Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Лашхи, Т. Г. Квирикашвили, Аффинная геометрия
модулей над кольцом с инвариантным базисным числом,
Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 6, 838–849

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:08:54

Аффинная геометрия модулей над кольцом с инвариантным базисным числом

А. А. Лашхи, Т. Г. Квирикашвили

Рассмотрена основная теорема аффинной геометрии над кольцами с инвариантным базисным числом.

Библиография: 9 названий.

Введение. Целью данной работы является изучение справедливости основной теоремы аффинной геометрии над кольцами с инвариантным базисным числом. Этот класс колец наиболее интересен с геометрической точки зрения. Изучены как коллинеации аффинных пространств, так и решеточные изоморфизмы аффинных геометрий. По поводу разных кольцевых обобщений см. [1]–[6].

1. Аффинная геометрия модулей. Свободный R -модуль ${}_R M$ имеет ранг (размерность) n , если ${}_R M \cong R^n$. Этот факт будем обозначать через $\dim {}_R M = n$. В общем случае, ранг (размерность) не определяется однозначно. Известно, что бесконечный ранг определяется однозначно [7]. Следуя Кону [7], кольцо R назовем *IB-кольцом*, если в свободном R -модуле ранга $n < \infty$ каждое порождающее множество из n элементов будет базисом. Класс всех IB-колец обозначим через [IB].

Классическая проективная геометрия $\text{PG}({}_F M)$ над полем F реализуется как модулярная решетка подпространств, а аффинная геометрия $\text{AG}({}_F M)$ – как полумодулярная решетка смежных классов.

Пусть A – линейная алгебра над кольцом R . Рассмотрим множество $\text{CL}(A)$, состоящее из всех смежных классов по всем подалгебрам и пустого множества $\emptyset$. На $\text{CL}(A)$ введем частичный порядок

$$X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \quad \forall X_1, X_2 \in \text{CL}(A).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [8]. $\text{CL}(A)$ является полной решеткой относительно операций: $\bigcap_{\alpha} U_{\alpha}$ – теоретико-множественное пересечение;

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = a_{\beta} + \langle A_{\alpha}, a_{\beta} - a_{\alpha}, \alpha \in J \rangle,$$

где $U_{\alpha} = a_{\alpha} + A_{\alpha}$, A_{α} – подалгебра алгебры A . Решетка подалгебр $L(A)$ есть подрешетка в $\text{CL}(A)$ и $L(A) \cong [\emptyset, A]$.

Работа первого автора выполнена при поддержке NATO C.N.R. (грант № 220341) и Short Mobility C.N.R. (грант № 140.4).

Ясно, что решеточный изоморфизм $\varphi: \text{CL}(R M) \rightarrow \text{CL}(R_1 M_1)$ устанавливает биекцию между модулями $\varphi: R M \rightarrow R_1 M_1$. Из всевозможных изоморфизмов естественно выделить те, для которых $\varphi(0) = 0$. Назовем их *A-изоморфизмами*. Ясно, что отображение $\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ будет *A-изоморфизмом*. Естественно, задать вопрос: когда ограничение *A-изоморфизма* на $R M$ будет полулинейным изоморфизмом относительно некоторого изоморфизма $\sigma: R \rightarrow R_1$. В случае, когда $R = F$ – тело, это означает наличие основной теоремы аффинной геометрии. Напомним, что полулинейный изоморфизм модулей $f: R M \rightarrow R_1 M_1$ относительно изоморфизма $\sigma: R \rightarrow R_1$ (σ – полулинейный изоморфизм) определяется следующим образом:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \sigma(\alpha_1) f(x_1) + \sigma(\alpha_2) f(x_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R, \quad x_1, x_2 \in R M.$$

При построении (любой) геометрии первоначальной задачей является задание системы точек, в нашем случае, аффинного пространства. Для свободного R -модуля аффинное пространство $R M$ можно трактовать по-разному:

- (i) аффинное пространство $\widetilde{\text{Aff}}(R M)$ – множество всех унимодулярных элементов $R M$;
- (ii) аффинное пространство $\text{Aff}(R M)$ – множество всех $e \in R M$, для которых $R e$ – свободный одномерный модуль;
- (iii) множество $R M$ можно также трактовать как аффинное пространство, на котором натянута аффинная геометрия $\text{CL}(R M)$ – полная полумодулярная решетка смежных классов.

Аффинным пространствам $\widetilde{\text{Aff}}(R M)$ и $\text{Aff}(R M)$ будут также соответствовать аффинные геометрии $\widetilde{\text{AG}}(R M)$ и $\text{AG}(R M)$ как подрешетки $\text{CL}(R M)$, натянутые на (предложение 1) $\widetilde{\text{Aff}}(R M)$ и $\text{Aff}(R M)$.

