нильпотентной алгебры в виде фактор-алгебры кольца полиномов без свободного члена от нескольких переменных по некоторому полиномиальному идеалу (это аналог представления нильпотентной алгебры Ли в виде фактор-алгебры свободной нильпотентной алгебры Ли по некоторому идеалу). Дальнейшее изучение нильпотентных алгебр часто упирается в изучение этих идеалов и тут уже на самых первых шагах возникают нетривиальные вопросы, связанные с алгебраической геометрией. Но оказывается, что для наших целей будет достаточно лишь простейших сведений об ассоциативно-коммутативных алгебрах (подробнее о них см., например, [12]–[14]).

Пусть A – некоторая ассоциативно-коммутативная алгебра (все алгебры будут у нас подразумеваться конечномерными и определенными над полем $\mathbb{R}$). Тогда, взяв любую алгебру Ли L , построим тензорное произведение $L \otimes A$. Структура алгебры Ли на векторном пространстве $L \otimes A$ вводится следующим образом:

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = ([X, Y], ab);$$

здесь $X, Y \in L$, $a, b \in A$. Из коммутативности и ассоциативности алгебры A легко выводится, что так определенная операция коммутирования превращает $L \otimes A$ в (конечномерную) алгебру Ли. Более точно, коммутативность алгебры A нужна для того, чтобы операция коммутирования на $L \otimes A$ была антикоммутативной. Если алгебра Ли L 2-нильпотентна (т.е. если $[[L, L], L] = \{0\}$), то операция коммутирования на $L \otimes A$ всегда удовлетворяет тождеству Якоби. При произвольных же алгебрах Ли L выполнение тождества Якоби для $L \otimes A$ требует ассоциативности алгебры A . Если алгебра A имеет единицу, то алгебра Ли L может естественным образом рассматриваться как подалгебра Ли в $L \otimes A$.

Рассмотрим теперь некоторый автоморфизм f исходной алгебры Ли L . Он естественным образом индуцирует автоморфизм $f \otimes A$ (который иногда для краткости мы будем обозначать просто как f) алгебры Ли $L \otimes A$. При этом если f гиперболичен, то таковым получится и $f \otimes A$; набор различных собственных значений автоморфизма при тензорном произведении не изменится, только возрастет (умножится

на $\dim A$) их кратность. Далее, предположим, что алгебра A имеет рациональную структуру (т.е. в некотором базисе ее структурные константы рациональны). Тогда если и алгебра Ли L имеет рациональную структуру, то $\mathbb{Q}$ -структуру всегда будет иметь и алгебра Ли $L \otimes A$, причем если автоморфизм f сохраняет рациональную структуру на L , то и $f \otimes A$ сохраняет рациональную структуру на $L \otimes A$ и на соответствующей ей односвязной нильпотентной группе Ли N_A . Тем самым, мы получаем возможность строить рациональные структуры и соответствующие им решетки в полученных нильпотентных группах Ли и диффеоморфизмы Аносова на новых нильногообразиях. Приведенными рассуждениями нами доказана теорема 1, сформулированная выше.

Можно дать и прямую конструкцию нильпотентных групп Ли N_A (выше такая группа Ли вводится косвенно – через свою алгебру Ли), соответствующих алгебрам Ли $L \otimes A$. Особенно просто она выглядит в случае, когда алгебра A нильпотентна. Приведем эту конструкцию.

Пусть G – некоторая связная n -мерная группа Ли. Через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначим локальные координаты в некоторой окрестности U единичного элемента $e = (0, 0, \dots, 0)$ группы Ли G . Групповая операция на G задается отображением $\mu: G \times G \rightarrow G$, удовлетворяющем хорошо известным условиям. Положим $(z_1, z_2, \dots, z_n) = \mu(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ – так групповая операция $z = xy$ задается в локальных координатах. Имеем разложение по формуле Тейлора для z_i (сходящееся в некоторой окрестности нуля):

$$z_i = \sum_{l+m=k, |k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{D^k \mu_i}{\partial x^l \partial y^m} x^l y^m,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $m = (m_1, \dots, m_n)$, $x^l = x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, $y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$, $k! = k_1! k_2! \dots k_n!$.

Пусть теперь A – некоторая нильпотентная ассоциативно-коммутативная алгебра класса нильпотентности p . Образует тензорное произведение $L \otimes A$.

