Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Литовченко, Задача Коши для параболических систем с операторами свертки в периодических пространствах, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 850–872

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:35:41

Задача Коши для параболических систем с операторами свертки в периодических пространствах

В. А. Литовченко

Для одного класса периодических систем параболического типа с псевдодифференциальными операторами, содержащего $\{\vec{p}, \vec{h}\}$ -параболические системы уравнений в частных производных, исследуются свойства фундаментальных матриц решений, устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для этих систем в пространствах обобщенных периодических функций типа ультрараспределений Жевре. Для отдельного подкласса систем описываются максимальные классы корректной разрешимости задачи Коши.

Библиография: 13 названий.

Введение. Пространства формальных тригонометрических рядов Фурье, теория которых возникла в конце 70-х годов прошлого века [1] и достаточно развита на сегодня, служат естественной средой исследования задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, а также абстрактных дифференциально-операторных уравнений. В частности, формальные ряды как основное средство исследования дают возможность отыскать изображение общего вида всех гладких (в соответствующих областях) решений указанных уравнений, исследовать множества предельных значений их решений при $t \rightarrow +0$, а также описать максимальные классы корректной разрешимости задачи Коши для этих уравнений [2]–[5].

Естественно ожидать, что теория пространств формальных рядов в сочетании с классической теорией параболических систем уравнений в частных производных [6]–[8] даст достаточно эффективный инструментарий исследования задачи Коши для систем указанных уравнений параболического типа, который позволит распространить известные результаты для эволюционных уравнений на случай систем таких уравнений.

В настоящей работе рассматривается класс 2π -периодических псевдодифференциальных систем параболического типа с зависящими от времени символами, который содержит параболические по Шилову, а также равномерно по t $2\vec{b}$ -параболические системы уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами, зависящими от времени. Для таких систем исследуется корректная разрешимость задачи Коши в случае, когда начальными данными являются периодические обобщенные функции типа ультрараспределений Жевре; находится изображение общего вида ее решений, изучаются свойства фундаментальных матриц решений, а также исследуются предельные значения решений этих систем при $t \rightarrow +0$.

Для отдельного подкласса систем найдена совокупность всех начальных обобщенных 2π -периодических функций, при которых соответствующая задача Коши имеет единственное решение (свойства которого по пространственной переменной такие же, как и в фундаментальной матрице решений), которое непрерывно зависит от начальных данных, т.е. описаны максимальные классы корректной разрешимости задачи Коши. Этот результат получен благодаря установленному здесь критерию свертывателей в классах Жевре типа Румье 2π -периодических функций.

1. Пространства основных и обобщенных функций. Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – его элементы, $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x, x)$, $\widehat{C}(L)$ – совокупность всех ограниченных по модулю функций, определенных на L , а $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ 2π -периодических функций со сходимостью, которая определяется так: $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ сходится в $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ к φ (будем обозначать $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\mathbb{C}_{2\pi}^\infty} \varphi$), если $\varphi_\nu^{(k)} \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{} \varphi^{(k)}$ равномерно на $\mathbb{R}^n$ при каждом $k \in \mathbb{Z}_+^n$. Пространство $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ можно рассматривать как проективный предел банаховых пространств $\mathbb{C}_{2\pi,p}^\infty$, $p \in \mathbb{Z}_+$, – всех 2π -периодических в $\mathbb{R}^n$ функций, непрерывно дифференцируемых до p -го порядка включительно, с нормами [5]

$$\|\varphi\|_p = \max_{\substack{x \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq |l| \leq p}} \{|D^l \varphi(x)|\}, \quad \varphi \in \mathbb{C}_{2\pi,p}^\infty,$$

где $|l| = l_1 + \dots + l_n$, а $\|0, 2\pi\| \stackrel{\text{def}}{=} [0, 2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$.

В пространствах $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$, $\mathbb{C}_{2\pi,p}^\infty$, $p \in \mathbb{Z}_+$, определены и непрерывны операции сдвига аргумента, а также умножения на функции из $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ [5].

Символом $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, $\vec{\beta} = \{\beta_i > 0, i = \overline{1, n}\}$, обозначим множество всех функций $\varphi \in \mathbb{C}_{2\pi}^\infty$, для каждой из которых

$$\exists \{c, A\} \subset (0, +\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |D^k \varphi(x)| \leq c A^{|k|} k!^{\vec{\beta}}, \quad k!^{\vec{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n (k_j!)^{\beta_j}. \quad (1)$$

Совокупность элементов φ из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, для которых неравенство (1) выполняется при фиксированном A , обозначим $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$ и определим в нем норму следующим образом:

$$\|\varphi\|_{\vec{\beta}, A} = \max_{\substack{x \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq |l| < \infty}} \left\{ \frac{|D^l \varphi(x)|}{(A^{|l|} l!^{\vec{\beta}})} \right\}.$$

С этой нормой $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$ – линейное нормированное пространство.

Отметим, что в случае, когда все компоненты векторного индекса $\vec{\beta}$ равны между собой, т.е. $\beta_j = \beta > 0$, $j = \overline{1, n}$, то $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ совпадает с $\mathbb{G}_{\{\beta\}}$ – классическим классом Жевре типа Румье порядка β 2π -периодических функций, а $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A} \equiv \mathbb{G}_{\beta, A}$ [9]. Рассуждая подобным образом, как в [2], нетрудно убедиться, что

- 1) $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$ – банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{\vec{\beta}, A}$;
- 2) вложения $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A_1} \subset \mathbb{G}_{\vec{\beta}, A_2}$, $A_1 < A_2$, компактны;
- 3) $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}} = \bigcup_{A>0} \mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$.

В связи с этим зададим топологию в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ как индуктивный предел пространств $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$:

$$\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \text{ind } \mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}.$$

Непосредственно исходя из свойств пространства $\mathbb{G}_{\{\beta\}}$ [2] и определения $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, приходим к выводу, что в пространстве $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ определены и непрерывны операции сложения, вычитания, сдвига аргумента и умножения на элементы из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$. Кроме этого, при $\vec{\beta} = \{\beta_j > 1, j = \overline{1, n}\}$ в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ есть финитные функции (т.е. функции, которые финитны на множестве $\|0, 2\pi\|$); если же $\beta_j \leq 1$, то каждый элемент из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ допускает аналитическое продолжение по независимой переменной x_j на $\mathbb{C}$ в случае $\beta_j < 1$, или в область $|\text{Im } z_j| < \text{const}$ при $\beta_j = 1$.

В соответствии с теоремой Дирихле каждый элемент φ пространства $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ разлагается на $\mathbb{R}^n$ в поточечно сходящийся к нему ряд Фурье

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(\varphi) e^{i(k, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n} \int_{\|0, 2\pi\|} \varphi(x) e^{-i(k, x)} dx$$

– k -й коэффициент Фурье; более того [2], этот ряд сходится к φ по топологии пространства $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$, причем φ является элементом $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ в том и только том случае, когда

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \quad |c_k(\varphi)| \leq c \|k\|^{-m}. \quad (2)$$

Аналогичное утверждение имеет место и в случае $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы элемент φ из $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ принадлежал пространству $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \{c, \delta\} \subset (0, +\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad |c_k(\varphi)| \leq c e^{-\delta \|k\|^{1/\vec{\beta}}}, \quad \|k\|^{1/\vec{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n |k_j|^{1/\beta_j}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем необходимость. Пусть $\varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, тогда

$$\begin{aligned} |c_k(\varphi)| &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\|0, 2\pi\|} \varphi(x) e^{-i(k, x)} dx \right| \leq (2\pi)^{-n} \left(\prod_{j=1}^n |k_j|^{-m_j} \right) \int_{\|0, 2\pi\|} |D^m \varphi(x)| dx \\ &\leq c \left(\prod_{j=1}^n \frac{A^{m_j} (m_j!)^{\beta_j}}{|k_j|^{m_j}} \right), \quad m \in \mathbb{Z}_+^n, \quad k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при всех $m \in \mathbb{Z}_+^n$, то

$$\begin{aligned} |c_k(\varphi)| &\leq c \prod_{j=1}^n \left(\inf_{m_j \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \frac{A^{m_j} (m_j!)^{\beta_j}}{|k_j|^{m_j}} \right\} \right) = c_1 e^{-\delta \|k\|^{1/\vec{\beta}}}, \\ c_1 &\neq c_1(k), \quad \delta \neq \delta(k), \quad k \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Докажем теперь *достаточность*. Из оценки (3), учитывая утверждение (2), получаем принадлежность φ пространству $\mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ и, таким образом,

$$D^m \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(\varphi) \left(\prod_{j=1}^n (ik_j)^{m_j} \right) e^{i(k,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда, еще раз используя неравенство (3), для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$|D^m \varphi(x)| \leq c \left(\prod_{j=1}^n \sup_{z>0} \{ |z|^{m_j} e^{-\delta 2^{-1} |z|^{1/\beta_j}} \} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-\delta 2^{-1} |k|^{1/\beta}} \leq c_1 A^{|m|} m!^{\vec{\beta}},$$

где c_1, A – положительные константы, не зависящие от m и x . Теорема доказана.