Напомним, что элемент $e \in R M$ свободного R -модуля ($1 \in R$) называется унимодулярным, если существует линейная форма $g: R M \rightarrow R$ такая, что $g(e) = 1$.

Пусть теперь $R_1 M_1$ – свободный R_1 -модуль; f_1, f_2, f_3 – коллинеации между (соответствующими) аффинными пространствами: $f_i(x) \in f_i(y) \cup f_i(z) \Leftrightarrow x \in y \cup z$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – решеточные изоморфизмы между соответствующими аффинными геометриями:

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{\text{Aff}}(R_1 M_1) & \subset & \text{Aff}(R_1 M_1) & \subset & R_1 M_1 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 \widetilde{\text{Aff}}(R M) & \subset & \text{Aff}(R M) & \subset & R M \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 \widetilde{\text{AG}}(R M) & \hookrightarrow & \text{Aff}(R M) & \hookrightarrow & \text{CL}(R M) \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 \\
 \widetilde{\text{AG}}(R_1 M_1) & \hookrightarrow & \text{Aff}(R_1 M_1) & \hookrightarrow & \text{CL}(R_1 M_1)
 \end{array}$$

Справедливость разных вариантов основной теоремы аффинной геометрии означает, что соответствующие f_i , φ_i , $i = 1, 2, 3$, окажутся полулинейными изоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $x, y \in {}_R M$, то смежный класс $x \cup y = x + R(x - y)$ назовем *прямой, проходящей через x, y* . Прямые $\ell_1 = x_1 + Ry_1$, $\ell_2 = x_2 + Ry_2$ назовем *параллельными* (обозначение ' $\parallel$ '), если существует свободный подмодуль Re ранга 1 такой, что

$$Ry_1 \subseteq Re, \quad Ry_2 \subseteq Re.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Параллельность не является транзитивным свойством. Пусть $\{e_1, e_2\}$ – базис в ${}_R M$. Элемент $e = \alpha e_1 + e_2$ унимодулярен, где α – делитель нуля ($q\alpha = 0$, $q \neq 0$, $\alpha \neq 0$). Если $y = qe$, то $Ry \subset Re$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} qe = q(\alpha e_1 + e_2) = qe_2 = y, \quad Ry \subseteq Re_2, \quad Re \neq Re_2, \\ Re \parallel Ry, \quad Ry \parallel Re_2, \quad Re \not\parallel Re_2. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если в кольце R для некоторого обратимого α элемент $\alpha - 1$ обратим, то $\widetilde{\text{AG}}({}_R M) = \text{CL}({}_R M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис и $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ – произвольный элемент. Тогда

$$\left. \begin{aligned} &\mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \dots + \mu_n e_n, \\ &\mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \dots + \mu_n e_n, \\ &(\alpha - 1)e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n, \\ &\alpha e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \end{aligned} \right\} \in \widetilde{\text{Aff}}({}_R M).$$

Имеем

$$\begin{aligned} x &\in \mu_1 e_1 + \mu_3 e_3 + \dots + \mu_n e_n + Re_2 \\ &= \mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \mu_3 e_3 + \dots + \mu_n e_n + Re_2 \\ &= [\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \dots + \mu_n e_n] \cup [\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \dots + \mu_n e_n], \\ x &\in \sum_{i=2}^n \mu_i e_i + Re_1 = \alpha e_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i + Re_1 \\ &= \left(\alpha e_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i \right) \cup \left[(\alpha - 1)e_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \left[\left(\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \sum_{i=3}^n \mu_i e_i \right) \cup \left(\mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \sum_{i=3}^n \mu_i e_i \right) \right] \\ &\cap \left[\left((\alpha - 1)e_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i \right) \cup \left(\alpha e_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i e_i \right) \right] \Rightarrow x \in \widetilde{\text{AG}}({}_R M). \end{aligned}$$

2. Коллинеации аффинных пространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ${}_R M$, ${}_{R_1} M_1$ – свободные модули, $R, R_1 \in [\text{IB}]$, $\dim {}_R M \geq 2$. Если $f: {}_R M \rightarrow {}_{R_1} M_1$, $f(0) = 0$, – сохраняющая параллельность коллинеация, то существует изоморфизм $\sigma: R \rightarrow R_1$ такой, что f будет σ -полулинейным изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним определение коллинеации: $x \in y \cup z \Leftrightarrow f(x) \in f(y) \cup f(z)$. Для произвольного $x \in {}_R M$ имеем $Rx = 0 \cup x$, $f(Rx) = R_1 f(x)$. Пусть y – унимодулярный элемент, а x – произвольный элемент из ${}_R M$. Тогда $R_1 f(y)$ – максимальный подмодуль ранга 1. Имеем

$$\begin{aligned} x + Ry &= x \cup (x + y), \\ f(x + Ry) &= f(x) + R[f(x + y) - f(x)]. \end{aligned}$$

Так как $x + Ry \parallel Ry$, имеем

$$f(x) + R_1[f(x + y) - f(x)] \parallel R_1 f(y).$$

Из того, что $R_1 f(y)$ – максимальный подмодуль ранга 1, имеем $f(x + Ry) \subseteq f(x) + R_1 f(y)$. Если рассмотрим f^{-1} , то получим обратное включение и, следовательно, $f(x + Ry) = f(x) + R_1 f(y)$.