Отметим, что если b, a – это классы нильпотентности алгебр L и A соответственно (если же алгебра не нильпотентна, то ее класс нильпотентности полагаем равным ∞), то класс нильпотентности алгебры Ли $L \otimes A$ равен $\min(a, b)$. В частности, если алгебра Ли L 2-нильпотентна, а A имеет нетривиальное умножение, то $L \otimes A$ будет 2-нильпотентной алгеброй Ли.

Рассмотрим декартову степень A^n как векторное пространство и в нем координаты $X_1, \dots, X_n$, где $X_i \in A$. Положим

$$Z_i = \sum_{l+m=k, |k|=0}^p \frac{1}{k!} \frac{D^k \mu_i}{\partial x^l \partial x^m} X^l Y^m;$$

здесь сумма конечна (так как A нильпотентна), она составлена из произведений рациональных чисел и элементов алгебры A . Нетрудно убедиться, что так заданное отображение $(X, Y) \rightarrow Z$ дает нам групповую операцию на векторном пространстве A^n . Более того, мы получаем на A^n , как легко понять, структуру нильпотентной односвязной группы Ли. Полученная группа Ли, как легко проверить, изоморфна введенной выше группе Ли N_A (если L – это алгебра Ли группы Ли G). Эта

конструкция может быть использована во многих конструкциях, связанных с нильпотентными группами Ли, в том числе – в геометрических конструкциях (некоторые детали будут опубликованы позднее). Можно дать и другое описание групповой структуры на N_A – на основе формулы Бейкера–Хаусдорфа–Дынкина (примененной к A -значным переменным). Так или иначе, мы получаем конструкцию групповых объектов в категории гладких многообразий над алгебрами (которые находят широкое применение в геометрии – см., например, [10]).

О некоторых примерах алгебр Ли L , удовлетворяющих условиям нашей теоремы 1, было сказано в [1] и в этой статье выше, а некоторые примеры подходящих алгебр A приводятся ниже.

Отметим, что известны некоторые достаточные условия представимости алгебр Ли в виде тензорного произведения на некоторую ассоциативно-коммутативную алгебру. Например, в [15] доказано, что если алгебра Ли L распадается в прямую сумму простых попарно изоморфных модулей относительно некоторой полупростой подалгебры алгебры дифференцирований $\text{Der}(L)$ и L – не нильпотентна длины 2, то она может быть представлена в виде $S \otimes A$, где алгебра Ли S проста, а A – некоторая ассоциативно-коммутативная алгебра.

Переходим к более детальному рассмотрению вопроса о построении диффеоморфизмов Аносова на основе операции тензорного произведения.

Предположим вначале, что алгебра A проста. Тогда она, как известно, изоморфна $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тензорное умножение алгебры Ли L на $\mathbb{R}$ оставляет L без изменения (с точностью до изоморфизма, конечно), а тензорное умножение на $\mathbb{C}$ дает комплексификацию $L^{\mathbb{C}}$ исходной алгебры Ли L . Пусть $M = N/\Gamma$ – некоторое нильмногообразие нильпотентной группы Ли N , на котором имеется диффеоморфизм Аносова (обязательно алгебраический – подробнее см. [1]). Тогда на соответствующей алгебре Ли $L = L(N)$ имеется рациональная структура, а сама группа Ли N является алгебраической группой, определенной над $\mathbb{Q}$. Решетка Γ будет соизмерима с подгруппой целых точек $N_{\mathbb{Z}}$ алгебраической группы N . Рассмотрим теперь алгебру Ли $L^{\mathbb{C}}$ – она тоже нильпотентна и имеет рациональную структуру. Соответствующая ей односвязная группа Ли может рассматриваться как множество $N_{\mathbb{C}}$ комплексных точек алгебраической группы N или как комплексификация исходной группы Ли N . В ней тоже имеется решетка D (в качестве нее можно взять, например, подгруппу точек с целыми гауссовыми элементами). Автоморфизм f алгебры Ли L , связанный с исходным алгебраическим диффеоморфизмом Аносова на N/Γ , порождает гиперболический автоморфизм алгебры Ли $L \otimes \mathbb{C}$ и соответствующей ей группы Ли. При этом можно считать, что этот автоморфизм сохраняет указанную выше решетку D (если это не так, нужно будет просто заменить эту решетку на подходящую подгруппу конечного индекса). В результате на нильмногообразии $N^{\mathbb{C}}/D$ получаем диффеоморфизм Аносова. Другими словами, операция $\otimes \mathbb{C}$ позволяет строить диффеоморфизмы Аносова на “комплексификациях” (в понятном, хотя и несколько нестандартном, смысле этого слова) нильмногообразий, имеющих диффеоморфизмы Аносова. Например, таким образом легко строится диффеоморфизм Аносова на нильмногообразии вида $N_3(\mathbb{C}) \times N_3(\mathbb{C})/\Gamma_{\mathbb{Z}[i]}$, которое можно рассматривать (в указанном выше смысле) как комплексификацию нильмногообразия $N_3(\mathbb{R}) \times N_3(\mathbb{R})/\Gamma$ из известного примера Смейла [8].