Из последнего утверждения, приняв во внимание топологическую структуру пространства $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, приходим к очевидному следствию.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того, чтобы последовательность $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ сходилась в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ к элементу φ , необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \quad c_k(\varphi_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} c_k(\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}^n;$$

$$2) \quad \exists \{c, \delta\} \subset (0, +\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad \forall \nu \geq 1: |c_k(\varphi_\nu)| \leq c e^{-\delta |k|^{1/\beta}}.$$

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для каждого элемента $\varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ его ряд Фурье сходится к φ по топологии пространства $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим остаток ряда Фурье функции φ из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$:

$$R_r(x) = \sum_{|k| \geq r} c_k(\varphi) e^{i(k,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Согласно следствию 1 достаточно проверить, что

$$1) \quad c_k(R_r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n;$$

$$2) \quad \exists \{c, \delta\} \subset (0, +\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad \forall r \geq 1: |c_k(R_r)| \leq c e^{-\delta |k|^{1/\beta}}.$$

Поскольку

$$c_k(R_r) = \begin{cases} 0, & -r < |k| < r, \\ c_k(\varphi), & |k| \geq r, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad r \geq 1,$$

то условия 1), 2) выполняются. Лемма доказана.

Существование в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ непрерывной операции сдвига аргумента обеспечивает существование в этом пространстве и непрерывной операции свертки:

$$(\varphi * \psi)(\cdot) = (2\pi)^{-n} \int_{\|0, 2\pi\|} \varphi(\xi) \psi(\cdot - \xi) d\xi, \quad \{\varphi, \psi\} \subset \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}};$$

при этом

$$c_k(\varphi * \psi) = c_k(\varphi) c_k(\psi), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Далее, обозначим через Ψ' совокупность всех линейных непрерывных функционалов над Ψ со слабой сходимостью. В случае, когда $\Psi = \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, имеем

$$\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \text{pr } \mathbb{G}'_{\vec{\beta}, A},$$

где $\mathbb{G}'_{\vec{\beta}, A}$ – пространство, топологически сопряженное к $\mathbb{G}_{\vec{\beta}, A}$. Действие обобщенной функции $f \in \Psi'$ на элемент $\varphi \in \Psi$ будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$.

Сопоставление

$$\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}} \ni \varphi \rightarrow f_\varphi \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}} : \quad \langle f_\varphi, \psi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\|0, 2\pi\|} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}},$$

определяет непрерывное вложение пространства $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ в $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ (здесь $\overline{(\cdot)}$ обозначает комплексную сопряженность). Согласно утверждению леммы 1

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\langle f, \sum_{-r \leq |k| \leq r} c_k(\varphi) e^{i(k, x)} \right\rangle = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{-r \leq |k| \leq r} c_k(\varphi) \langle f, e^{i(k, x)} \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}, \quad f \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}, \end{aligned}$$

где $\overline{c_k(f)} = \langle f, e^{i(k, x)} \rangle$.

Рядом Фурье обобщенной 2π -периодической функции f из $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ назовем такой ряд:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} e^{i(k, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ТЕОРЕМА 2. *Ряд Фурье обобщенной функции $f \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ сходится к f в смысле слабой сходимости в пространстве $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\left\{ S_r(\cdot) = \sum_{-r \leq |k| \leq r} \overline{c_k(f)} e^{i(k, \cdot)}, \quad r \geq 1 \right\}$$

– последовательность частичных сумм ряда Фурье функционала f . Очевидно, что $S_r(\cdot) \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ при каждом фиксированном $r \geq 1$. Тогда для каждого φ из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$

$$\langle S_r, \varphi \rangle = \sum_{-r \leq |k| \leq r} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi), \quad r \geq 1,$$

поскольку

$$\langle e^{i(k, x)}, \varphi(x) \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\|0, 2\pi\|} \overline{e^{i(k, x)}} \varphi(x) dx = c_k(\varphi),$$

и, таким образом,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \langle S_r, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение характеризует элементы из $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ в терминах их коэффициентов Фурье.

ТЕОРЕМА 3. *Для того, чтобы обобщенная 2π -периодическая функция f из Φ' принадлежала пространству $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall 0 < \delta \ll 1 \quad \exists c_\delta > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad |c_k(f)| \leq c_\delta e^{\delta|k|^{1/\vec{\beta}}} \quad (4)$$

(здесь и в дальнейшем Φ' – пространство формальных тригонометрических рядов [1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем достаточность. Сначала убедимся, что 2π -периодический функционал f , для которого выполняется условие (4), определен на элементах из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$. Пусть φ – произвольный элемент из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$; тогда согласно теореме 1

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f)| |c_k(\varphi)| \leq c_\varphi \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f)| e^{-\delta_\varphi |k|^{1/\vec{\beta}}} \leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-\delta_\varphi 2^{-1} |k|^{1/\vec{\beta}}} < +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi) \right| < +\infty,$$

т.е. определенность f на $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$.

Линейность и непрерывность f в пространстве $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ очевидны.

Для доказательства необходимости зафиксируем произвольно f из $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$. Этому функционалу сопоставим совокупность 2π -периодических функций

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\delta, f}(\cdot) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{sign}(\text{Re } c_k(f)) e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}} + i(k, \cdot)}, \\ \check{\varphi}_{\delta, f}(\cdot) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{sign}(\text{Im } \overline{c_k(f)}) e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}} + i(k, \cdot)}, \end{aligned} \quad 0 < \delta \ll 1,$$

каждая из которых является элементом из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ (см. теорему 1). Тогда,

$$\begin{aligned} \langle f, \widehat{\varphi}_{\delta, f}(\cdot) \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\text{Re } c_k(f)| e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}}} + i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{sign}(\text{Re } c_k(f)) \text{Im } \overline{c_k(f)} e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}}}, \\ \langle f, \check{\varphi}_{\delta, f}(\cdot) \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{Re } c_k(f) \text{sign}(\text{Im } \overline{c_k(f)}) e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}}} + i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\text{Im } \overline{c_k(f)}| e^{-\delta|k|^{1/\vec{\beta}}}, \end{aligned} \quad 0 < \delta \ll 1,$$

и, поскольку $f \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$, то указанные числовые ряды сходятся. Таким образом, для каждого $0 < \delta \ll 1$ существуют положительные константы $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$, что для всех $k \in \mathbb{Z}^n$:

$$|\text{Re } c_k(f)| \leq c_1(\delta) e^{\delta|k|^{1/\vec{\beta}}}, \quad |\text{Im } \overline{c_k(f)}| \leq c_2(\delta) e^{\delta|k|^{1/\vec{\beta}}}.$$

Отсюда приходим к выполнению условия (4). Теорема доказана.

Следует отметить, что если $f \in (\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)'$, то соответствующий ряд Фурье также сходится к f по топологии пространства $(\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)'$ и имеет место аналог теоремы 3. А именно [2], для того, чтобы f из Φ' принадлежал пространству $(\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)'$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists c > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad |c_k(f)| \leq c \|k\|^m. \quad (5)$$

Из этого утверждения приходим к такому следствию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Дельта-функция Дирака $\delta(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i(k, \cdot)}$ принадлежит $(\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)'$.

Обобщенную 2π -периодическую функцию f из Φ' назовем *свертывателем* в основном пространстве Ψ , если

- 1) $(f * \varphi)(\cdot) = \langle f, \varphi(\xi + \cdot) \rangle \in \Psi$ для всех $\varphi \in \Psi$;
- 2) для каждой сходящейся последовательности $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi$ к φ из Ψ в пространстве Ψ соответствующая последовательность $f * \varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\Psi} f * \varphi$.

Следующее утверждение характеризует свертыватели в основных пространствах.

ТЕОРЕМА 4 (критерий свертывателя). Для того, чтобы f из Φ' был свертывателем в пространстве $\Psi \in \{\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}; \mathbb{C}_{2\pi}^\infty\}$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежал Ψ' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение этой теоремы в случае $\Psi = \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$. Пусть $f \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$. Тогда согласно теоремам 1 и 3 для каждого элемента $\varphi \in \Psi$ получим

$$|c_k(f * \varphi)| = |c_k(f)| |c_k(\varphi)| \leq c e^{-(\delta_\varphi - \delta_f)|k|^{1/\vec{\beta}}}, \quad \delta_f < \delta_\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

т.е. принадлежность $f * \varphi$ пространству Ψ (для любого $\varphi \in \Psi$).