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в ${}_R M$, то $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ будет базисом в ${}_{R_1} M_1$. Действительно, для произвольного $x_1 \in {}_{R_1} M_1$ имеем

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_1) &= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1} + R e_n, \\ x_1 &\in f(a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}) + R_1 f(e_n) \\ &= f(a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}) + \bar{a}_n e_n. \end{aligned}$$

Применяя индукцию, находим

$$x_1 = \bar{a}_1 f(e_1) + \dots + \bar{a}_{n-1} f(e_{n-1}) + \bar{a}_n f(e_n).$$

Тем самым показано, что $f(e_1), \dots, f(e_n)$ есть порождающее множество. Так как $R, R_1 \in [\text{IB}]$ и f^{-1} – коллинеация, то получаем, что $\dim {}_{R_1} M_1 = \dim {}_R M$. Следовательно, $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ является базисом ${}_{R_1} M_1$.

Далее, для любых двух базисных элементов $e_1, e_2 \in {}_R M$ имеем

$$\left. \begin{aligned} f(e_1 + e_2) &\in f(e_1) + R_1 f(e_2) \\ f(e_1 + e_2) &\in f(e_2) + R_1 f(e_1) \end{aligned} \right] \Rightarrow f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2).$$

Так как образ унимодулярного элемента есть унимодулярный элемент, то для любого $a \in R$ находим

$$ae \in Re \Rightarrow f(ae) \in R_1 f(e) \Rightarrow f(ae) = \bar{a} f(e), \quad \bar{a} \in R_1.$$

Таким образом, строится отображение $\sigma: R \rightarrow R_1$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, которое, в общем, зависит от базисного элемента e , т.е. $\sigma = \sigma_e$. Далее, так как $f(e_1 + ae_2) = f(e_1) + \sigma_{e_2}(a)f(e_2)$, то

$$\begin{aligned} f(a_1e_1 + a_2e_2) &= f(a_1e_1) + \bar{a}_2f(e_2) = \sigma_{e_1}(a_1)f(e_1) + \bar{a}_2f(e_2) \\ &= f(a_2e_2) + \bar{a}_1f(e_1) = \sigma_{e_2}(a_2)f(e_2) + \bar{a}_1f(e_1) \\ &\Rightarrow f(a_1e_1 + a_2e_2) = \sigma_{e_1}(a_1)f(e_1) + \sigma_{e_2}(a_2)f(e_2), \\ f[a(e_1 + e_2)] &= \sigma_{e_1+e_2}(a_1)[f(e_1) + f(e_2)] \\ &= \sigma_{e_1+e_2}(a)f(e_1) + \sigma_{e_1+e_2}(a)f(e_1) \\ &\quad \parallel \parallel \\ f(ae_1 + ae_2) &= f(ae_1) + f(ae_2) = \sigma_{e_1}(a)f(e_1) + \sigma_{e_2}(a)f(e_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_{e_1}(a) = \sigma_{e_1+e_2}(a) = \sigma_{e_2}(a) \Rightarrow \sigma_{e_1} = \sigma_{e_2} = \dots = \sigma_{e_n} = \sigma_{e_i+e_j} = \sigma.$$

Так как пары $\{e_1, ae_1 + e_2\}$, $\{e_2, e_1 + ae_2\}$ составляют части некоторого базиса, находим $\sigma_{ae_1+e_2} = \sigma_{e_1} = \sigma_{e_2} = \sigma_{e_1+ae_2} = \sigma$. Далее имеем

$$\begin{aligned} f[(e_1 + a_1e_2) + a_2e_2] &= f(e_1) + \sigma(a_1)f(e_2) + \sigma(a_2)f(e_2) \\ &\quad \parallel \\ f[e_1 + (a_1 + a_2)e_2] &= f(e_1) + \sigma(a_1 + a_2)f(e_2) \\ &\Rightarrow \sigma(a_1 + a_2) = \sigma(a_1) + \sigma(a_2); \\ f[a_1(e_1 + a_2e_2)] &= \sigma(a_1)f(e_1 + a_2e_2) = \sigma(a_1)f(e_1) + \sigma(a_1)\sigma(a_2)f(e_2) \\ &\quad \parallel \\ f(a_1e_1 + a_1a_2e_2) &= \sigma(a_1)f(e_1) + \sigma(a_1a_2)f(e_2) \\ &\Rightarrow \sigma(a_1a_2) = \sigma(a_1)\sigma(a_2). \end{aligned}$$