Если A_1, A_2 – две конечномерные ассоциативно-коммутативные алгебры, то ясно, что

$$L \otimes (A_1 \oplus A_2) = (L \otimes A_1) \oplus (L \otimes A_2)$$

– это будет прямая сумма двух тензорных произведений. В частности, тензорное произведение на алгебру $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ просто дает прямую сумму двух экземпляров исходной алгебры Ли L . Так как произвольная полупростая ассоциативно-коммутативная алгебра A есть прямая сумма нескольких экземпляров полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, то тензорное произведение $L \otimes A$ в этом случае есть прямая сумма нескольких экземпляров исходной алгебры L и нескольких экземпляров ее комплексификации $L^{\mathbb{C}}$. Ясно также, что на прямом произведении двух нильмногообразий, каждое из которых имеет диффеоморфизм Аносова, тоже естественным образом строится диффеоморфизм Аносова. Поэтому получаем, что тензорное умножение на общие полупростые алгебры A на самом деле не дает нам ничего принципиально нового (т.е. того, что нельзя было бы углядеть и непосредственно).

Прежде чем переходить к самому интересному – к тензорному произведению на нильпотентные алгебры A , сделаем еще одно общее замечание.

Пусть φ – некоторый гиперболический автоморфизм алгебры A . Тогда, очевидно, он тоже естественным образом индуцирует автоморфизм алгебры Ли $L \otimes A$ (где L – некоторая алгебра Ли). Так как φ гиперболичесен (как линейное преобразование), то порожденный им автоморфизм алгебры Ли $L \otimes A$ тоже будет гиперболичесен. Если на A имеется рациональная структура и автоморфизм φ ее сохраняет, то при наличии рациональной структуры на L индуцированный автоморфизм будет сохранять и естественную рациональную структуру на $L \otimes A$. Если алгебра A нильпотентна (а именно на таких и существуют гиперболические автоморфизмы – для алгебр Ли это подробно рассматривалось в [1]), то и алгебра Ли $L \otimes A$ будет нильпотентна. Далее применимы те же рассуждения, что и выше при доказательстве теоремы 1. В результате доказана вторая основная теорема данной заметки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – алгебра Ли, определенная над $\mathbb{Q}$. Далее, пусть A – некоторая нильпотентная конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра, тоже определенная над $\mathbb{Q}$ и имеющая гиперболический автоморфизм, определенный над $\mathbb{Q}$. Тогда в односвязной группе Ли N_A , соответствующей нильпотентной алгебре Ли $L \otimes A$, существует такая решетка Π , что на компактном нильмногообразии N_A/Π существует диффеоморфизм Аносова.

Подчеркнем, что в теореме 2 алгебра Ли L может быть любой – ее нильпотентность, в отличие от теоремы 1, не предполагается.

Тем самым найден еще один весьма общий способ “перенесения” диффеоморфизмов Аносова на более сложные нильмногообразия. Однако для полупростых алгебр A группа их автоморфизмов очень скудна (а именно, конечна, так как она должна переводить друг в друга идемпотентные элементы, число которых конечно) и среди них нет ни одного гиперболического. В [16] доказано, что $\text{Aut}(A)_0$ (связная компонента единицы для группы автоморфизмов) тривиальна тогда и только тогда, когда A полупроста, полупростой же группа Ли $\text{Aut}(A)_0$ быть не может ни для какой A , а тором она будет тогда и только тогда, когда алгебра A есть прямая сумма полей $\mathbb{R}$ и алгебр двойных чисел $\mathbb{R}[X]/X^2$.