Аналогичным образом убеждаемся в непрерывности операции $f *$ в пространстве Ψ . Достаточность доказана.

Необходимость докажем, используя метод от противного.

Предположим, что f не принадлежит Ψ' . Тогда существует хотя бы один элемент φ_0 из Ψ такой, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi_0)$ расходится.

С другой стороны, поскольку f – свертыватель в Ψ , то $(f * \varphi_0) \in \Psi$, а посему, $\delta(\cdot)$ – функция Дирака – определена на $f * \varphi_0$ как элемент из Ψ' (см. следствие 2) и, таким образом,

$$|\langle \delta(\cdot), f * \varphi_0 \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi_0) \right| < +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что f определен на каждом элементе из Ψ . Непрерывность функционала f очевидна.

Доказательство теоремы в случае $\Psi = \mathbb{C}_{2\pi}^\infty$ реализуется соответственно с использованием утверждений (2), (5). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пространство $\Psi' \in \{\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}; (\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)'\}$ является максимальным классом свертывателей в Ψ , при этом

- 1) $c_k(f * g) = \overline{c_k(f)c_k(g)}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $\{f, g\} \subset \Psi'$;
- 2) Ψ' – свертывательная алгебра с единицей, роль которой играет $\delta(\cdot)$ – функция Дирака.

Далее, пусть $L_2(\|0, 2\pi\|)$ – соответствующее пространство Лебега 2π -периодических функций, тогда имеют место следующие очевидные непрерывные и плотные вложения:

$$\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}} \subset \mathbb{G}_{\{\vec{\gamma}\}} \subset \mathbb{C}_{2\pi}^\infty \subset L_2(\|0, 2\pi\|) \subset (\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)' \subset \mathbb{G}'_{\{\vec{\gamma}\}} \subset \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}} \subset \Phi'$$

для всех $\vec{\beta} \leq \vec{\gamma}$, т.е. для $\vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ таких, что $\gamma_j \geq \beta_j > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Символом

$$\mathcal{L}_{\vec{p}}([0, T_0]), \quad \vec{p} = \{p_j > 0, j = \overline{1, n}\}, \quad 0 < T_0 < +\infty,$$

обозначим класс функций $a: [0, T_0] \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что

- 1) $\exists b(\cdot) \in \widehat{C}([0, T_0])$: $|a(t, k)| \leq |b(t)||k|^{\vec{p}}$, $|k|^{\vec{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n |k_j|^{p_j}$, $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{Z}^n$;
- 2) $\forall t \in [0, T_0] \exists \eta \in (0, 1) \forall 0 < \varepsilon \ll 1 \exists \nu_j(\varepsilon) > 0$, $\nu_j(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$,
 $\forall \delta t \in [0, \varepsilon] \forall k \in \mathbb{Z}^n$: $|a(t + \Delta t, k) - a(t, k)| \leq \nu(\varepsilon)|k|^{\vec{p}}$.

Данный класс замкнут относительно операций сложения, вычитания, а также умножения на непрерывную функцию $b(t)$, $t \in [0, T_0]$.

Для $a(\cdot, \cdot)$ из $\mathcal{L}_{\vec{p}}$ положим

$$f_a(t, \cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{a(t, k)} e^{i(k, \cdot)}, \quad t \in [0, T_0].$$

Согласно описанию класса $\mathcal{L}_{\vec{p}}$ и утверждению теоремы 3 нетрудно убедиться, что f_a принадлежит пространству $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$ при каждом фиксированном t из $[0, T_0]$. В пространстве $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ определим оператор A_a следующим образом:

$$A_a \varphi = f_a * \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}.$$

Поскольку f_a – свертыватель в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$, то $A_a: \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}} \rightarrow \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$; при этом A_a линейный и непрерывный в $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ (так как такова операция свертки).

Приведем несколько примеров оператора A_a .

ПРИМЕР 1. Пусть

$$a(t, k) = \prod_{j=1}^n (ik_j)^{l_j}, \quad l \in \mathbb{Z}_+^n, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

тогда для каждого элемента φ из $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ имеем

$$(A_a \varphi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{j=1}^n (ik_j)^{l_j} \right) c_k(\varphi) e^{i(k, x)} = D_x^l \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. A_a совпадает с дифференциальным оператором $D_x^l = \partial^{|l|} / (\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n})$.

ПРИМЕР 2. Если

$$a(t, k) = \prod_{j=1}^n |k_j|^{\alpha_j} e^{\alpha_j \pi i / 2 \operatorname{sign}(k_j)}, \quad \alpha_j > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

то

$$(A_a \varphi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{j=1}^n (ik_j)^{\alpha_j} \right) c_k(\varphi) e^{i(k, x)} = (\mathcal{D}_+^{(\alpha)} \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}},$$

где $\mathcal{D}_+^{(\alpha)}$ – n -мерный оператор Вейля дробного дифференцирования тригонометрических рядов [10].

ПРИМЕР 3. Пусть теперь $n = 1$ и $a(t, k) \equiv \Omega(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\Omega(\cdot)$ – четная на $\mathbb{R}$ функция, возрастающая на множестве $[0; +\infty)$ не быстрее, чем степенным образом. Тогда

$$(A_a \varphi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Omega(k) c_k(\varphi) e^{ikx} = (\Omega(iD_x) \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}.$$

В этом случае оператор A_a совпадает с псевдодифференциальным оператором Поста, порожденным оператором iD_x , символом которого является $\Omega(\cdot)$ (см. [10; с. 282], [11]).

Исходя из этих примеров, оператор свертки A_a впредь будем называть *псевдодифференциальным оператором* в пространстве $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ с символом a (зависящим от параметра t).

Отметим также, что оператор A_a легко распространяется на пространство $\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}}$:

$$\widehat{A}_a f = f a * f, \quad f \in \mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}};$$

при этом

$$\langle \widehat{A}_a f, \varphi \rangle = \langle f, A_a \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}},$$

поскольку $A_a \varphi \in \mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ (при каждом фиксированном t из $[0, T_0]$).

Далее, обозначим через Ψ^m , $(\Psi')^m$ – декартовы степени (с натуральным показателем m) пространств Ψ и Ψ' с покомпонентной сходимостью соответственно в Ψ и Ψ' ; $P\Psi^m$ – множество всевозможных квадратных матриц порядка m , строчками которых являются элементы из Ψ^m (также с покомпонентной сходимостью в пространстве Ψ).

Будем говорить, что обобщенная вектор-функция f^T из $(\Psi')^m$ является *свертывателем в классе* Ψ^m , если

$$1) (p * f)(\cdot) = \left(\sum_{j=1}^m \langle f_j(\xi), p_{ij}(\xi + \cdot) \rangle \right)_{i=1}^m \in \Psi^{m^T}, \quad \forall p \in P\Psi^m;$$

$$2) \forall \{p; p_\nu, \nu \geq 1\} \subset P\Psi^m \quad p_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} p: p_\nu * f \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} p * f$$

(здесь индекс T обозначает операцию транспонирования, причем под транспонированием векторного пространства будем подразумевать транспонирование всех его элементов).

Через $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ обозначим матричный псевдодифференциальный оператор в пространстве $(\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}})^{m^T}$ с параметром $t \in [0, T_0]$, построенный по матрице-символу $\mathcal{A}_t(\cdot) = (a_{ij}(t, \cdot))_{i,j=1}^m$, каждый элемент которой принадлежит классу $\mathcal{L}_{\vec{p}}([0, T_0])$, т.е. оператор, действие которого на элементы φ из $(\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}})^{m^T}$ при каждом фиксированном $t \in [0, T_0]$ определяется следующим образом:

$$(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} \varphi)(t, \cdot) = \left\{ \sum_{j=1}^m (A_{a_{1j}} \varphi_j)(t, \cdot), \dots, \sum_{j=1}^m (A_{a_{mj}} \varphi_j)(t, \cdot) \right\}^T,$$

где $A_{a_{ij}}$ – псевдодифференциальный оператор в пространстве $\mathbb{G}_{\{\vec{\beta}\}}$ с символом a_{ij} .

2. Задача Коши. Зафиксируем произвольно класс $\mathcal{L}_{\vec{p}}([0, T_0])$ и рассмотрим систему

$$\partial_t u(t, x) = (\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} u)(t, x), \quad (t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где $u = \{u_1, \dots, u_m\}^T$, а $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ – матричный псевдодифференциальный оператор из п. 1.