Таким образом, σ – изоморфизм и

$$f(a_1e_1 + a_2e_2) = \sigma(a_1)f(e_1) + \sigma(a_2)f(e_2).$$

Применяя индукцию, находим

$$f\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i + a_n e_n\right] = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i)f(e_i).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ${}_R M$ и ${}_{R_1} M_1$ – свободные модули, $R, R_1 \in [\text{IB}]$, $\dim {}_R M \geq 3$. Если $f: \widetilde{\text{Aff}}({}_R M) \rightarrow \widetilde{\text{Aff}}({}_{R_1} M_1)$ – сохраняющая параллельность коллинеация, то существует изоморфизм $\sigma: R \rightarrow R_1$ такой, что для любого унимодулярного элемента $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, где $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис в ${}_R M$, справедливо равенство

$$f(e) = \sigma(a_1)f(e_1) + \dots + \sigma(a_n)f(e_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in \widetilde{\text{Aff}}({}_R M)$. Так как f – коллинеация, имеем

$$f(Re) = f(e \cup 0) = f(0) \cup f(e) = R_1 f(e).$$

Далее, $e_1 + e_2 \in \widetilde{\text{Aff}}({}_R M)$ и

$$\begin{aligned} e_1 \cup (e_1 + e_2) &= e_1 + Re_2, \\ f(e_1 \cup (e_1 + e_2)) &= f(e_1) + R_1[f(e_1 + e_2) - f(e_2)]. \end{aligned}$$

Так как $(e_1 + Re_2) \parallel Re_2$, имеем

$$f(e_1) + R_1[f(e_1 + e_2) - f(e_1)] \parallel R_1 f(e_2).$$

Далее, так как $R_1 f(e_2)$ – максимальный подмодуль ранга 1, получаем

$$R_1[f(e_1 + e_2) - f(e_1)] \subseteq R_1 f(e_2), \quad f(e_1 + Re_2) \subseteq f(e_1) + R_1 f(e_2).$$

Следовательно,

$$f(e_1 + e_2) = f(e_1) + \bar{a}f(e_2) = \bar{b}f(e_1) + f(e_2).$$

Покажем, что $f(e_1), \dots, f(e_n)$ – независимая система, более того, базис в ${}_R M_1$. Пусть $e = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in \widetilde{\text{Aff}}({}_R M)$,

$$e = [e_1 + (a_2 - 1)e_2] + [(a_1 - 1)e_1 + e_2] = \bar{e}_1 + \bar{e}_2.$$

Если относительно $R_1[f(e_1 + e_2) - f(e_1)] \subseteq R_1 f(e_2)$ применим f^{-1} , то находим $R_1[f(e_1 + e_2) - f(e_1)] = R_1 f(e_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1 + R\bar{e}_2) &= f(\bar{e}_1) + R_1 f(\bar{e}_2), \\ f(a_1 e_1 + a_2 e_2) &= f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) + k_1 f(\bar{e}_2) \\ &= f(e_1 + (a_2 - 1)e_2) + k_1 f[(a_1 - 1)e_1 + e_2] \\ &= f(e_1) + a'_2 f(e_2) + k_1 a'_1 f(e_1) + k_1 f(e_2), \quad a'_1, a'_2, k_1 \in R_1. \end{aligned}$$

Пусть справедливы равенства

$$f\left(e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i\right) = f(e_1) + \sum_{i=2}^{n-1} k_i f(e_i), \quad f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i f(e_i);$$

и покажем справедливость аналогичных равенств для сумм от n слагаемых. Имеем

$$\begin{aligned} f\left(e_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i\right) &\in f\left(e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i + Re_n\right); \\ f\left(e_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i\right) &= f\left(e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i\right) + kf(e_n) \\ &= f(e_1) + \sum_{i=2}^{n-1} k_i f(e_i) + kf(e_n). \end{aligned}$$

Если теперь унимодулярный элемент представим в виде суммы двух унимодулярных элементов

$$e = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \\ \bar{e}_1 = e_1 + (a_2 - 1)e_2 + a_3e_3 + \cdots + a_ne_n, \quad \bar{e}_2 = (a_1 - 1)e_1 + e_2,$$