Остается неисследованным еще не рассмотренный нами случай, когда алгебра A нильпотентна, к изучению которого мы и переходим.

Одномерная нильпотентная алгебра A имеет тривиальное умножение, и потому при тензорном умножении на нее любой алгебры Ли мы получаем абелеву алгебру Ли. Двумерная нетривиальная нильпотентная алгебра A изоморфна, как известно, алгебре, которая в некотором базисе e_1, e_2 задается соотношениями $e_1^2 = e_2, e_1e_2 = 0$ (см., например, [11]). Обозначим ее C_2 . Ее применение к изучению сжатий конечномерных алгебр можно найти в [9] (где дано и определение сжатия). Рассмотрим $L \otimes C_2$. Как векторное пространство $L \otimes C_2$ есть $L_1 \oplus L_2$ – прямая сумма двух экземпляров L_1, L_2 алгебры Ли L . Коммутирование здесь описывается так. Имеем

$$[L \otimes C_2, L_2] = 0, \quad [L_1, L_1] \subset L_2,$$

причем соответствующее этому включению отображение $L_1 \wedge L_1 \rightarrow L_2$ при отождествлении L_1 и L_2 с L совпадает с отображением $L \wedge L \rightarrow L$, задающим операцию коммутирования на исходной алгебре Ли L .

Так как алгебра C_2 , очевидно, определена над $\mathbb{Q}$, то операция $\otimes C_2$ дает нам описанным выше способом диффеоморфизмы Аносова (см. теорему 1 выше), если они существовали на нильмногообразии, соответствующем исходной нильпотентной алгебре Ли L . Тем самым, мы получаем способ естественного и достаточно нетривиального размножения примеров диффеоморфизмов Аносова. Отметим, что алгебра Ли $L \otimes C_2$ всегда является 2-нильпотентной (если L – неабелева), поэтому к известным “негативным” примерам (см., например, [1]) мы теперь добавляем множество позитивных примеров для 2-нильпотентных нильмногообразий (отметим, что в литературе неоднократно указывалось на малое число известных примеров такого рода).

В [9] алгебра Ли $L \otimes C_2$ обозначалась $B(L)$. Там было доказано, что существует сжатие алгебры Ли $L \oplus \mathbb{R}^n$ к $B(L)$ (здесь $n = \dim(L)$). Как нетрудно доказать, при сжатии существование гиперболического автоморфизма всегда наследуется. В данном случае наследуется и сохранение автоморфизмом инвариантной некоторой рациональной структуры на алгебре Ли, что и тут приводит к построению новых примеров диффеоморфизмов Аносова.

Естественным обобщением алгебры C_2 является алгебра C_p – радикал алгебры плюральных чисел (она была использована в [10], а также имеет многочисленные применения в дифференциальной геометрии – см., например, [11]). Положим $C_p = \langle x, \dots, x^p \rangle$, где $x^{p+1} = 0$, эту алгебру можно рассматривать как алгебру срезанных многочленов без свободного члена или же как радикал алгебры срезанных многочленов, порожденной элементами $1, x, \dots, x^p$. Есть и другое ее описание – в виде линейных комбинаций мнимых единиц $\varepsilon_i, i = 1, \dots, p$, со следующими формулами умножения:

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_{i+j},$$

где сумма $i + j$ берется по модулю числа $p + 1$. Еще одно описание – матричное: алгебра C_p порождена жордановой клеткой $J_{p+1}(0)$ порядка $p + 1$, соответствующей нулевому собственному числу. Степени этой матрицы (которую можно отождествить с ε_1) имеют единицы на одной из диагоналей, все остальные элементы этих матриц нулевые. Тензорное умножение на эту алгебру с помощью теоремы 1 дает новые диффеоморфизмы Аносова (так как все требования к A , указанные выше, здесь выполняются).

В случае нильпотентных алгебр A некоторый интерес представляет и использование их группы автоморфизмов (на основе теоремы 2). Наибольший интерес при построении алгебраических диффеоморфизмов Аносова представляют полупростые (т.е. вполне приводимые) автоморфизмы алгебр (для автоморфизмов алгебр Ли это показано в [2]).