Допустим, что для (6) выполняется аналог условия равномерной по t $\{\vec{p}, \vec{h}\}$ -параболичности [12]:

$$\exists \delta^* > 0 \quad \exists c^* \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T_0] \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad \max_{j=1, m} \operatorname{Re} \lambda_j(t, k) \leq -\delta^* |k|^{\vec{h}} + c^*, \quad (7)$$

где $\vec{h}$ – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$ такой, что $\vec{p} \geq \vec{h} > 0$, если элементы матрицы $\mathcal{A}_t$ не зависят от t , в противном случае $\vec{p} = \vec{h}$; λ_j – собственные значения матрицы $\mathcal{A}_t$ – символа матричного оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$.

Если для системы (6) задать начальное условие

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}})^{m^T}, \quad (8)$$

то решением задачи Коши (6), (8) назовем вектор-функцию $u(t, x)$, $(t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n$, которая

- 1) при каждом фиксированном $t \in (0, T_0]$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t})$ матричного псевдодифференциального оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$;
- 2) сильно дифференцируема по t на $(0, T_0]$, т.е. для всех $t \in (0, T_0]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$ выполняется равенство $(c_k(u))'_t = c_k(u'_t)$;
- 3) удовлетворяет системе (6) в обычном понимании, а начальному условию (8) – в смысле слабой сходимости в $(\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}})^{m^T}$.

Согласно определению решения задачи Коши (6), (8) приходим к выводу, что решение системы (6) равносильно решению такой системы:

$$D_t c_k(t) = \mathcal{A}_t c_k(t), \quad t \in (0, T_0], \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (9)$$

являющейся линейной системой обычных дифференциальных уравнений с параметром k .

Пусть $\theta(t; k, \tau) = (\theta^{ij}(t; k, \tau))_{i,j=1}^m$ для всех $\tau \in [0, T_0]$, $t \in (\tau, T_0]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$ является решением системы (9), которое удовлетворяет (в обычном понимании) начальному

условию

$$\theta(t; \cdot, \tau)|_{t=\tau} = E \quad (10)$$

(здесь E – единичная матрица). Такое решение впредь будем называть *матрицей Грина* или *матрицантом системы* (9).

Отметим, что сделанные предположения об элементах матрицы $\mathcal{A}_t$ обеспечивают существование такого матрицанта, при этом каждое решение системы (9) имеет вид $c_k = \theta c$, $k \in \mathbb{Z}^n$, где c – соответствующая матрица-столбец с элементами, зависящими только от k (см., например, [13]).

ЛЕММА 2. Пусть элементы матричного символа $\mathcal{A}_t(\cdot)$ не зависят от t , т.е. $\mathcal{A}_t(\cdot) \equiv \mathcal{A}(\cdot)$. Тогда существуют положительные константы c, δ такие, что для всех $\tau \in [0, T_0]$, $t \in (\tau, T_0]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c e^{-\delta(t-\tau)|k|^{\bar{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t - \tau), \quad (11)$$

где

$$\Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^n (\cdot)^{1-p_i/h_i} \right)^j, \quad |(b_{ij})_{i,j=1}^{m,l}| = \max_{\substack{i=\overline{1,m}, \\ j=\overline{1,l}}} |b_{ij}|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в этом случае [13]

$$\theta(t; \cdot, \tau) = e^{(t-\tau)\mathcal{A}(\cdot)} \stackrel{\text{def}}{=} E + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((t-\tau)\mathcal{A}(\cdot))^j}{j!}, \quad \tau \in [0, T_0], \quad t \in [\tau, T_0],$$

и согласно утверждению соответствующей леммы из [7; с. 78]

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}(k)}\|_* \leq e^{(t-\tau) \max_{j=\overline{1,m}} \operatorname{Re} \lambda_j(k)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} (2(t-\tau) \|\mathcal{A}(k)\|_*)^j \right) \\ \forall t \in [\tau, T_0] \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n$$

(здесь $\lambda_j(\cdot) \equiv \lambda_j(t, \cdot)$, а $\|A\|_*$ – норма матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, т.е. норма соответствующего оператора в m -мерном пространстве).

Отсюда, учитывая условие (7), а также свойства элементов матрицы $\mathcal{A}(\cdot)$, используя при этом оценку [7]

$$\max_{j=\overline{1,m}} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \leq \|A\|_*^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2,$$

приходим к цепочке неравенств

$$|e^{(t-\tau)\mathcal{A}(k)}| \leq e^{-(t-\tau)(\delta^* |k|^{\bar{h}} - c^*)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} (2c(t-\tau) |k|^{\vec{p}})^j \right) \\ \leq c_1 e^{-(t-\tau)\delta^* 2^{-1} |k|^{\bar{h}}} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^n ((t-\tau)^{1-p_i/h_i} \sup_{z>0} \{z^{p_i/h_i} e^{-z}\}) \right)^j \right) \\ \leq c_2 e^{-(t-\tau)\delta^* 2^{-1} |k|^{\bar{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t - \tau), \quad \tau \in [0, T_0], \quad t \in (\tau, T_0], \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

где $c_2 > 0$ – постоянная, не зависящая от t, τ и k . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если $\vec{p} = \vec{h}$, то для каждого $\tau \in [0, T_0)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $t \in (\tau, \tau + \varepsilon]$, $k \in \mathbb{Z}^n$ выполняется неравенство

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c e^{-(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}},$$

где c, δ – положительные константы, не зависящие от t, τ, ε и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем систему (9) к виду

$$D_t \theta = \mathcal{A}_{t^*}(k) \theta + q(t, k), \quad (12)$$

где $q(t, k) = (\mathcal{A}_t(k) - \mathcal{A}_{t^*}(k))\theta(t; k, \tau)$, а t^* – произвольно фиксированная точка из $[\tau, T_0]$.

Решив задачу Коши (12), (10), получим такое представление матрицанта θ системы (9):

$$\theta(t; k, \tau) = e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(k)} + \int_{\tau}^t e^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{t^*}(k)} q(\sigma, k) d\sigma.$$

Благодаря неравенству (11), имеем

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c e^{-(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}} + c m \int_{\tau}^t e^{-(t-\sigma)\delta|k|^{\vec{h}}} |q(\sigma, k)| d\sigma \quad (13)$$

(здесь мы использовали независимость $\Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t - \tau)$ от t и τ при $\vec{p} = \vec{h}$).

Так как

$$|q(t, k)| \leq m |\mathcal{A}_t(k) - \mathcal{A}_{t^*}(k)| |\theta(t; k, \tau)|,$$

то, учитывая свойства элементов матрицы $\mathcal{A}_t$ по переменной t , положив $t^* = \tau$, для всех t из $(\tau, \tau + \varepsilon]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$ получим

$$|q(t, k)| \leq c_0 \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}} |\theta(t; k, \tau)|,$$

где $c_0 > 0$ – константа, не зависящая от t, k, ε и τ , а $\nu(\cdot)$ – аналог функции $\nu_j(\cdot)$ из условия 2) в определении $\mathcal{L}_{\vec{p}}$. Отсюда, а также из неравенства (13), приходим к оценке

$$|\theta(t; k, \tau)| e^{(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}} \leq c_1 + c_0 c_1 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}} \int_{\tau}^t e^{(\sigma-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}} |\theta(\sigma; k, \tau)| d\sigma,$$

$$t \in (\tau, \tau + \varepsilon], \quad \tau \in [0, T_0), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Теперь, положив

$$\varphi(t) = |\theta(t; k, \tau)| e^{(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}}, \quad \psi(t) = c_1, \quad \chi(t) = c_0 c_1 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}},$$

в соответствии с леммой 2 из [6; с. 300] имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq \psi(t) + \int_{\tau}^t \chi(\sigma) \psi(\sigma) \exp \left\{ \int_{\sigma}^t \chi(\rho) d\rho \right\} d\sigma \\ &= c_1 + c_0 c_1^2 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}} \int_{\tau}^t e^{(t-\sigma)c_0 c_1 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}}} d\sigma \\ &\leq c_1 + c_0 c_1^2 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}} (t - \tau) e^{(t-\tau)c_0 c_1 m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c_1 e^{-(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}} \left(1 + \sup_{z>0} \{ze^{-z}\} e^{(t-\tau)2c_0c_1m\nu(\varepsilon)|k|^{\vec{h}}}\right).$$

Зафиксировав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $4c_0c_1m\nu(\varepsilon) \leq \delta$, из последнего неравенства приходим к такой оценке θ :