то имеем

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \cup e &= \bar{e}_1 + R\bar{e}_2, & f(\bar{e}_1 + R\bar{e}_2) &= f(\bar{e}_1) + R_1f(\bar{e}_2), \\ f(e) &= f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) + kf(\bar{e}_2) \\ &= f(e_1 + (a_2 - 1)e_2 + \cdots + a_ne_n) + kf[(a_1 - 1)e_1 + e_2] \\ &= k_1f(e_1) + \cdots + k_nf(e_n), & k, k_1, \dots, k_n &\in R_1. \end{aligned}$$

Если теперь считать, что e – прообраз унимодулярного элемента из $\widetilde{\text{Aff}}(R_1M_1)$, то получим, что $f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, – порождающее множество свободного R_1 -модуля R_1M_1 . Так как $R, R_1 \in [\text{IB}]$ получаем, что $\dim_{R_1} M_1 \leq n = \dim_R M$. Если учтем, что f^{-1} имеет те же свойства что f , то получим $\dim_{R_1} M_1 = \dim_R M = n > 2$. Так как каждое порождающее множество из n элементов будет базисом в R_1M_1 , заключаем, что $f(e_1), \dots, f(e_n)$ – базис в R_1M_1 .

Таким образом, имеем $R_1f(e_1) \cap R_1f(e_2) = 0$ и

$$f(e_1 + e_2) = f(e_1) + af(e_2) = bf(e_1) + f(e_2) \quad \Rightarrow \quad a = b = 1,$$

т.е.

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2) &= f(e_1) + f(e_2), \\ f(e_1 + Re_2) &= f(e_1) + Rf(e_2). \end{aligned}$$

Более того, мы показали справедливость последних равенств для унимодулярных элементов e_1, e_2 , для которых $Re_1 \cap Re_2 = 0$. Для произвольного $a \in R$ имеем

$$f(e_1 + ae_2) = f(e_1) + a'f(e_2).$$

Следовательно, строится биекция

$$\sigma: R \rightarrow R_1, \quad \sigma(a) = a', \quad \sigma(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1.$$

Покажем, что σ есть изоморфизм. Рассмотрим элементы базиса e_1, e_i ($i \neq 2$); имеем

$$f(e_1 + ae_i) = f(e_1) + \sigma_i(a)f(e_i).$$

Так как $R(e_1 + ae_2) \cap Re_i = 0$, $e_1 + ae_2 + be_i \in \widetilde{\text{Aff}}(R_1M)$, получаем

$$\begin{aligned} f(e_1 + ae_2 + be_i) &= f(e_1 + ae_2) + b'f(e_i) = f(e_1) + \sigma(a)f(e_2) + b'f(e_i) \\ &\parallel \\ f(e_1 + be_i + ae_2) &= f(e_1) + \sigma_i(b)f(e_i) + a'f(e_2). \end{aligned}$$

Поэтому $a' = \sigma(a)$, $b' = \sigma_i(b)$ и

$$f(e_1 + ae_2 + be_i) = f(e_1) + \sigma(a)f(e_2) + \sigma_i(b)f(e_i).$$

Далее, находим

$$\begin{aligned} ae_2 + e_i &= e_1 + ae_2 + e_i - e_1 \in e_1 + ae_2 + e_i + Re_1 \\ &\Rightarrow f(e_i) + f(e_1) + \sigma(a)f(e_2) + b'f(e_1). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(ae_2 + e_i) &= f(e_i) + a'f(e_2) \Rightarrow \sigma(a) = a', \quad b' = -1, \\ f(e_i + ae_2) &= f(e_i) + \sigma(a)f(e_2). \end{aligned}$$

Имеем $R(e_1 + ae_2) \cap R(be_2 + e_i) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} f[(e_1 + (a+b)e_2) + e_i] &= f(e_1 + (a+b)e_2) + f(e_i) \\ &= f(e_1) + \sigma(a+b)f(e_2) + f(e_i) \\ &\parallel \\ f[(e_1 + ae_2) + (be_2 + e_i)] &= f(e_1 + ae_2) + f(be_2 + e_i) \\ &= f(e)\sigma(a)f(e_2) + \sigma(b)f(e_2) + f(e_i) \\ &\Rightarrow \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b). \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $Re_1 \cap R(be_2 + e_i) = 0$, находим

$$\begin{aligned} f(e_1 + abe_2 + ae_i) &= f(e_1) + \sigma(ab)f(e_2) + \sigma_i(a)f(e_i) \\ &\parallel \\ f[e_1 + a(be_2 + e_i)] &= f(e_1) + a'f(be_2 + e_i) \\ &= f(e_1) + a'[\sigma(b)f(e_2) + f(e_i)] \\ &\Rightarrow \sigma(ab) = a'\sigma(b), \quad a' = \sigma_i(a). \end{aligned}$$

Положив $b = 1$, получаем $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Следовательно, σ – изоморфизм.