Для C_p редуктивная компонента группы $\text{Aut}(C_p)$ ее автоморфизмов изоморфна одномерной группе гомотетий. Точнее, она состоит из автоморфизмов, которые порождены переходом от x к ax , $a \in \mathbb{R}$. Но, к сожалению, они не унимодулярны (а унимодулярные автоморфизмы алгебры C_p не гиперболически). Поэтому тут (как и для полупростых алгебр – см. выше) автоморфизмы алгебры A для построения диффеоморфизмов Аносова использовать не удастся. Однако можно без особого труда все же построить такие нильпотентные алгебры A , для которых существуют унимодулярные гиперболические автоморфизмы. При этом следует действовать так же, как при построении нильпотентных алгебр Ли, имеющих гиперболические автоморфизмы, сохраняющие решетки. Например, подходящий нам аналог алгебры Ли $n_3(\mathbb{R}) \oplus n_3(\mathbb{R})$ (использованной в примере Смейла) – это шестимерная ассоциативно-коммутативная алгебра A , являющаяся прямой суммой двух экземпляров трехмерной алгебры ν_3 , которая в базисе X, Y, Z задается соотношением $XY = YX = Z$ (все остальные произведения, включая все квадраты, равны нулю). Дальнейшие детали конструкции здесь почти очевидны, и мы их рассматривать здесь не будем. Тензорные произведения алгебр Ли на ν_3 можно рассматривать как некоторого рода обобщенные алгебры Гейзенберга.

Рассмотрим теперь еще один класс алгебр A – свободные нильпотентные ассоциативно-коммутативные алгебры. Пусть

$$F_n = \mathbb{R}_0[X_1, X_2, \dots, X_n]$$

– алгебра вещественных многочленов без свободного члена от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$, она является свободной ассоциативно-коммутативной алгеброй с n образующими. Рассмотрим в ней идеал $I_{k,n} = F_n^{k+1} - (k+1)$ -ю степень алгебры F_n . Положим

$$FN_{k,n} = F_n / I_{k,n}.$$

Ясно, что мы получили конечномерную k -нильпотентную алгебру с n образующими, которая является свободной в классе всех конечномерных k -нильпотентных ассоциативно-коммутативных алгебр.

Тензорное умножение алгебр Ли на такие алгебры FN дает нам множество примеров нильпотентных алгебр Ли, имеющих гиперболические автоморфизмы. Дело в том, что при $n > 1$ и $k < n$ сама алгебра $FN_{k,n}$ имеет гиперболические автоморфизмы. Это доказывается так же, как и для случая свободных нильпотентных алгебр Ли (и даже проще, такого рода простое доказательство будет, видимо, скоро опубликовано – см. [4]). Эти автоморфизмы индуцируют гиперболические автоморфизмы на $L \otimes FN$ при любой (не обязательно нильпотентной!) алгебре Ли L . Рассмотрим некоторые частные случаи.

Рассмотрим вначале свободные k -нильпотентные алгебры $FN_{k,1}$ с одной образующей. Ясно, что $FN_{k,1}$ изоморфна алгебре C_k , введенной выше, и алгебре срезанных полиномов $\mathbb{R}[X]/X^{k+1}$. Более того, нетрудно описать все ассоциативно-коммутативные алгебры A с одной образующей. Так как любой идеал в алгебре $\mathbb{R}[X]$ главный,

то A представляется в виде $[X]/\langle X^{k+1} \cdot P(X) \rangle$, где $P(X)$ – некоторый полином степени $\leq k$. Тем самым, A получается из C_{k+1} наложением на образующую X одного полиномиального соотношения. Если коэффициенты этого полинома между собой соизмеримы (т.е. рациональны с точностью до умножения на некоторую константу), то полученная алгебра A имеет $\mathbb{Q}$ -структуру. Такие алгебры A дают возможность строить множество примеров диффеоморфизмов Аносова с помощью тензорного умножения на нильпотентные алгебры Ли (на основе теоремы 1).