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c_2 e^{-(t-\tau)\delta 2^{-1}|k|^{\vec{h}}}, \quad \tau \in [0, T_0], \quad t \in (\tau, \tau + \varepsilon], \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad \vec{p} = \vec{h},$$

где $c_2 > 0$ – константа, не зависящая от τ , t , ε и k . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполняется условие леммы 3. Тогда существуют положительные постоянные c и δ такие, что для всех $t \in (\tau, T_0]$, $\tau \in [0, T_0]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$ выполнена оценка

$$|\theta(t; k, \tau)| \leq c \exp\{-(t-\tau)\delta|k|^{\vec{h}}\}. \quad (14)$$

Отметим, что утверждение леммы 4 становится очевидным, если учесть то, что согласно предыдущей лемме существует такое разбиение $\{t_j\}_{j=1}^k$ промежутка $(\tau, t]$, $t \in (\tau, T_0]$, на каждом элементе $(t_j, t_{j+1}]$ которого для матрицанта θ выполняется неравенство (14) с оценивающими постоянными, не зависящими от t , t_j , t_{j+1} и k , а также одно из известных свойств матрицанта [13]:

$$\theta(t; \cdot, t_0) = \theta(t; \cdot, t_1)\theta(t_1; \cdot, t_0) \quad \forall \{t_0, t_1, t\} \subset (\tau, T_0].$$

Непосредственно из утверждений лемм 2, 4 и теоремы 1 приходим к такому следствию.

СЛЕДСТВИЕ 4. При каждом фиксированном $t \in (0, T_0]$ матричная функция

$$G_t(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta_t(k) e^{i(k, \cdot)}$$

принадлежит классу $P\mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}}^m$ (здесь $\theta_t(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(t; \cdot, 0)$ и $1/\vec{h} \stackrel{\text{def}}{=} \{1/h_1, \dots, 1/h_n\}$).

Следующие вспомогательные утверждения характеризуют свойства $G_t(\cdot)$.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$, тогда каждый элемент вектор-функции $G_t * f$ сильно дифференцируем по t на $(0, T_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f – свертыватель в классе $P\mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}}^m$, то

$$c_k(G_t * f) = \theta_t(k) \overline{c_k(f)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0].$$

Отсюда, учитывая то, что $\theta_t(\cdot)$ – обычное решение системы (9), имеем

$$(c_k(G_t * f))'_t = \mathcal{A}_t(k) \theta_t(k) \overline{c_k(f)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0].$$

Докажем теперь дифференцируемость по t на $(0, T_0]$ вектор-функции $G_t * f$ при $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$. Для этого достаточно убедиться в существовании конечного предела выражений

$$\Psi_{\Delta t}^j(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m ((\theta_{(t+\Delta t)}^{jq}(k) - \theta_t^{jq}(k)) / \Delta t) \overline{c_k(f_q)} \right) e^{i(k, x)},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T_0],$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ (здесь $\theta_t^{jq}(\cdot)$ – соответствующий элемент матрицанта θ_t , а $c_k(f) = (c_k(f_q))_{q=1}^{m^T}$).

Так как матрицант θ_t дифференцируем по t на $(0, T_0]$ в обычном понимании [13], то согласно теореме о конечных приращениях

$$\frac{\theta_{(t+\Delta t)}(\cdot) - \theta_t(\cdot)}{\Delta t} = \mathcal{A}_{\tau_1}(\cdot)\theta_{\tau_1}(\cdot), \quad \tau_1 = t + \varepsilon\Delta t, \\ \varepsilon \in (0, 1), \quad t \in (0, T_0], \quad 0 < |\Delta t| \ll 1$$

(так как $\theta_t(\cdot)$ – обычное решение системы (9) для всех $t \in (0, T_0]$). Тогда

$$\Psi_{\Delta t}^j(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m \left(\sum_{s=1}^m a_{js}(\tau_1, k) \theta_{\tau_1}^{sq}(k) \right) \overline{c_k(f_q)} \right) e^{i(k, x)}. \quad (15)$$

Непосредственно из свойств элементов матрицы $\mathcal{A}_t$ (см. условие 2) из $\mathcal{L}_{\vec{p}}$, а также из дифференцируемости матрицанта $\theta_t(\cdot)$ (по t), приходим к непрерывности по τ на $(0, T_0]$ функции $a_{js}(\tau, k) \theta_{\tau}^{sq}(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}^n$, $\{j, s, q\} \subset \{1, \dots, m\}$, из которой имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow t} (a_{js}(\tau, k) \theta_{\tau}^{sq}(k)) = a_{js}(t, k) \theta_t^{sq}(k) \quad \forall t \in (0, T_0].$$

Далее, докажем равномерную сходимость по Δt ряда из равенства (15) при достаточно малых Δt , всех $(t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n$ и $j = \overline{1, m}$. Согласно свойствам элементов матрицы $\mathcal{A}_t$ и утверждениям лемм 2, 4 получим

$$|a_{js}(\tau, k) \theta_{\tau}^{sq}(k)| \leq c_1 |k|^{\vec{p}} e^{-\delta \tau |k|^{\vec{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(\tau), \\ k \in \mathbb{Z}^n, \quad \tau \in (0, T_0], \quad \{j, s, q\} \subset \{1, \dots, m\},$$

где δ, c_1 – положительные константы, не зависящие от k и τ . Используя утверждение теоремы 3, получим существование положительной постоянной c_μ такой, что для всех $0 < \mu \ll \delta t/4$, $|\Delta t| < t/2$ и $k \in \mathbb{Z}^n$

$$|a_{js}(t + \varepsilon\Delta t, k) \theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}^{sq}(k)| |c_k(f_q)| \leq c_1 |k|^{\vec{p}} e^{-\delta t 2^{-1} |k|^{\vec{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}\left(\frac{t}{2}\right) |c_k(f_q)| \\ \leq c_1 c_\mu \sup_{|k|} \{ |k|^{\vec{p}} e^{-\delta t 4^{-1} |k|^{\vec{h}}} \} e^{-(\delta t 4^{-1} - \mu) |k|^{\vec{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}\left(\frac{t}{2}\right), \\ t \in (0, T_0], \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Отсюда уже приходим к равномерной сходимости по Δt указанного ряда.

Таким образом,

$$(G_t * f)'_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{A}_t(k) \theta_t(k) c_k(f) e^{i(k, x)}, \quad (t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n,$$

и, следовательно,

$$c_k((G_t * f)'_t) = (c_k(G_t * f))'_t, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0].$$

Лемма доказана.

Непосредственно из доказанного получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 5. Для каждого f из $(\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$ вектор-функция $(G_t * f)(t, x)$, $(t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n$, является решением системы (6).

ЛЕММА 6. Если $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$, то вектор-функция $G_t * f$ стремится к f при $t \rightarrow +0$ в классе $(\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться, что для указанных f выполняются следующие предельные соотношения:

$$\langle G_t * f, \varphi \rangle \xrightarrow{t \rightarrow +0} \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\theta_t(k) \overline{c_k(f)}) c_k(\varphi) \xrightarrow{t \rightarrow +0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}} \quad (16)$$

(здесь и в дальнейшем под выражением $\langle g, \psi \rangle$, где $g \in (\Psi')^{m^T}$, а $\varphi \in \Psi$, будем подразумевать вектор-столбец $\{\langle g_1, \varphi \rangle, \dots, \langle g_m, \varphi \rangle\}^T$). Но соотношения (16) будут заведомо выполняться согласно условию (10), если ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\theta_t(k) \overline{c_k(f)}) c_k(\varphi), \quad f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}}, \quad (17)$$

является равномерно сходящимся по t (при достаточно малых $t > 0$).

Следует отметить, что при $\vec{p} = \vec{h}$ указанная сходимость ряда (17) следует непосредственно из утверждений леммы 4 и теорем 1, 3. Что касается случая $\vec{p} \geq \vec{h} > 0$, то, поскольку функция $\Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow +0$, установленная ранее оценка (11) матрицанта θ_t уже не может обеспечить равномерную (по t) сходимость ряда (17). Поэтому необходимо оценить общий член ряда (17). Рассуждая подобным образом, как и при доказательстве леммы 2, учитывая при этом утверждения теорем 1, 3, получим

$$\begin{aligned} |(e^{t\mathcal{A}(k)} \overline{c_k(f)}) c_k(\varphi)| &\leq m c_0 e^{-(\delta^* t + \mu/2)|k|^{\vec{h}}} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(t \sum_{i=1}^n \sup_{z>0} \{z^{p_i/h_i} e^{-z}\} \right)^j \right) \\ &\leq c_1 e^{-\mu/2|k|^{\vec{h}}}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \end{aligned}$$

где c_1, μ – положительные константы, не зависящие от t и k .