$R(e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}) \cap Re_n = 0$ и предположим, что справедливо равенство

$$f\left(e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i\right) = f(e_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \sigma(a_i) f(e_i).$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n) &= f(e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}) + a'f(e_n) \\ &= f(e_1) + \sigma(a_2)f(e_2) + \dots + \sigma(a_{n-1})f(e_{n-1}) + a'f(e_n) \\ &= f(e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{n-2}e_{n-2} + a_n e_n) + b'f(e_{n-1}) \\ &= f(e_1) + \sigma(a_2)f(e_2) + \dots + \sigma(a_{n-2})f(e_{n-2}) \\ &\quad + \sigma(a_n)f(e_n) + b'f(e_{n-1}) \\ &= f(e_1) + \sigma(a_2)f(e_2) + \dots + \sigma(a_{n-1})f(e_{n-1}) + \sigma(a_n)f(e_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь другую пару базисных элементов e_i, e_j , отличную от e_1, e_2 — на это имеем право, так как $n > 2$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} f(e_i + e_j) &= f(e_i) + f(e_j), & f(e_i + ae_j) &= f(e_i) + \tau(a)f(e_j), \\ f(e_i + a_1e_1 + \dots + a_ne_n) &= f(e_i) + \tau(a_1)f(e_1) + \dots + \tau(a_n)f(e_n) \end{aligned}$$

для некоторого изоморфизма $\tau: R \rightarrow R_1$. Сравнивая с предыдущим равенством при $a_1 = 1$, получаем $\sigma = \tau$.

Пусть теперь $e = a_1e_1 + \dots + a_ne_n \in \widetilde{\text{Aff}}(RM)$. В этом случае хотя бы один из коэффициентов $a_i, i = 1, \dots, n$, не есть делитель нуля. Пусть это a_n . Представим e в виде суммы двух унимодулярных элементов

$$\bar{e}_1 = e_1 + (a_2 - 1)e_2 + \dots + a_ne_n \quad \text{и} \quad (a_1 - 1)e_1 + e_2.$$

Так как a_n не является делителем нуля, то

$$R[e_1 + (a_2 - 1)e_2 + \dots + a_ne_n] \cap R[(a_1 - 1)e_1 + e_2] = 0$$

и имеем

$$\begin{aligned} f(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) &= f[e_1 + (a_2 - 1)e_2 + \dots + a_ne_n] + f[(a_1 - 1)e_1 + e_2] \\ &= f(e_1) + (\sigma(a_2) - 1)f(e_2) + \dots + \sigma(a_n)f(e_n) + (\sigma(a_1) - 1)f(e_1) + f(e_2). \end{aligned}$$

Следовательно, для произвольного унимодулярного элемента $e = \sum_{i=1}^n a_ie_i$ имеем

$$f(e) = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i)f(e_i).$$

3. Решеточные изоморфизмы аффинных геометрий. Аффинные геометрии $\text{CL}(R_1M_1)$ и $\text{AG}(RM)$ всегда содержат нулевой подмодуль, тогда как аффинная геометрия $\widetilde{\text{AG}}(RM)$, в общем, может не содержать нулевой подмодуль; однако, если $\dim_RM \geq 3$, то $0 \in \widetilde{\text{AG}}(RM)$, так как

$$\begin{aligned} e_1 \cup e_2 \cup (e_1 + e_2) &= e_1 + [Re_1 \oplus Re_2] = Re_1 \oplus Re_2 \in \widetilde{\text{AG}}(RM), \\ e_1 \cup e_3 \cup (e_1 + e_3) &= e_1 + [Re_1 \oplus Re_3] = Re_1 \oplus Re_3 \in \widetilde{\text{AG}}(RM), \\ e_2 \cup e_3 \cup (e_2 + e_3) &= e_2 + [Re_2 \oplus Re_3] = Re_2 \oplus Re_3 \in \widetilde{\text{AG}}(RM), \\ [(Re_1 \oplus Re_2) \cap (Re_1 \oplus Re_3)] \cap (Re_2 \oplus Re_3) &= 0 \in \widetilde{\text{AG}}(RM). \end{aligned}$$

Отметим, что существенным моментом в доказательстве теорем 1 и 2 был тот факт, что коллинеация f базису сопоставляет базис, и это достигалось наложением ограничений на основные кольца — $R, R_1 \in [\text{IB}]$. Если теперь R и R_1 произвольные кольца и $0 \in \widetilde{\text{AG}}(RM)$, то при решеточном изоморфизме $\varphi: \widetilde{\text{AG}}(RM) \rightarrow \widetilde{\text{AG}}(R_1M_1)$ базис отображается в базис, так как $e_1, \dots, e_n$ тогда и только тогда является базисом, когда

$$RM = \bigcup_{i=1}^n e_i \cup 0, \quad (e_i \cup 0) \cap \left(\bigcup_{i \neq j=1}^n e_j \cup 0 \right) = 0.$$