Используем теперь и теорему 2. Рассмотрим свободные 2-нильпотентные алгебры $FN_{2,n}$, в них аддитивными базисами являются многочлены

$$X_i, X_i X_j, \quad \text{где } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Накладывая на $X_i X_j$ линейные соотношения (т.е. факторизуя по порожденному ими идеалу), можем получить произвольную 2-нильпотентную коммутативно-ассоциативную алгебру. Это еще один источник большого числа несложных новых примеров диффеоморфизмов Аносова. Размерность $FN_{2,n}$ равна $n(n+3)/2$, наиболее простой интересный для нас случай – при $n=3$, тут получаем алгебру $A = FN_{2,3}$ размерности 9, определенную над $\mathbb{Q}$ и имеющую гиперболический автоморфизм.

Вот один совсем конкретный пример. В качестве L возьмем двумерную разрешимую алгебру Ли R_2 . В подходящем базисе X, Y она задается коммутационным соотношением $[X, Y] = Y$. Тензорное произведение $P = R_2 \otimes FN_{2,3}$ – нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности 2 и размерности 18. Пусть X, Y – канонический базис в R_2 , а u, v, w – свободные образующие в $FN_{2,3}$. Имеем

$$FN_{2,3} = \langle u, v, w, u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw \rangle.$$

Далее, для коммутанта имеем $\dim[P, P] = 6$. Этот коммутант равен $\langle Y \rangle \otimes FN_{2,3}$ и линейно порожден элементами

$$(Y, u^2), \quad (Y, v^2), \quad (Y, w^2), \quad (Y, uv), \quad (Y, uw), \quad (Y, vw).$$

Далее, $[P, [P, P]] = \{0\}$, т.е. алгебра Ли L 2-нильпотентна. Образующие алгебры P – это

$$(X, u), \quad (X, v), \quad (X, w), \quad (X, u^2), \quad \dots, \quad (X, uw), \quad (Y, u), \quad (Y, v), \quad (Y, w),$$

их 12 штук (для нильпотентной алгебры Ли минимальное число образующих равно, как известно, коразмерности коммутанта, в нашем случае это $18 - 6 = 12$).

Построенная 18-мерная нильпотентная алгебра Ли определена над $\mathbb{Q}$ и имеет в силу сказанного выше гиперболический автоморфизм, сохраняющий $\mathbb{Q}$ -структуру. В силу теоремы 2 в односвязной группе Ли N , соответствующей этой алгебре Ли P , имеется такая решетка $\Gamma \subset N$, что на компактном нильмногообразии $M = N/\Gamma$ существует диффеоморфизм Аносова. В этом конкретном примере исходили из двумерной неабелевой алгебры Ли R_2 , но вместо нее можно взять любую другую алгебру Ли L (неабелеву и не разложимую в прямую сумму, если нас интересуют нетривиальные примеры) и, тензорно умножив ее на $FN_{2,3}$, получить пример диффеоморфизма Аносова на нильмногообразии размерности $9 \dim L$.

Пусть теперь A – произвольная ассоциативно-коммутативная конечномерная вещественная алгебра с единицей. Тогда A представляется в виде прямой суммы $\bigoplus_i A_i$ локальных алгебр (см. [11]). Напомним, что алгебра называется *локальной*, если она имеет единственный максимальный идеал. Локальная алгебра с единицей есть полупрямая сумма простой алгебры (изоморфной $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и радикала Rad . Для алгебры Ли L тензорное произведение $L \otimes A$ разлагается в прямую сумму $L \otimes A_i$. Что касается тензорных произведений $L \otimes A_i$ алгебры L на локальные алгебры A_i , то они разлагаются в полупрямые суммы подалгебр, изоморфных алгебре L или ее комплексификации $L^{\mathbb{C}}$, и тензорных произведений $L \otimes \text{Rad}_i$ на нильпотентные алгебры Rad_i . Эти разложения позволяют еще более расширить класс нильпотентных алгебр Ли, на которых существуют гиперболические автоморфизмы и дифференцирования. Подробности остаются заинтересованному читателю.

Полезно отметить, что класс локальных алгебр имеет множество связей с теорией особенностей полиномиальных отображений. В частности, интересные примеры ассоциативно-коммутативных нильпотентных алгебр можно найти среди максимальных идеалов локальных алгебр, соответствующих каноническим формам особенностей (см., например, [17]).