Таким образом, и при $\vec{p} \geq \vec{h} > 0$ ряд (17) сходится равномерно по t . Лемма доказана.

Следующее утверждение характеризует разрешимость задачи Коши (6), (8).

ТЕОРЕМА 5. Пусть элементы матричного символа $\mathcal{A}_t$ системы (6) принадлежат классу $\mathcal{L}_{\vec{p}}([0, T_0])$, а $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^{m^T}$. Тогда для задачи Коши (6), (8) существует единственное решение u , непрерывно зависящее от начальных данных; при этом для всех $t \in (0, T_0]$ выполнены условия

- 1) $u(t, \cdot) \in \mathbb{G}_{\{1/\vec{h}\}}^{m^T}$;
- 2) $u(t, x) = (G_t * f)(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\tilde{h}\}})^{m^T}$, то согласно следствиям 4, 5, утверждениям леммы 6 и теоремы 4 приходим к выводу, что

$$u(t, x) = (G_t * f)(t, x), \quad (t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n,$$

– решение задачи Коши (6), (8), которое при каждом фиксированном $t \in [0, T_0]$ принадлежит классу $\mathbb{G}_{\{1/\tilde{h}\}}^{m^T}$.

Единственность решения задачи Коши (6), (8) устанавливается традиционно, т.е. методом от противного. А что касается его непрерывной зависимости от начальных данных, то пусть $\{f; f_\nu, \nu \geq 1\}$ – произвольная фиксированная последовательность из $(\mathbb{G}'_{\{1/\tilde{h}\}})^{m^T}$ такая, что

$$f_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{(\mathbb{G}'_{\{1/\tilde{h}\}})^{m^T}} f,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \langle f_{j,\nu}, \varphi \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f_{j,\nu})} c_k(\varphi) \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f_j)} c_k(\varphi) = \langle f_j, \varphi \rangle, \\ j &= \overline{1, m}, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\{1/\tilde{h}\}}. \end{aligned}$$

Тогда из этих соотношений непременно следует и

$$\begin{aligned} \langle u_{j,\nu}, \varphi \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_{q,\nu})} \right) c_k(\varphi) \\ &\xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right) c_k(\varphi) = \langle u_j, \varphi \rangle \end{aligned}$$

для всех $j = \overline{1, m}$ и $\varphi \in \mathbb{G}_{\{1/\tilde{h}\}}$, т.е.

$$u_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{(\mathbb{G}'_{\{1/\tilde{h}\}})^{m^T}} u.$$

Теорема доказана.

Пусть, далее, для (6) кроме условия (7) выполняется еще и такое условие:

$$\exists c_0^* > 0 \quad \forall t \in [0, T_0] \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad \min_{j=\overline{1, m}} \operatorname{Re} \lambda_j(t, k) \geq -c_0^* |k|^{\tilde{h}} \quad (18)$$

(при ранее указанных соотношениях между $\vec{p}$ и $\vec{h}$). Оказывается, что в этом случае условия корректной разрешимости задачи Коши (6), (8), сформулированные в теореме 5, являются не только достаточными, но и необходимыми. Для доказательства этого факта нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть $\theta^{-1}(t; \cdot, \tau)$ – обратная матрица к матрицанту $\theta(t; \cdot, \tau)$ системы (9) при $\tau \in [0, T_0]$, $t \in (\tau, T_0]$. Тогда существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что для всех $t \in (0, T_0]$, $k \in \mathbb{Z}^n$ выполнено

$$|\theta_t^{-1}(k)| \leq c_1 e^{c_2 t |k|^{\tilde{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t), \quad \theta_t^{-1}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \theta^{-1}(t; \cdot, 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что

$$\theta^{-1}(t; \cdot, \tau) = \theta(\tau; \cdot, t), \quad t \in (\tau, T_0], \quad \tau \in [0, T_0).$$

В самом деле, согласно свойствам матрицанта [13]

$$E = \theta(\tau; \cdot, \tau) = \theta(\tau; \cdot, t)\theta(t; \cdot, \tau) \quad \forall t \in (\tau, T_0].$$

Таким образом, $\theta^{-1}(t; \cdot, \tau)$ – нормальное решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} D_\tau \theta^{-1}(t; k, \tau) &= \mathcal{A}_\tau(k) \theta^{-1}(t; k, \tau), \quad (\tau, k) \in [0, t) \times \mathbb{Z}^n, \\ \theta^{-1}(t; \cdot, \tau) \Big|_{\tau=t} &= E. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее будем действовать аналогично тому, как при доказательстве лемм 2–4. Сначала рассмотрим случай $\vec{p} \geq \vec{h} > 0$ (т.е. когда $\mathcal{A}_t(\cdot) \equiv \mathcal{A}(\cdot)$). В соответствии с леммой из [7; с. 78] имеем

$$\begin{aligned} |e^{(\tau-t)\mathcal{A}(k)}| &\leq e^{(\tau-t) \min_{j=1, \dots, m} \operatorname{Re} \lambda_j(k)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} (2(t-\tau) \|\mathcal{A}(k)\|_*)^j \right) \\ &\leq c e^{(t-\tau)2c_0^*|k|^{\vec{h}}} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^n (t-\tau)^{1-p_i/h_i} \sup_{z>0} \{z^{p_i/h_i} e^{-z}\} \right)^j \right) \\ &\leq c_1 e^{(t-\tau)2c_0^*|k|^{\vec{h}}} \Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t-\tau), \quad (\tau, k) \in [0, t) \times \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \end{aligned} \quad (20)$$

где $c_1 > 0$ – постоянная, не зависящая от t , τ и k .

Пусть элементы матрицы $\mathcal{A}_t$ зависят от t .

Зафиксируем произвольно τ^* из $[0, t)$ и представим систему из (19) в виде

$$D_\tau \theta^{-1} = \mathcal{A}_{\tau^*}(k) \theta^{-1} + q(\tau, k),$$

где $q(\tau, \cdot) = (\mathcal{A}_\tau(\cdot) - \mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)) \theta^{-1}(t; \cdot, \tau)$. Тогда

$$\theta^{-1}(t; \cdot, \tau) = e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} + \int_t^\tau e^{(\tau-\sigma)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} q(\sigma, \cdot) d\sigma.$$

Отсюда, учитывая, что при $\tau^* = t$ для всех τ из $[t-\varepsilon, t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и $k \in \mathbb{Z}^n$

$$|q(\tau, k)| \leq c\nu(\varepsilon)|k|^{\vec{h}}|\theta^{-1}(t; k, \tau)|,$$

а также оценку (20) и независимость функции $\Sigma_{\vec{p}, \vec{h}}(t-\tau)$ от t и τ , приходим к неравенству

$$|\theta^{-1}(t; k, \tau)| e^{(\tau-t)\delta_1|k|^{\vec{h}}} \leq c_1 + c_1 c m \nu(\varepsilon) |k|^{\vec{h}} \int_t^\tau e^{(\sigma-t)\delta_1|k|^{\vec{h}}} |\theta^{-1}(t; k, \sigma)| d\sigma.$$

Теперь, используя аналог леммы 2 из [6; с. 300], получим

$$|\theta^{-1}(t; k, \tau)| e^{(\tau-t)\delta_1|k|^{\vec{h}}} \leq c_1 (1 + \exp\{(t-\tau)2c_1 c m \nu(\varepsilon)|k|^{\vec{h}}\}).$$

Зафиксировав соответствующим образом ε из $(0, 1)$ (см. доказательство леммы 3), придем к оценке

$$|\theta^{-1}(t; k, \tau)| \leq c_2 \exp\{(t - \tau)c_3|k|^{\bar{h}}\}, \quad (21)$$

для всех $\tau \in [t - \varepsilon, t)$, $t \in (0, T_0]$ и $k \in \mathbb{Z}^n$, где c_2, c_3 – положительные константы, не зависящие от t, τ, k и ε .

В завершение отметим, что рассуждая аналогично, как и при обосновании утверждения леммы 4, учитывая при этом равенство $\theta^{-1}(t; \cdot, \tau) = \theta(\tau; \cdot, t)$, оценку (21) легко распространить по переменной τ на весь промежуток $[0, t)$ для каждого фиксированного t из $(0, T_0]$. Лемма доказана.