Если же $0 \notin \text{AG}({}_R M)$, то линейную независимость можно определить и так: система $e_1, \dots, e_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда

$$[e_i \cup (e_i + e_j)] \cap \left[\bigcup_{i \neq j=1}^n (e_j \cup (e_i + e_j)) \right] = e_i + e_j.$$

Следовательно, если $e_1, e_2 \in \widetilde{\text{AG}}({}_R M)$ – линейно независимая пара и φ – решеточный изоморфизм, при котором образы параллельных прямых параллельны, то имеем

$$\begin{aligned} \varphi[e_1 \cup (e_1 + e_2)] &= \varphi(e_1) + R_1[\varphi(e_1 + e_2) - \varphi(e_1)], \\ R_1[\varphi(e_1 + e_2) - \varphi(e_2)] &\subseteq R_1\varphi(e_2), \\ \varphi(e_1 + Re_2) &\subseteq \varphi(e_1) + R_1\varphi(e_2); \end{aligned}$$

если применим φ^{-1} , то находим $R_1[\varphi(e_1 + e_2) - \varphi(e_1)] = R_1\varphi(e_2)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \varphi[(e_1 \cup (e_1 + e_2)) \cap (e_2 \cup (e_1 + e_2))] &= \varphi(e_1 + e_2) \\ \parallel \\ \varphi(e_1 + Re_2) \cap \varphi(e_2 + Re_1) &= [\varphi(e_1) + R_1\varphi(e_2)] \cap [\varphi(e_2) + R_1\varphi(e_1)] \\ &= [\varphi(e_1) \cup (\varphi(e_1) + \varphi(e_2))] \cap [\varphi(e_2) \cup (\varphi(e_1) + \varphi(e_2))] \\ &= \varphi(e_1) + \varphi(e_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in \widetilde{\text{AG}}({}_{R_1} M_1)$ – линейно независимая пара. Те же самые соображения позволяют заключить, что если $e_1, \dots, e_n$ – базис (так как R (и R_1) $\notin [\text{IB}]$, число n может не определяться однозначно), то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ будет базисом для ${}_{R_1} M_1$. Повторяя теперь доказательство теоремы 2, заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть ${}_R M$ и ${}_{R_1} M_1$ – свободные модули над (произвольными) кольцами R и R_1 , $\dim {}_R M \geq 3$. Если $\varphi: \widetilde{\text{AG}}({}_R M) \rightarrow \widetilde{\text{AG}}({}_{R_1} M_1)$ – решеточный изоморфизм, то существует изоморфизм $\sigma: R \rightarrow R_1$ такой, что для любого унимодулярного элемента $e = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ имеем

$$\varphi(e) = \sum_{i=1}^n \sigma(a_i) \varphi(e_i).$$

Используя те же соображения, заключаем, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ [4], [6]. Если $\varphi: \text{CL}({}_R M) \rightarrow \text{CL}({}_{R_1} M_1)$ – решеточный изоморфизм, где ${}_R M, {}_{R_1} M_1$ – свободные модули над кольцами R и R_1 , $\dim {}_R M \geq 2$, то существует изоморфизм $\sigma: R \rightarrow R_1$ такой, что ограничение φ на ${}_R M$ будет σ -полулинейным изоморфизмом.

Простейшими подгруппами группы автоморфизмов $\text{Aut}[\text{CL}({}_R M)]$ являются группа полулинейных автоморфизмов $\text{SL}({}_R M)$ и группа сдвигов – отображении видов $\sigma_a: {}_R M \rightarrow {}_R M$, $\sigma_a(x) = x + a$, $a \in {}_R M$ – фиксированный элемент. Тогда, если

$\varphi \in \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)]$, $\varphi(0) = 0$, то $\varphi \in \text{SL}({}_R M)$. Для любого $\Psi \in \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)]$ построим автоморфизм $\varphi(x) = \Psi(x) - \Psi(0)$, $\varphi(0) = 0$. Следовательно, $\Psi(x) = \varphi(x) + \Psi(0)$. Таким образом, $\text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] = \text{SL}({}_R M) \oplus {}_R M$, здесь группа сдвигов отождествлена с ${}_R M$. Имеем точную последовательность

$$1 \longrightarrow {}_R M \xrightarrow{\sigma} \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] \xrightarrow{\Omega} \text{SL}({}_R M) \longrightarrow 1$$

Имеем также еще одну точную последовательность

$$1 \longrightarrow \text{GL}({}_R M) \xrightarrow{\text{inj}} \text{SL}({}_R M) \xrightarrow{\rho} \text{Aut}(R) \longrightarrow 1$$