Для построения многочисленных новых интересных примеров нильпотентных ассоциативно-коммутативных алгебр можно также использовать операцию тензорного произведения. Если A – некоторая нильпотентная ассоциативно-коммутативная алгебра, а B – произвольная ассоциативно-коммутативная алгебра, то $A \otimes B$ будет, как легко понять, нильпотентной ассоциативно-коммутативной алгеброй. В качестве B можно брать, например, алгебру комплексных чисел $\mathbb{C}$, тогда получим $A^{\mathbb{C}}$ – комплексификацию алгебры A . Можно рассматривать также $A \otimes C_p$, свободные нильпотентные алгебры и др. Если в качестве B взять (как это иногда делают в некоторых других областях математики) групповую алгебру $\mathbb{R}(S)$ произвольного конечного коммутативного моноида S , то это, к сожалению, для нас не очень интересно, так как в этом случае групповая алгебра полупроста и потому разлагается в прямую суммы полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (см. выше). Можно также брать тензорные произведения произвольных нильпотентных алгебр с одной образующей (описание которых см. выше). Рассмотрение алгебры $\text{Hom}(B, C)$ гомоморфизмов одной ассоциативно-коммутативной алгебры в другую (с операциями, естественным образом индуцированными операциями алгебры C) дает нам еще один подход к построению алгебр A , однако он есть частный случай описанного выше тензорного произведения двух алгебр.

В заключение отмечу, что с точки зрения существования диффеоморфизмов Аносова мне представляется наиболее перспективным изучение тензорных произведений 2-нильпотентных алгебр Ли на всевозможные нильпотентные ассоциативно-коммутативные алгебры. Дело в том, что класс 2-нильпотентных алгебр Ли очень широк и есть все основания полагать, что многие из них имеют гиперболические автоморфизмы. Многие другие изученные известные классы нильпотентных алгебр Ли (филиформные, треугольные и др.) в данном случае не представляют интереса, так как алгебры Ли из них не имеют гиперболических автоморфизмов (подробнее об этом см. [1]). Возможно, что интересные примеры получатся и при рассмотрении деформаций свободных нильпотентных и других подходящих нильпотентных алгебр Ли.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Горбацевич, “Об алгебраических диффеоморфизмах Аносова на нильмногообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:5 (2004), 995–1021.
- [2] S. Dani, “Nilmanifolds with Anosov automorphism”, *J. London Math. Soc.* (2), **18**:3 (1978), 553–559.
- [3] K. Dekimpe, “Hyperbolic automorphisms and Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:7 (2001), 2859–2877.
- [4] B. Klopsch, *Strongly hyperbolic elements in arithmetic subgroups of $SL_n(\mathbb{R})$* , www.mth.uea.ac.uk/math/pure-seminars-old.html, 2004.
- [5] J. Lauret, *Examples of Anosov diffeomorphisms*, [arXiv: math.DS/0203126](https://arxiv.org/abs/math/0203126), 2002.
- [6] W. Malfait, “Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds of dimension at most six”, *Geom. Dedicata*, **79**:3 (2000), 291–298.
- [7] J. Lauret, C. Will, *Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds up to dimension 8*, [arXiv: math.DS/0406199v.2](https://arxiv.org/abs/math/0406199v2), 2004.
- [8] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [9] В. В. Горбацевич, “Антикоммутативные конечномерные алгебры первых трех уровней сложности”, *Алгебра и анализ*, **5**:3 (1993), 100–118.
- [10] Y. Benoist, “La partie semi-simple de l’algèbre des derivations d’une algèbre de Lie nilpotente”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math.*, **307**:18 (1988), 901–904.
- [11] В. В. Вишневский, А. П. Широков, В. В. Шурыгин, *Пространства над алгебрами*, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1985.
- [12] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал; Просперус, М., 1995.
- [13] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [14] В. В. Дрозд, Ю. А. Кириченко, *Конечномерные алгебры*, Вища школа, Киев, 1980.
- [15] V. Astrakhamtsev, “Isotypic Lie algebras”, *Differential Geometry and its Applications* (Dubrovnik, 1988), Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989, 11–14.
- [16] R. Pollack, “Algebras and their automorphisms”, *Comm. Algebra*, **17**:8 (1989), 1843–1866.
- [17] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений: Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982.

В. В. Горбацевич

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского

Поступило

13.09.2006