Основной результат этого пункта сформулируем в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть система (6) удовлетворяет условиям (7), (18). Тогда для того, чтобы задача Коши (6), (8) была корректно разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $f \in (\mathbb{G}'_{\{1/\bar{h}\}})^{m^T}$. При этом всегда ее решение и для $t \in (0, T_0]$ обладает следующими свойствами:

- 1) $u(t, \cdot) \in \mathbb{G}_{\{1/\bar{h}\}}^{m^T}$;
- 2) $u(t, x) = (G_t * f)(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из теоремы 5. Докажем необходимость. Пусть u – решение системы (6), тогда в соответствии с определением решения

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u) e^{i(k, x)}, \quad (t, x) \in (0, T_0] \times \mathbb{R}^n,$$

где $c_k(u) = \{\langle e^{i(k, x)}, u_1 \rangle, \dots, \langle e^{i(k, x)}, u_m \rangle\}^T$, причем $c_k(u)$ – решение системы (9). Исходя из структуры общего решения (9), имеем

$$c_k(u) = \theta_t(k) c_k, \quad (t, k) \in (0, T_0] \times \mathbb{Z}^n,$$

при некотором фиксированном (не зависящем от t) вектор-столбце $c_k = \{c_{1,k}, \dots, c_{m,k}\}^T$. Отсюда, учитывая, что

$$u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{A_t}) \subset (L_2(\|0, 2\pi\|))^{m^T},$$

получаем

$$|c_k(u_j)| = \left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) c_{q,k} \right| \leq \|u_j\|_{L_2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0],$$

или

$$|\theta_t(k) c_k| \leq c, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \quad (22)$$

где $c = \max_{j=\overline{1, m}} \{\|u_j\|_{L_2}\}$, а $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в пространстве $L_2(\|0, 2\pi\|)$.

Умножив почленно (22) на $m|\theta_t^{-1}(k)|$ и принимая во внимание очевидное неравенство

$$|(b_{ij})_{i,j=1}^m (d_{i1})_{i=1}^m| \leq m |(b_{ij})_{i,j=1}^m| |(d_{i1})_{i=1}^m|,$$

имеем

$$|c_k| \leq mc |\theta_t^{-1}(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0].$$

Отсюда, учитывая лемму 7 и теорему 3, приходим к выводу: формальные ряды $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{j,k} e^{i(k, \cdot)}$, $j = \overline{1, m}$, являются элементами пространства $\mathbb{G}'_{\{1/\bar{h}\}}$.

В завершение отметим, что поскольку

$$u(t, \cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta_t(k) e^{i(k, \cdot)}, \quad t \in (0, T_0],$$

– единственное решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию (8), то $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{i(k, \cdot)}$. Теорема доказана.

Таким образом, $(\mathbb{G}'_{\{1/\bar{h}\}})^{m^T}$ является, в некотором понимании, максимальным классом обобщенных начальных данных, в котором корректно разрешима задача Коши (6), (8) (в указанном смысле).

Приведем утверждения, характеризующие граничные значения решения системы (6) при $t \rightarrow +0$ в некоторых подклассах из $(\mathbb{G}'_{\{1/\bar{h}\}})^{m^T}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\vec{p} = \vec{h}$, для системы (6) выполняется условие (7), а u – решение задачи Коши (6), (8), соответствующее $f^T \in (\mathbb{G}'_{\{1/\bar{h}\}})^m$. Тогда для того, чтобы f^T принадлежал $(L_2(\|0, 2\pi\|))^m$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists c > 0 \quad \forall 0 < t \ll 1 \quad \forall j = \overline{1, m} \quad \|u_j(t, x)\|_{L_2} \leq c; \quad (23)$$

при этом всегда

$$u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{(L_2(\|0, 2\pi\|))^m} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выполнения условия (23), учитывая структуру решения задачи Коши (6), (8) (см. теорему 5), получим

$$\|u_j(t, x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right|^2 \leq c^2 \quad \forall t \in (0, T_0].$$

Отсюда, совершив предельный переход при $t \rightarrow +0$, на основании (10) находим

$$\|f_j\|_{L_2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f_j)|^2 \leq c^2, \quad j = \overline{1, m},$$

т.е. $f^T \in (L_2(\|0, 2\pi\|))^m$.

Наоборот, если $f^T \in (L_2(\|0, 2\pi\|))^m$, то согласно лемме 4 для всех $j = \overline{1, m}$ и $t \in (0, T_0]$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_j(t, x)\|_{L_2}^2 &\leq c^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m e^{-t\delta|k|^{\bar{h}}} |c_k(f_q)| \right)^2 \leq c^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m |c_k(f_q)| \right)^2 \\ &\leq (cm)^2 \sum_{q=1}^m \|f_q\|_{L_2}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Кроме этого,

$$\|u_j(t, x) - f_j\|_{L_2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \left(\sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right) - \overline{c_k(f_j)} \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right| + |c_k(f_j)| \right)^2 \\
&\leq 2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right|^2 + \|f_j\|_{L_2}^2 \right) \\
&\leq 2 \left(c^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m e^{-t\delta|k|^{\vec{h}}} |c_k(f_q)| \right)^2 + \|f_j\|_{L_2}^2 \right) \\
&\leq 2 \left((cm)^2 \left(\sum_{q=1}^m \|f_q\|_{L_2}^2 \right) + \|f_j\|_{L_2}^2 \right) < +\infty \quad \forall t \in (0, T_0].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|u_j(t, x) - f_j\|_{L_2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{q=1}^m (\theta_t^{jq}(k) - \delta_{qj}) \overline{c_k(f_q)} \right|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0, \quad \delta_{qj} = \begin{cases} 1, & q = j, \\ 0, & q \neq j, \end{cases}$$

$$j = \overline{1, m}$$

(см. условие (10)). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\vec{p} = \vec{h}$, $f^T \in (\mathbb{G}'_{\{1/\vec{h}\}})^m$, а u – соответствующее решение задачи Коши (6), (8), для системы которой выполняются условия (7), (18). Тогда

а) для того, чтобы $f^T \in (\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}})^m$, $\vec{\beta} > 1/\vec{h}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&\forall \mu > 0 \quad \exists c_\mu > 0 \quad \forall t \in (0, T_0] \quad \forall j = \overline{1, m} \\
&\|u_j(t, x)\|_{L_2} \leq c_\mu \prod_{i=1}^n \exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)}\};
\end{aligned} \tag{24}$$

б) для того, чтобы $f^T \in ((\mathbb{C}_{2\pi}^\infty)')^m$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists c > 0 \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad \forall t \in (0, T_0] \quad \forall j = \overline{1, m} \quad \|u_j(t, x)\|_{L_2} \leq c \prod_{i=1}^n t^{-r/h_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $f^T \in (\mathbb{G}'_{\{\vec{\beta}\}})^m$, $\vec{\beta} > 1/\vec{h}$. Тогда согласно теореме 3 для произвольного $\mu_0 > 0$ существует $c_0 > 0$ такой, что

$$|c_k(f_j)| \leq c_0 \exp\{\mu_0 |k|^{1/\vec{\beta}}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Отсюда, учитывая утверждение леммы 4 и структуру решения задачи Коши (6), (8), получим

$$\begin{aligned}
\|u_j(t, x)\|_{L_2}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right|^2 \leq (cc_0)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{q=1}^m \exp\{-c_1 t |k|^{\vec{h}} + \mu_0 |k|^{1/\vec{\beta}}\} \right)^2 \\
&= (cc_0 m)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \exp\{-2c_1 t |k|^{\vec{h}} + 2(\mu_0 + \varepsilon) |k|^{1/\vec{\beta}} - 2\varepsilon |k|^{1/\vec{\beta}}\}
\end{aligned}$$

$$\leq c_2 \prod_{i=1}^n \sup_{z>0} (\exp\{-2c_1 t z^{h_i} + 2(\mu_0 + \varepsilon) z^{1/\beta_i}\}), \quad t \in (0, T_0],$$

где $\varepsilon > 0$ – фиксированное число, а

$$c_2 = (cc_0 m)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \exp\{-2\varepsilon |k|^{1/\beta}\} < +\infty.$$

Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned} & \sup_{z>0} (\exp\{-2c_1 t z^{h_i} + 2(\mu_0 + \varepsilon) z^{1/\beta_i}\}) \\ &= \exp\left\{2(\mu_0 + \varepsilon) \left(\frac{\mu_0 + \varepsilon}{c_1 t \beta_i h_i}\right)^{1/(\beta_i h_i - 1)} - 2c_1 t \left(\frac{\mu_0 + \varepsilon}{c_1 t \beta_i h_i}\right)^{\beta_i h_i / (\beta_i h_i - 1)}\right\} \\ &= \exp\{\mu_i t^{-1/(\beta_i h_i - 1)}\}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_i = 2(\mu_0 + \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{\beta_i h_i}\right) \left(\frac{c_1 \beta_i h_i}{\mu_0 + \varepsilon}\right)^{1/(1 - \beta_i h_i)}.$$