где ρ сопоставляет каждому $x \in \text{SL}({}_R M)$ соответствующий элемент из $\text{Aut}[R]$. Если $\text{AGL}({}_R M) = {}_R M \oplus \text{GL}({}_R M)$, то имеем точную последовательность

$$1 \longrightarrow {}_R M \xrightarrow{\sigma} \text{AGL}({}_R M) \xrightarrow{\Omega} \text{GL}({}_R M) \longrightarrow 1$$

Рассмотрим гомоморфизм $\rho^*: \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] \rightarrow \text{Aut}(R)$, $\rho_1^* = \rho \circ \Omega$, $\ker \rho_1^* = \text{AGL}({}_R M)$. Тогда последовательность

$$1 \longrightarrow \text{AGL}({}_R M) \longrightarrow \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] \longrightarrow \text{Aut}(R) \longrightarrow 1$$

точна и мы получаем следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & {}_R M & \xrightarrow{\sigma} & \text{AGL}({}_R M) & \xrightarrow{\Omega} & \text{GL}({}_R M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{inj} & & \\ 1 & \longrightarrow & {}_R M & \longrightarrow & \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] & \longrightarrow & \text{SL}({}_R M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho_1^* & & \downarrow \rho & & \\ & & 1 & \longrightarrow & \text{Aut}(R) & \xrightarrow{\text{id}} & \text{Aut}(R) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Если для ${}_R M$ верна основная теорема проективной геометрии, то можно также построить коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами (аналогично с [2])

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z(R^*) & \xrightarrow{i} & \text{GL}({}_R M) & \xrightarrow{j} & \text{PGL}({}_R M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{inj} & & \\ 1 & \longrightarrow & R^* & \xrightarrow{i} & \text{SLG}({}_R M) & \xrightarrow{j} & \text{SP}({}_R M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \rho_0 & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \\ 1 & \longrightarrow & I(R^*) & \xrightarrow{\text{inj}} & \text{Aut}(R^*) & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Aut}(R^*)/Z(R^*) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

где $\text{SLG}({}_R M)$ – группа обратимых полулинейных изоморфизмов; $\text{SP}({}_R M)$ – группа коллинеаций; R^* – группа обратимых элементов R ; $Z(R^*)$, $I(R^*)$ – центр и группа внутренних автоморфизмов R^* ; $\text{PGL}({}_R M) = \text{GL}({}_R M)/Z(R^*)$. С учетом двух

последних диаграмм, получаем еще одну коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & {}_R M \oplus Z(R^*) & \xrightarrow{i} & \text{AGL}({}_R M) & \xrightarrow{j} & \text{GL}({}_R M) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{inj} \\
 1 & \longrightarrow & {}_R M \oplus R^* & \longrightarrow & \text{Aut}[\text{CL}({}_R M)] & \longrightarrow & \text{SP}({}_R M) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \rho_0 \circ \Omega & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho' \\
 1 & \longrightarrow & I(R^*) & \xrightarrow{\text{inj}} & \text{Aut}(R^*) & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Aut}(R^*)/Z(R^*) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Интересную идею предлагают Шмидт и Уеллер в работе [9], где с некоторой другой точки зрения обобщена основная теорема аффинной геометрии в случае, когда R -модуль M можно представить как прямую сумму двух ненулевых подмодулей M_1 и M_2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Brezuleanu, D.-C. Rădulescu, “About full or injective lineations”, *J. Geom.*, **23**:1 (1984), 45–60.
- [2] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, **3**, Interscience Publishers, Inc., New York–London, 1957.
- [3] J. Lipman, “Definition of affine geometry by a group of transformations”, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 265–278.
- [4] C. C. Perelli, “Images of affine parallel structures by semi-collineations”, *Rend. Sem. Math. Brescia*, **8** (1984), 97–109.
- [5] P. Scherk, “On the fundamental theorem of affine geometry”, *Canad. Math. Bull.*, **5** (1962), 67–69.
- [6] S. E. Schmidt, *Grundlegungen zu einer allgemeinen affinen Geometrie*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [7] P. M. Cohn, *Free rings and their relations*, London Mathematical Society Monographs, **2**, Academic Press, Inc., London–New York, 1971.
- [8] T. M. Gelashvili, A. A. Lashkhi, “Coset lattices and the fundamental theorem of affine geometry for Lie algebras”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **119** (1999), 43–58.
- [9] S. E. Schmidt, S. Weller, “Fundamentalsatz für affine Räume über Moduln”, *Results Math.*, **30**:1–2 (1996), 151–159.

А. А. Лаши

Грузинский технический университет
E-mail: lashkhi@gtu.edu.ge

Поступило

16.02.2005

Т. Г. Квирикашвили

Грузинский технический университет