Наоборот, пусть выполняется условие (24). Тогда компоненты коэффициентов Фурье $c_k(u)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, решения u удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{q=1}^m \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right| \leq c_\mu \prod_{i=1}^n \exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)}\}, \\ & j = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \quad \mu > 0, \end{aligned}$$

или же

$$|\theta_t(k) \overline{c_k(f)}| \leq c_\mu \prod_{i=1}^n \exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \quad \mu > 0.$$

Теперь, умножив почленно последнее неравенство на $m|\theta_t^{-1}(k)|$, рассуждая при этом как и в случае доказательства теоремы 6, получим

$$|c_k(f)| \leq m c_\mu \left(\prod_{i=1}^n \exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)}\} \right) |\theta_t^{-1}(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in (0, T_0], \quad \mu > 0.$$

Отсюда, учитывая утверждение леммы 7, имеем

$$|c_k(f)| \leq m c_1 c_\mu \prod_{i=1}^n \inf_{t \in (0, T_0]} (\exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)} + c_2 t |k_i|^{h_i}\})$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^n$ и $\mu > 0$.

Отметим, что

$$\inf_{t>0} (\exp\{\mu t^{-1/(\beta_i h_i - 1)} + c_2 t |k_i|^{h_i}\})$$

достигается при $t = t_0$, где $t_0 = (\mu / (c_1(\beta_i h_i - 1) |k_i|^{h_i}))^{(\beta_i h_i - 1)/(\beta_i h_i)}$. Непосредственно убеждаемся в том, что $t_0 \in (0, T_0]$ для всех $|k_i|$, $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, если $\mu \in (0, \mu_0]$, где $\mu_0 = c_2(\beta_i h_i - 1) T_0^{\beta_i h_i / (\beta_i h_i - 1)}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} |c_k(f)| &\leq mc_1 c_\mu \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \mu \left(\frac{\mu}{c_2(\beta_i h_i - 1) |k_i|^{h_i}} \right)^{(\beta_i h_i - 1)(\beta_i h_i (1 - \beta_i h_i))} \right. \\ &\quad \left. + c_2 |k_i|^{h_i} \left(\frac{\mu}{c_2(\beta_i h_i - 1) |k_i|^{h_i}} \right)^{(\beta_i h_i - 1)/(\beta_i h_i)} \right\} \\ &= mc_1 c_\mu \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \beta_i h_i c_2^{1/(\beta_i h_i)} \left(\frac{\mu}{\beta_i h_i - 1} \right)^{1 - 1/(\beta_i h_i)} |k_i|^{1/\beta_i} \right\}, \\ &\quad 0 < \mu \leq \mu_0, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned}$$

и согласно утверждению теоремы 3 векторный элемент f^T принадлежит классу $(\mathbb{G}'_{\{\beta\}})^m$, $\vec{\beta} > 1/\vec{h}$.

Утверждение б) доказывается аналогично (с использованием (5)). Теорема доказана.

В завершение приведем несколько примеров системы (6).

ПРИМЕР 4. Пусть

$$\vec{p} = \{p_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n}\}, \quad a_{\vec{r}}(k) = \prod_{j=1}^n (ik_j)^{r_j}, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

а $\vec{r} = \{r_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1, n}\}$ – вектор такой, что $\sum_{j=1}^n r_j/p_j \leq 1$. Тогда $sa_{\vec{r}}(\cdot)$, $s \in \mathbb{C}$, принадлежит классу $\mathcal{L}_{\vec{p}}([0, T_0])$.

Для доказательства этого факта достаточно убедиться в существовании положительной константы c_0 такой, что для всех $k \in \mathbb{Z}^n$, $k_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, выполняется неравенство

$$|a_{\vec{r}}(k)| \leq c_0 |k|^{\vec{p}}. \quad (25)$$

Обозначим через $|k_0|^{p_0} = \max_{j=\overline{1, n}} \{|k_j|^{p_j}\}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{|a_{\vec{r}}(k)|}{|k|^{\vec{p}}} &= \prod_{j=1}^n \frac{|k_j|^{r_j}}{(\sum_{j=1}^n |k_j|^{p_j})} \leq \prod_{j=1}^n \frac{(|k_j|^{p_j})^{r_j/p_j}}{|k_0|^{p_0}} \\ &\leq \frac{|k_0|^{p_0 \sum_{j=1}^n r_j/p_j}}{|k_0|^{p_0}} = |k_0|^{p_0(\sum_{j=1}^n r_j/p_j - 1)} \leq 1, \quad k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

т.е. неравенство (25) выполняется при $c_0 = 1$.

Остальные значения k из $\mathbb{Z}^n$ соответствуют тривиальному случаю.

Таким образом, приходим к выводу, что все $\{\vec{p}, \vec{h}\}$ -параболические (в том числе и параболические по Шилову) [12] 2π -периодические системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами являются системами вида (6), для которых выполняется условие (7).

ПРИМЕР 5. Поскольку каждая $2\vec{b}$ -параболическая (т.е. параболическая по Эйдельману) система уравнений в частных производных является и $\{2\vec{b}, 2\vec{b}\}$ -параболической [8], то все 2π -периодические, равномерно по t $2\vec{b}$ -параболические системы с непрерывно зависящими от t коэффициентами также являются системами вида (6), для которых выполняются условия (7) и (8).

ПРИМЕР 6. Пусть теперь $m = 2$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, 2}$, q – некоторое фиксированное натуральное число, не меньшее, чем $\max_{j=\overline{1, 2}}(\alpha_j/2)$, а матричный символ

$$\mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} -(|k_1|^{\alpha_1} + |k_2|^{\alpha_2}) + i(-\|k\|^2)^q & 1 \\ -1 & -(|k_1|^{\alpha_1} + |k_2|^{\alpha_2}) + i(-\|k\|^2)^q \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

В этом случае система (6) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, x) = (i\Delta^q - (|\partial_{x_1}|^{\alpha_1} + |\partial_{x_2}|^{\alpha_2}))u_1(t, x) + u_2(t, x), \\ \partial_t u_2(t, x) = -u_1(t, x) + (i\Delta^q - (|\partial_{x_1}|^{\alpha_1} + |\partial_{x_2}|^{\alpha_2}))u_2(t, x), \end{cases} \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^2 \quad (26)$$

(здесь Δ – двумерный оператор Лапласа).

Непосредственно убеждаемся, что

$$\lambda_{1,2}(k) = -(|k_1|^{\alpha_1} + |k_2|^{\alpha_2}) + i((-\|k\|^2)^q \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

При этом, поскольку модуль каждого элемента матрицы $\mathcal{A}(\cdot)$ возрастает не быстрее, чем $|k_1|^{2q} + |k_2|^{2q}$, то $\vec{p} = \{2q, 2q\}$, а $\vec{h} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Поэтому (26) – система вида (6), для которой выполняются условия (7), (18) (с указанными $\vec{p}$ и $\vec{h}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, “Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции”, *Докл. АН СССР*, **257**:4 (1981), 799–804.
- [2] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [3] В. В. Городецкий, “Задача Коши для параболических по Шилову уравнений в классах обобщенных периодических функций”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1988, № 5, 82–84.
- [4] В. В. Городецкий, Я. М. Дринь, “Параболічні псевдодиференціальні рівняння у просторах узагальнених періодичних функцій”, *Доп. АН УРСР*, 1991, № 8, 20–24.
- [5] В. В. Городецкий, *Множину початкових значень гладких розв’язків дифференциально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці, 1998.
- [6] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, М., 1968.
- [7] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, **3**, Физматгиз, М., 1958.
- [8] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, М., 1964.
- [9] J. L. Lions, E. Magenes, *Problems aux limites non homogènes et applications*, v. 3, Travaux et Recherches Mathématiques, **20**, Dunod, Paris, 1970.
- [10] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [11] В. А. Литовченко, “Зображення узагальненого диференціювання за Е. Постом у класичній формі дробового диференціювання”, *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр.*, вип. 76, Математика, Рута, Чернівці, 2000, 54–61.
- [12] В. А. Литовченко, “Задача Коши для $\{\vec{p}, \vec{h}\}$ -параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени”, *Матем. заметки*, **77**:3 (2005), 395–411.
- [13] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 4-е изд., Наука, М., 1968.

В. А. Литовченко

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича
E-mail: vladlit@chnu.ev.ua

Поступило

23.06.2006